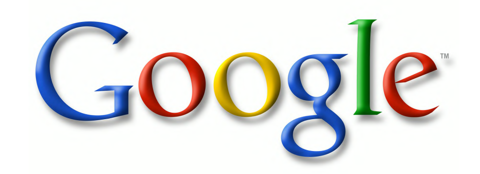


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

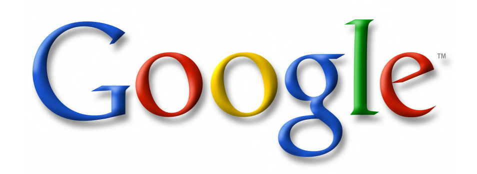
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909222 3



OER
Sammlung



OER

Sammlung

SAMMLUNG DER AUFGABEN

DES

AUFGABEN-REPERTORIUMS

DER ERSTEN 25 BÄNDE DER

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT

UNTER MITWIRKUNG
VON
PROF. DR. STOLL

SYSTEMATISCH GEORDNET VON

DR. EMMERICH UND **C. MÜSEBECK**

UND HERAUSGEGEBEN VON

J. C. V. HOFFMANN,

BEGRÜNDER DES AUFGABEN-REPERTORIUMS UND DER ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
104883
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
1899

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Hiermit überreichen wir dem mathematischen Lehrerpublikum eine systematisch geordnete Sammlung der Aufgaben des Aufgaben-Repertoriums der Zeitschrift f. mathem. und naturw. Unterricht, welche in den ersten 25 Bänden derselben und zwar vom 5. Bande an, enthalten sind. Der unterzeichnete Herausgeber fühlt sich gedrungen zuvörderst einige Worte über die Geschichte dieser für die Zeitschrift so wichtig gewordenen Abteilung zu sagen.

Das Aufgaben-Repertorium wurde auf Veranlassung des Unterzeichneten, wenn auch anfänglich nur versuchsweise, eingerichtet. Die erste Anregung hierzu gab der nun verewigte treue Freund und Mitarbeiter der Zeitschrift Dr. Pick*) in Wien während unserer Lehrthätigkeit daselbst in den Jahren 1872 bis 1877. Es geschah dies mit „Zwei Schüleraufgaben“ in Jahrg V (1874), S. 57. In demselben Jahrgange richtete dann der Unterzeichnete diese Abteilung definitiv ein, nachdem er den für diese Sache sehr eingenommenen Professor Binder**) am Seminar in Schönthal (Würtemberg) als Leiter gewonnen hatte (s. Jahrg. V, S. 286). Anfangs waren nur „Aufgaben für Schüler“ geplant (s. a. a. O.). Nachdem Binder als Realschuldirektor nach Ulm berufen worden war und wegen Überbürdung mit Amtsgeschäften (s. VII, 49 und VIII, 50)***) von der Redaktion zurücktreten mufste, übernahm der Unterzeichnete, in Ermangelung eines anderweitigen geeigneten und willigen Leiters, eine Zeit lang die Redaktion selbst (s. bes. Jahrg. VIII bis IX). Von Bd. VIII an nimmt auch der als Mathematiker von Ruf wohlbekannte Geh. Schulrat Dr. Schlömilch, später der bedeutendste Mitarbeiter an d. Ztschr., am Auf.-Rep. Anteil†) s. bes. VIII, 501 u. IX).

Der lang gehegte Wunsch des Unterzeichneten, eine Persönlichkeit zu finden, welche völlig kompetent die Leitung dieser Abteilung definitiv übernehmen könnte, wurde endlich dadurch erfüllt, dafs es ihm gelang, die durch ihre vortreffliche Aufgabensammlung wohlbekannten Herren Dr. Lieber-Stettin und von Lühmann-Königsberg i. N. hierzu zu gewinnen (XI, 50). Durch

---

*) S. Nekrolog XXVI (1895), 637. Jubiläum XXV, 313.

**) Binder starb am 23. Dezbr. 1883. Man sehe den pietätvollen Nekrolog in Bd. XV (1884), S. 648 u. f.

***) Wir werden in der Folge immer, der Kürze halber diese in der Zeitschr. gebräuchliche Zitatform wählen statt Jahrg. VIII, S. 50.

†) Nach dem Verzeichnis der Mitarbeiter (s. Anhang S. 394) hat er die gröfste Zahl der Aufgaben (167) gestellt und zwar waren dieselben immer interessant und lehrreich. Ihm zunächst kommen (s. dort S. 389) Hr. Dr. Emmrich (122) und Dr. Stoll (95).

diese Herren erlangte das Aufg.-Rep. einen hohen Aufschwung. Sie bearbeiteten diese Abteilung gemeinschaftlich bis zum Jahrg. XVI. (1885), da Hr. v. Lühmann wegen eines Augenleidens von der Mitleitung zurückzutreten sich genötigt sah. Von Bd. XIII an wurde auf unsere Anregung zur Orientierung der Leser in den Inhaltsverzeichnissen eine Tabelle gegeben, welche „genauere Nachweise“ über die Gattung und Art der Aufgaben und ihre Auflösung sowie über die Aufgabensteller und deren Löser giebt. So wuchs denn in den folgenden Jahrgängen die Zahl der Mitarbeiter*) immer mehr und mit ihnen das Interesse und die Beteiligung an dieser Abteilung, was um so höher zu schätzen ist, da für die Beiträge keinerlei Honorar gezahlt wurde, dieselben vielmehr aus reiner Liebe zur Sache geliefert wurden. Zugleich werden die Aufgaben mannigfaltiger und der ursprüngliche Rahmen für „Schülerarbeiten“ wird erweitert, indem auch Aufgaben zur Fortbildung und Übung für Geübtere (Studierende und Lehrer) Aufnahme finden. Dabei werden auch die ähnlichen Sammlungen „aufserdeutscher“ Zeitschriften berücksichtigt, so zuerst die Nouv. Ann. d. Math. (s. IX, 28 und das Referat von Lieber und v. Lühmann in X, 13).

Nachdem Hr. Prof. v. Lühmann aus dem bereits oben genannten Grunde von der Mitredaktion zurückgetreten war, kooptierte Hr. Prof. Dr. Lieber von Jahrg. XVI (1885) ab als Mitredakteur den gegenwärtigen Leiter Hr. Gymnasialoberlehrer Müsebeck, damals in Stettin, dann in Brieg (s. XVI, 17) und in Waren (Mecklenburg), gegenwärtig in Herford (Westfalen) als Lehrer der Math. wirkend. Derselbe hat seinem Chef-Redakteur bis zu dessen Tode (1896) treulich zur Seite gestanden und es lag daher nahe, nach dem Tode des verdienstvollen Dr. Lieber**) demselben die Leitung dieser Abteilung zu übertragen, zumal da derselbe während der Kränklichkeit Liebers in den letzten Jahren die Redaktion schon fast allein übernommen hatte. Die Zuwahl eines Mitredakteurs wurde ihm für den Bedürfnisfall überlassen.

Während der Herausgabe der Bde. 26—28 reifte beim Unterzeichneten allmählig der Plan zur Herausgabe einer systematisch geordneten Sammlung der Aufgaben des Aufg.-Rep. und zwar vorläufig der ersten 25 Bände der Zeitschrift. Eine solche Sammlung schien ihm aus mannigfachen Gründen erspriefslich, von

*) Dieselben sind in den Inhaltsverzeichnissen der einzelnen Bde. immer am Schlusse der genannten „Tabelle“ nach Namen und Zahl angegeben. Diese Anzahl stieg vom J. 1882 an bis zum J. 1888 von 29 bis auf 79, ging dann wieder herab bis 51 (1894) und stieg wieder bis 66 in d. Jahren 1895/96. Im Mittel waren es ca. 57. Diese Zahlen sind in folgender Reihe dargestellt:

29. 35. 46. 53. 74. 70. 79. 66. 60. 47. 48. 60. 51. 66. 66. 60.
(1882) (1897)

**) Lieber starb am 6. Nov. 1896. Siehe d. Nekrolog verfafst von Hr. v. Lühmann in Bd. 28 (1897) S. 224 f.

denen er nur zwei hier anführen möchte. Einmal bietet sie ein Bild von der 20jährigen fruchtbaren Arbeit einer wichtigen Lehrergattung für die Schule und für eigene Fortbildung; sodann wirkt sie anregend zur Nutzbarmachung für den (mathem.) Unterricht, zur Ausfüllung etwaiger Lücken und zur Fortsetzung des Begonnenen.

Dafs diese Sammlung nur die Aufgaben, nicht auch die Auflösungen enthalten durfte, verstand sich bei der gewaltigen Fülle der letzteren beinahe von selbst. Die Lösungen konnten daher nur hinter den Aufgaben signalisiert (zitiert) werden und setzen natürlich den Besitz der Zeitschrift oder wenigstens die Möglichkeit des Zugangs zu derselben voraus. Den Plan zur Bearbeitung ist noch bei Lebzeiten Dr. Liebers unter Mitwirkung von Dr. Emmerich und Prof. Dr. Stoll entworfen. Zur ausführlichen Bearbeitung erboten sich nach Liebers Tode Hr. Müsebeck und Hr. Dr. Emmerich, und zwar haben sich dieselben in die Arbeit so geteilt, dafs Hr. Dr. Emmerich den Abschnitt A (Arithmetik)*) S. 1—67 und Hr. Müsebeck den übrigen (gröfseren) Teil, die Abschnitte B bis J, S. 68 bis zu Ende bearbeitet hat. Die Oberleitung und letzte Revision hatte sich der Herausgeber vorbehalten. Die Arbeit wurde dadurch erleichtert, dafs die Verlagshandlung zur Herstellung des Manuskripts die Druckbogen aus den disponibeln Bänden uns zur Verfügung stellte. Um aber der Sammlung die gröfstmögliche Korrektheit zu verleihen, wurden die Herren Dr. Emmerich und Prof. em. Dr. Stoll zur Revision der Druckbogen gewonnen. Diese Herren haben sich der mühevollen Durchsicht mit gröfster Uneigennützigkeit unterzogen. Deshalb sprechen wir ihnen an dieser Stelle unsern aufrichtigen Dank aus. Ganz besonderer Dank gebührt aber Herrn Müsebeck, der mit bewundernswertem Fleifs die nicht leichte Zusammenstellung des gröfsten Teiles in verhältnismäfsig kurzer Zeit ausgeführt hat.

Es bleibt uns noch übrig, das Nötigste über die Einrichtung der Sammlung zu sagen, damit die Leser in derselben sich leichter orientieren.

1) Alle Aufgaben, die unter A) des Aufgaben-Repertoriums (Auflösungen) stehen, sind bezeichnet durch z. B.

(242)	FUHRMANN.	XIII, 283.	XIV, 188.
Nr.	(Verfafser)	(Ort d. Aufgabe)	(Ort d. Lösung)

Bei den Aufgaben aus Abt. C (d. s. Aufg. aus nichtdeutschen oder fremdländischen Zeitschriften) ist die Nummer kursiv gesetzt und die Zeitschrift, der die Aufgabe entnommen ist, hinzugesetzt, z. B. *(457)* Journ. élém. XXI, 522.

Die Zahl, welche sich hinter den Buchstaben befindet, die den Beweis charakterisieren, bedeutet die Anzahl der betr. Beweise;

*) Auch hat Hr. Dr. Emmerich den Abschnitt C. Trigonometrie vollständig revidiert.

fehlt diese Zahl, so ist nur ein Beweis vorhanden; z. B. Beweis (G. T. 5) d. h. Beweise durch Geometrie und Trigonometrie; 5 Beweise.

Ist die Aufgabe leicht zu lösen und daher die Lösung nicht gegeben, so ist an der Stelle „Ort der Lösung" ein Strich „—" gesetzt.*) Ist die Aufgabe ungelöst geblieben, so ist dieselbe durch „Nicht gelöst" bezeichnet.

2) Die gegenseitigen Beziehungen oder die Verwandtschaft der Sätze und Aufgaben sowie die Beziehungen zu Aufsätzen anderer Zeitschriften sind folgendermafsen berücksichtigt:

a) Auf ähnliche Aufgaben bezw. Sätze,**) welche sich in verschiedenen Abschnitten befinden, ist wechselseitig aufmerksam gemacht.

b) Am Schlufse der einzelnen §§, bezw. Abschnitte, ist auf ähnliche Sätze in andern Abschnitten aufmerksam gemacht worden.

c) Konstruktionsaufgaben, welche dem Abschnitte „Neuere Geometrie des Dreiecks" angehören, sind den Konstruktionsaufgaben in B hinzugefügt, weil die Anzahl der ersteren eine sehr geringe ist; doch ist an den betr. Stellen auf die bez. Aufgaben in B hingewiesen.

d) Auf Artikel bezw. Abhandlungen in der Zeitschrift, welche Aufgaben oder Sätze enthalten, die in den einzelnen §§ hätten benutzt werden können, ist bei den betr. §§ hingewiesen worden.

3) Besondere Erwähnung verdienen noch folgende Punkte:

Nicht aufgenommen sind die Aufgaben in C,

(3_1), (31_1) bis (36_1), (18_2), (20_2), (21_2),

d. s. Aufgaben aus der Chemie in veralteter Fafsung; (90) ungelöst von unbekanntem Verfasser; (429), weil sie einen Irrtum enthält; (784) und (1344), weil sie unbestimmt gefafst sind.

Am Schlufse des Index haben wir noch eine Tabelle hinzugefügt, welche die Aufsuchung einer bestimmten (nummerierten) Aufgabe insofern erleichtert, als man ersieht, in welchem Bande man sie zu suchen hat.

Wir schliefsen mit dem innigen Wunsche, dafs diese Abteilung der Zeitschrift wie bisher auch weiter blühen und gedeihen möge zur Befruchtung des mathem. Unterrichts und zu gegenseitiger wissenschaftlicher Anregung zwischen den Gliedern der mathematischen Lehrerwelt. —

Leipzig, im Oktober 1898.

J. C. V. Hoffmann,
Herausgeber der Zeitschrift für mathem. u. natw. Unterr.

---

*) Bei derartigen leichten Aufgaben, die sich unter C) des A.-R. befinden, ist natürlich gesetzt z. B.

457. Journ. élém. XXI, 522. —

**) Z. B. ein Dreieck aus denselben Stücken zu konstruieren und zu berechnen oder Sätze vom Dreieck, die mit entsprechender Umformung für das Tatraeder gelten u. a. m.

Inhaltsverzeichnis.

A. Arithmetik.

I. Algebra.

II. Zahlentheorie.

III. Niedere Analysis.

IV. Höhere Analysis.

B. Planimetrie.

I. Lehrsätze.

II. Aufgaben.

C. Trigonometrie.

I. Goniometrie.

E. Neuere Geometrie des Dreiecks.

F. Geometrische Örter und Umhüllungskurven.

I. Geometrische Örter.

G. Kegelschnitte und höhere Kurven.

I. Kegelschnitte.

A.

Arithmetik.

I. Algebra.

§ 1. Algebraische Identitäten.

1. In der Walachei bedient man sich hin und wieder der Finger, um das Produkt zweier einzifferiger Zahlen, die gröfser als 6 sind, zu finden. Man giebt den Fingern beider Hände der Reihe nach die Werte 6, 7, 8, 9, 10, also dem Daumen 6, Zeigefinger 7, u. s. w. Hat man nun zwei dieser Zahlen z. B. $8 \cdot 9$ zu multiplizieren, so legt man die betreffenden Finger, hier Mittelfinger der einen und Goldfinger der anderen Hand, an einander und multipliziert die Anzahl der übrigbleibenden Finger der einen, hier 2, mit der der anderen, hier 1, also $2 \cdot 1 = 2$. Zu diesem Produkte giebt man soviel Zehner hinzu, als Finger an beiden Händen zu dieser Multiplikation nicht benutzt worden sind (einschl. der zusammengesetzten), also $3 + 4 = 7$ Zehner. Somit ist das Produkt 72.

Es ist zu beweisen, dafs dieses Verfahren allgemein richtig ist. Ferner soll das Verfahren für die Grundzahl g des allgemeinen Zahlensystems verallgemeinert werden.

Pick V, 57. VI, 156.

2. Bezeichnet s die halbe Summe der drei Zahlen a, b, c, so ist identisch

$$a(s-a)^2 + b(s-b)^2 + c(s-c)^2 = abc - 2(s-a)(s-b)(s-c).$$

(456) Schlömilch XVI, 25. XVI, 346.

3. Ebenso ist

$$a(s-a)^2 + b(s-b)^2 + c(s-c)^2$$
$$= a(s-b)(s-c) + b(s-c)(s-a) + c(s-a)(s-b).$$

(638) Emmerich XVII, 597. XVIII, 349.

4. Wenn zwischen α, β, γ eine gewisse Bedingungsgleichung stattfindet, so kann das Polynom

$$\alpha(b^2 + bc + c^2) + \beta(c^2 + ca + a^2) + \gamma(a^2 + ab + b^2)$$

durch $a + b + c$ ohne Rest dividiert und der Quotient in der Form $\alpha A + \beta B + \gamma C$ dargestellt werden, wobei A nur von b und c abhängt, ebenso B von c und a, C von a und b. Man soll jene Bedingungsgleichung und die Werte von A, B, C ermitteln.

(54) SCHLÖMILCH IX, 203. IX, 371.

5. Den einfachsten nur aus $3n$ten Potenzen der drei Gröfsen a, b, c gebildeten durch $a + b + c$ ohne Rest teilbaren Ausdruck zu finden.

(549, 550) VALTA XVI, 503. XVII, 353.*)

6. Zu beweisen, dafs

$$\begin{vmatrix} b+c, & c+a, & a+b \\ b'+c', & c'+a', & a'+b' \\ b''+c'', & c''+a'', & a''+b'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} \text{ ist.}$$

(1210) STOLL XXIV 344. XXV 114 (Verallgemeinerung).

7. a) $| a + b, b + c, c + d, d + a | = 0$;

b) $| a + b + c, b + c + d, c + d + a, d + a + b | = 3 | a, b, c, d |$;

c) $| a + b, b + c, c + d, d + e, e + a | = 2 | a, b, c, d, e |$**);

d) $| a + b + c, b + c + d, c + d + e, d + e + a, e + a + b | = 3 | a, b, c, d, e |$***);

e) $| a + b + c + d, b + c + d + e, c + d + e + a, d + e + a + b, e + a + b + c | = 4 | a, b, c, d, e |$.

8. a) $| a - b, b - c, c - d, d - a | = 0$;

b) $| a - b + c, b - c + d, c - d + a, d - a + b | = 3 | a, b, c, d |$;

c) $| a - b, b - c, c - d, d - e, e - a | = 0$;

d) $| a - b + c, b - c + d, c - d + e, d - e + a, e - a + b | = | a, b, c, d, e |$;

e) $| a - b + c - d, b - c + d - e, c - d + e - a, d - e + a - b, e - a + b - c | = 0$;

f) $| a + b + c + d + e, b + c + d + e + f, c + d + e + f + a, d + e + f + a + b, e + f + a + b + c, f + a + b + c + d | = 5 | a, b, c, d, e, f |$;

---

*) 2. Aufl. Z. 4 u. 5 lies $(a^3 + b^3 + c^3)^3$ statt $a^3 + b^3 + c^3$.
**) Beim Beweise fehlt Z. 3 an letzter Stelle e.
***) Beim Beweise fehlt Z. 4 u. 5 an letzter Stelle e.

g) Ist $| a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1},\ a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \cdots, a_n + a_1 + a_2 + \cdots a_{n-2} | = (n-1) | a_1, a_2, \cdots a_n |$?

(1339, 1340) Dörr XXV, 589. XXVI, 423; 424.

9. Eine Determinante verschwindet, wenn die Glieder von drei parallelen Reihen arithmetische Reihen erster Ordnung bilden; auch ist

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(637 *a*, *b*) Sporer XVII, 597. XVIII, 348 (Verallgemeinerungen).

---

10. Das Produkt von vier aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe vermehrt um die vierte Potenz der Differenz der Reihe ist ein vollständiges Quadrat.

(*607*) Mathesis. XXIV, 463.

11. Unter der Voraussetzung, dafs $a + b + c = 0$ ist, sind die beiden Gröfsen $a^3b + b^3c + c^3a$ und $a^3c + b^3a + c^3b$ einander gleich und zwar gleich dem Produkt aus -1 in ein vollständiges Quadrat.

(*370*) Journ. élém. XIX, 510.

12. Ist

$$P = (-a + b + c + d)\ (a - b + c + d)\ (a + b - c + d)\ (a + b + c - d)$$

und

$$N = (ab + cd)\ (ac + bd)\ (ad + bc),$$

so sind

$$4N - a^2P,\ 4N - b^2P,\ 4N - c^2P,\ 4N - d^2P$$

vollständige Quadrate.*)

(*605*) Journ. élém. XXIV, 463.

Zerfällung algebraischer Ausdrücke in Quadrate.

13. $x^2 + 2xy + 4y^2 - 6xz - 18$**)$yz - 2z^2$ in eine algebraische Summe von Quadraten dreier Variabeln zu verwandeln. Verallgemeinerung.

(34, 35) Bauer VI, 298. —***)

---

*) $4N : P$ ist das Quadrat des Umkreisdurchmessers bei einem Sehnenviereck mit den Seiten a, b, c, d.

**) 18 statt 8 gesetzt, um das Ergebnis zu vereinfachen.

***) Diese Striche besagen, dafs keine Auflösung gegeben, dafs aber die Lösung leicht ist. Ist eine Aufgabe in d. Z. nicht gelöst worden, so steht dabei „ungelöst".

14. Wenn eine Zahl a die Summe dreier Quadrate ist, so läſst sich auch a^2 in drei Quadrate zerlegen und zwar im allgemeinen auf drei Arten.

(14) BINDER V, 369. VI, 297.

15. Die Differenz der Kuben von zwei Zahlen, welche sich um 2 unterscheiden, ist $= S\,(3\,Q)$ d. h. eine Summe von drei Quadraten.

(*367*) Mathesis. XIX, 350.

16. Wenn die Summe (oder Differenz) zweier Zahlen das Doppelte eines Quadrates ist, so ist die Summe (oder Differenz) ihrer Kuben eine Summe von drei Quadraten.

(*369*) Mathesis. XIX, 350.

17. $3\,x^4 + y^4$ ist gleich $S\,(3\,Q)$.

(*267*) Mathesis. XVI, 433.

18. $3\,n^4 + 6\,n^2 + 1$ ist gleich $S\,(3\,Q)$.

19. $4\,(n^2 + 1)\,(n^2 + 2)$ als $S\,(4\,Q)$ darzustellen.

(*606* a, b) Mathesis. XXIV, 463.

20. $(2\,n^2 + 3)^2$ als $S\,(3\,Q)$, $S\,(5\,Q)$ und $S\,(7\,Q)$ darzustellen.

(*366*) Mathesis. XIX, 350.

21. Ist $(2n)^3 + (n+1)^3 = a.\quad (2n)^3 + (n-1)^3 = b,$

$$(2\,n^2)^3 + (n^2+1)^3 = c,\quad (2\,n^2)^3 + (n^2-1)^3 = d,$$

so ist $(a+b)\,(c+d):c$ eine Summe von drei Kuben und $(3n+1)\,c:a = (3n-1)\,d:b$ eine Summe von drei Quadraten.

(*604*) Mathesis. XXIV, 462.

22. Ist
$$AC - B^2 = m^2,$$
so ist $(Ac - Ca)^2 - 4\,(Ab - Ba)\,(Bc - Cb) = S\,(2\,Q)$.

(*371*) Mathesis. XIX, 510.

23. $24\,(1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5) + 1$ ist gleich $S\,(2\,Q)$.

(*368*) Mathesis. XIX, 350.

In den Aufgaben 24—31 bezeichnen u_1, u_2, u_3, $\cdots$ die Glieder einer arithmetischen Reihe.

24. $u_1^2 + 2\,u_2^2 + 3\,u_3^2 + 4\,u_4^2 = S\,(2\,Q)$.

(*609*) Mathesis. XXIV, 464.

25. $u_1^2 + 3\,u_2^2 + 5\,u_3^2 + 7\,u_4^2 + 9\,u_5^2 = S\,(3\,Q)$.

(*610*) Mathesis. XXIV, 464.

26. $u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_5^3$ ist durch u_3 teilbar und der Quotient $= S(3Q)$.

(*615*) Mathesis. XXIV, 464.

27. $u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_8^3$ ist durch $u_1 + u_8$ teilbar und der Quotient $= S(5Q)$.

(*611*) Mathesis. XXIV, 464.

28. $u_1^4 + u_2^4 + \cdots + u_5^4 = S(4Q)$.

(*612*) Mathesis. XXIV, 464.

29. $u_1^4 + u_2^4 + 2u_3^4 + u_4^4 + u_5^4 = S(3Q)$.

(*608*) Mathesis. XXIV, 463.

30. $u_1^5 + u_2^5 + u_3^5$ ist durch u_2 teilbar und der Quotient $= S(4Q)$.

(*614*) Mathesis. XXIV, 464.

31. $u_1^6 + u_2^6 + \cdots + u_5^6 = S(6Q)$.

(*613*) Mathesis. XXIV, 464.

32. Die Identität

$$x^{4n+2} + y^{4n+2} = (x^{2n+1} - 2x^{2n-1}y^2 + 2x^{2n-3}y^4 - \cdots \pm 2xy^{2n})^2 + (y^{2n+1} - 2y^{2n-1}x^2 + 2y^{2n-3}x^4 - \cdots \pm 2yx^{2n})^2$$

zu beweisen.

(*375*) Journ. élém. XIX, 511.

---

§ 2. Gleichungen linearen oder quadratischen Charakters.

a. Gleichungen mit einer Unbekannten.

1. $x + \sqrt{a^2 - x^2} = b$. — Bedingung der Realität der Lösungen, falls a und b reell und positiv sind. Genügen beide Lösungen der Gleichung?

(*1₁*) Nouv. Ann. X, 14. —

2. $\sqrt{x\sqrt{x} + x} + \sqrt{x} = x$.

3. $\sqrt{x\sqrt{x} - x} + \sqrt{x} = x$.

(*29 a, b*) Pick VI, 159. — (0, 9; 0, 1, 4).

4. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+\sqrt{c-x}=\sqrt{a+b+c-x}.$

(*502*) Journ. élém. XXII, 515,

5. $\sqrt{x^2-a^2-b^2}+\sqrt{x^2-b^2-c^2}+\sqrt{x^2-c^2-a^2}=x.$

(*503*) Mathesis. XXII, 515.

6. $x\sqrt{p+x}=\sqrt[3]{q\sqrt{x^7}+\sqrt{x^9}}.$

(483) Haag XVI, 204. XVI, 495.

7. $\frac{\sqrt[n]{a-x}}{x^2}-\frac{\sqrt[n]{a-x}}{a^2}=\sqrt[n]{\frac{x^2}{a+x}}.$

(*517*) Educ. Times. XXIII, 52.

8. $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}=3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}.$

(*338*) Mathesis. XVIII, 505.

9. $5^{x(x-1)}\ 2^{x(x+1)}=64\cdot 10^{2x}.$

(*337*) Mathesis. XVIII, 505.

10. $x^{\lg^b x}=m.$

(16) Belović. $-\left(b^{\pm\sqrt{\lg^b m}}\right).$

11. $[\lg(x+1)]^2+[2\lg 2+\lg(x^2-1)]\lg(x+1)$ $-[\lg(x-1)+\lg(x^2-1)]\lg(x-1)+(\lg 2)^2+\lg(x^2-1)\lg 2=0.$

(*519*) Educ. Times. XXIII, 195.

12. Unter welcher Bedingung sind die Wurzeln der Gleichung $(a^2+ax-1)(a-x)=a^2x$ reell?

(1288) Emmerich XXV, 278. XXVI, 103.

13. Die Gleichung $\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}=1$ hat immer reelle Wurzeln (vorausgesetzt, dafs a, b, p, q reell sind).

(*340*) Mathesis. XVIII, 506.

14. Die Gleichung aufzustellen, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der Gleichung $7x^2+4x+2=0$ sind.

(*124*) Journ. élém. XIII, 446.

---

15. Die Aufgabe: „A braucht zur Errichtung einer Mauer $2m$ Tage mehr als B. Arbeiten beide zusammen, so wird die Mauer in n Tagen fertig. In wieviel Tagen vermag A allein die Mauer aufzuführen?“ führt zu einer quadratischen Gleichung mit zwei ver-

schiedenen positiven Wurzeln. a) Weshalb entspricht nur die grössere Wurzel der genannten Aufgabe? b) Wie ist die Aufgabe umzuformen, damit der neuen Aufgabe nur die kleinere Wurzel entspricht?

(1162) Emmerich XXIII, 592. XXIV, 443.

16. Von zwei Punkten A und B, die um $10\,m$ von einander entfernt sind, bewegen sich gleichzeitig zwei Körper in der Richtung AB. Der 1. beginnt mit der Geschwindigkeit $4\,m$ und vergrössert seinen Weg in jeder folgenden Sekunde um $1\,m$, der 2. bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $4\,m$. a) Nach wieviel Sekunden und wo treffen sich beide? b) Welchen Wert dürfte die Geschwindigkeit des 2. nicht erreichen, wenn sich beide in einer Entfernung von $B < 10\,m$ treffen sollen?

(*120*) Journ. élém. XIII, 443.

17. n Personen zählen ihr Geld. A_1 sagt zu A_2 gieb mir dein Geld, so habe ich a ℳ; A_2 sagt zu A_3 gieb mir $\frac{1}{2}$ deines Geldes, so habe ich a ℳ, A_3 sagt zu A_4 gieb mir $\frac{1}{3}$ deines Geldes, so habe ich a ℳ u. s. w. A_n sagt zu A_1 gieb mir $\frac{1}{n}$ deines Geldes, so habe ich a ℳ. Wieviel ℳ hatte jeder?

(*121*) Math. Visitor. XIII, 444.

b. Gleichungen mit zwei Unbekannten.

18. Ein Personenzug fährt von A nach B und, nach 5 Min. Aufenthalt in B, weiter nach C. 14 Min., nachdem er B verlassen hat, begegnet ihm ein Eilzug, dessen Geschwindigkeit doppelt so gross ist als die seinige. Dieser Eilzug ist vom Punkte C in dem Augenblick abgefahren, wo der Personenzug 25 km von A entfernt war. Ausserdem weiss man, dass der Eilzug 2 St. braucht, um die Entfernung CB zurückzulegen, und dass, wenn er in A angekommen unmittelbar von diesem Punkte zurückkehrte, er in C $\frac{3}{4}$ St. nach dem Personenzuge anlangen würde. Wieviel km macht jeder Zug in der Stunde und wie weit sind A, B, C von einander entfernt?

(*2_1*) Nouv. Ann. X, 14. — (30, 60, 72, 120).

19. Welche Stellungen müssen die beiden Zeiger einer Uhr haben, wenn sie bei gegenseitiger Vertauschung gleichfalls mögliche Stellungen einnehmen sollen?

(*203*) Journ. élém. XV, 197.*)

*) Stellt man sich vor, der kleine Zeiger stehe zwischen a und $(a+1)$, der grosse zwischen b und $(b+1)$ Uhr, so gelangt man bei geeigneter Wahl der Unbekannten zu den Gleichungen

$$12x = 5b + y,\quad 12y = 5a + x.$$

20. Die Seiten eines Dreiecks, welche durch ganze, in arithmetischer Progression stehende Zahlen ausgedrückt sind, aus folgenden Angaben zu berechnen: Addiert man zu jeder Seite 50, so wird der Radius des Inkreises um 17 gröfser; addiert man dagegen zu jeder Seite 60, so wird der Radius des Inkreises um 20 gröfser.

(*122*) Educ. Times. XIII, 445.

---

21. $\sqrt{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\sqrt{y+\sqrt{x}-\sqrt{xy}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$

(29 d) Pick VI, 159. — (0, 0; 9, 4).

22. Rationale Werte für x und y zu finden, die der Gleichung

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^4=217+88\sqrt{6}$$

genügen.

(*350*) Tidsskrift. XIX, 35.

23. x und y zu berechnen aus

$$y\sqrt{2}-x\sqrt{-3}=\sqrt{\tfrac{1}{2}x+y\sqrt{-6}}.^{*)}$$

(*522*) Nyt Tidsskrift. XXIII, 196.

24.
$$(x+y)\,x^2y^2=b$$
$$x^5+y^5=a.$$

(627 c) Szimányi XVII, 525. XVIII, 268.

25.
$$(x^2+\sqrt{x^4-1})\,(y^2+\sqrt{y^4-1})=a$$
$$x^4+y^4=b.$$

(692 b) Szimányi XVIII, 356. XIX, 90.

26. $(x+y)\,(1+xy+x^2y+xy^2+x^2y^2)+xy=a$

$xy\,(x+y)\,(x+y+xy)\,(x+y+xy+x^2y+xy^2)=b.$

(*520*) Educ. Times. XXIII, 195.

c. Gleichungen mit drei Unbekannten.

27. Bringt man die Gleichungen

1) $x=y-z+2$

2) $(x-z):(y+z)=1:2$

3) $\dfrac{x-2}{4y-4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{z-1}{y-1}$

---

*) 6 statt b gesetzt.

auf die Normalform $ax + by + cz = d$ und wendet die Additionsmethode an, so erhält man $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$. Dasselbe Resultat gewinnt man, wenn man $\frac{1}{2}$ in 3) durch irgend eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl ersetzt. Die Aufgabe wird unbestimmt, wenn man diesen Bruch ganz wegläfst. — Wenn man dagegen aus 1) und 2) $x = 4z - 2$, $y = 5z - 4$ berechnet und diese Werte in 3) einsetzt, so hebt sich z in beiden Brüchen identisch weg. Man erhält $\frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$, also einen Widerspruch. Wo steckt der Fehler?

(1002) v. Schaewen XXI, 592. XXII, 427.

28.
$$\alpha_1 x + \alpha_2 y - \alpha_1 \gamma_2 z = \alpha_2 \gamma_1$$
$$\beta_1 x + \beta_2 y - \beta_2 \gamma_1 z = \beta_1 \gamma_2$$
$$\gamma_1 x + \gamma_2 y - \gamma_1 \gamma_2 z = \gamma_1 \gamma_2$$

(33) Bauer VI, 298. — $(\gamma_2, \gamma_1, 1)$.

29.
$$x - z = 12$$
$$x(x + y + z) = 299$$
$$(x + y + z)(y + z) = 230.$$

(*527*) Mathesis. XXIII, 197.

30.
$$(x - z)^2 - y(x - y) = a^2$$
$$z(x + 2y) = a^2$$
$$x(y + z) = a^2.$$

(*530*) Mathesis. XXIII, 353.

31.
$$x^3 y + x^2 yz + x^2 = 76$$
$$xy^3 + zy^3 + y^2 = 171$$
$$yz^3 + xyz^2 + z^2 = 304.$$

(*531*) Mathesis. XXIII, 353.

32.
$$x^2 + 4xy + 6y^2 = 33$$
$$x^2 + 4xz + 12z^2 = 9$$
$$y^2 + 3yz + 2z^2 = 0.\text{*)}$$

(*81*) Educ. Times. XII, 270.

33.
$$(9 + x^2)\sqrt{12 + y^2} = 100$$
$$(12 + y^2)\sqrt{5 + z^2} = 48$$
$$(5 + z^2)\sqrt{9 + x^2} = 45.$$

(*257*) Math. Magazine. XVI, 359.

---

*) Die Koeffizienten sind geändert, um das Ergebnis zu vereinfachen.

34.
$$x + y + z = (a + b + c)(a + b - c)$$
$$xy + xz - yz = b[(a^2 - c^2)(2a - b) + 2ab^2]$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 2b^2(a^2 + c^2).$$
(*79*) Journ. élém. XII, 269.

35.
$$x + y + z = a$$
$$xy - xz - yz = b$$
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3yz = c.$$
(628) Szimányi XVII, 525. XVIII, 269.

36.
$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$512(x^3 + y^3 + z^3) = (x + y + z)^3$$
$$x^4 + y^4 + z^4 = 962.$$
(*256*) Tidsskrift. XVI, 359.

Symmetrische Buchstabengleichungen.

37.
$$xy + a(x + y) = m$$
$$yz + a(y + z) = n$$
$$zx + a(z + x) = p.$$
(*345*) Mathesis. XIX, 34.

38.
$$x + y + axy = \alpha$$
$$y + z + ayz = \beta$$
$$z + x + azx = \gamma.$$
(*529*) Mathesis. XXIII, 353.

39.
$$x(y + z + xyz) + a = 0$$
$$y(z + x + yzx) + b = 0$$
$$z(x + y + zxy) + c = 0.$$
(591) Emmerich XVII, 201. XVII, 593 (Zusatz).
(*528*) Journ. élém. XXIII, 353.

40.
$$x(\alpha_1 y + \alpha_2 z + \alpha xyz) + a = 0$$
$$y(\beta_1 z + \beta_2 x + \beta yzx) + b = 0$$
$$z(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma zxy) + c = 0.$$
(713) Emmerich XVIII, 504. XIX, 263.

41.
$$x(-x + y + z) = a$$
$$y(x - y + z) = b$$
$$z(x + y - z) = c.$$
(*344*) Mathesis. XIX, 33.

42.

$$(x - y + z)\,(x + y - z) = ax$$
$$(y - z + x)\,(y + z - x) = by$$
$$(z - x + y)\,(z + x - y) = cz.$$

(*127, 200*) Educ. Times. XIII, 447; XV, 196.

43.

$$a\sqrt{(x - y + z)\,(x + y - z)} = x\sqrt{yz}$$
$$b\sqrt{(y - z + x)\,(y + z - x)} = y\sqrt{zx}$$
$$c\sqrt{(z - x + y)\,(z + x - y)} = z\sqrt{xy}.$$

(*532*) Educ. Times. XXIII, 353.

44.

$$xyz + x - y - z = a\,(1 + yz - zx - xy)$$
$$yzx + y - z - x = b\,(1 + zx - xy - yz)$$
$$zxy + z - x - y = c\,(1 + xy - yz - zx)$$

(*80*) Educ. Times. XII, 270.

45.

$$x^2 - yz = a^2$$
$$y^2 - zx = b^2$$
$$z^2 - xy = c^2.$$

(*259*) Educ. Times. XVI, 360.

46.

$$x^m\,(x + y + z)^n = a\,(yz)^r$$
$$y^m\,(x + y + z)^n = b\,(zx)^r$$
$$z^m\,(x + y + z)^n = c\,(xy)^r.$$

(693 a) Szimányi XVIII, 356. XIX, 91.

47.

$$(y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{ayz}{x}$$
$$(z^2 + x^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{bzx}{y}$$
$$(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{cxy}{z}.$$

(693 b) Szimányi XVIII, 356. XIX, 91.

48.

$$x^3 - xyz = a\sqrt{xyz}$$
$$y^3 - xyz = b\sqrt{xyz}$$
$$z^3 - xyz = c\sqrt{xyz}.$$

(617 b) Woelfer XVII, 446. XVIII, 191.

49.
$$x^3 - xyz = a\sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$$
$$y^3 - xyz = b\sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$$
$$z^3 - xyz = c\sqrt{x^3 + y^3 + z^3}.$$

(617 a) Woelfer XVII, 446. XVIII, 191.

50.
$$y^2 + z^2 - x(y + z) = a$$
$$z^2 + x^2 - y(z + x) = b$$
$$x^2 + y^2 - z(x + y) = c.$$

(*197*) Mathesis. XV, 196.

51.
$$x^{2n}(y^n - z^n) = a$$
$$y^{2n}(z^n - x^n) = b$$
$$z^{2n}(x^n - y^n) = c.$$

(895) Beyens XX, 511. XXI, 271.

52.
$$x^2 + 2yz = a$$
$$y^2 + 2xz = b$$
$$z^2 + 2xy = c.$$

(970 a) Hahn XXI, 428. XXII, 189.

53.
$$(x + 2y)(x + 2z) = a$$
$$(y + 2x)(y + 2z) = b$$
$$(z + 2y)(z + 2x) = c.$$

(*346*) Mathesis. XIX, 34.

54.
$$\frac{x-y}{y^3} + \frac{x-z}{z^3} = ax$$
$$\frac{y-z}{z^3} + \frac{y-x}{x^3} = by$$
$$\frac{z-x}{x^3} + \frac{z-y}{y^3} = cz.$$

(*347*) Mathesis. XIX, 34.

d. Gleichungen mit vier Unbekannten.

55.
$$x + y + z + u = 44$$
$$xy + zu = 250$$
$$xz + yu = 234$$
$$xu + yz = 225.$$

(*126*) Journ. élém. XIII, 446.

56. $u^m v^n = a^x,\ u^n v^m = a^y,\ u^x v^y = b,\ u^y v^x = c.$

(*336*) Journ. élém. XVIII, 505.

57. $x^4 + a - b = y^4 + b - c = z^4 + c - d = u^4 + d - a = xyzu.$

(*536*) Journ. élém. XIII, 355.

58.
$$x^2 - yz - zu - uy = a$$
$$y^2 - zu - ux - xz = b$$
$$z^2 - ux - xy - yu = c$$
$$u^2 - xy - yz - zx = d.$$

(*535*) Mathesis. XXIII, 354.

e. **Elimination.**

59. Wenn

$$3cz^2 = bx^2 + 2axy,\ 3c^2z = a^2y + 2abx,\ c^3 = a^2b$$

ist, zu beweisen, dafs auch $z^3 = x^2y$ ist.

(*82*) Educ. Times. XII, 270.

60. Aus $p + q = a,\ px + qy = b,$
$$px^2 + qy^2 = c,\ px^3 + qy^3 = d$$

soll eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln x und y gebildet werden, in der p und q nicht vorkommen.

(*521*) Nyt Tidsskrift. XXIII, 196.

61. Zu beweisen, dafs die drei Gleichungen

$$a^2(x^2 + xy + y^2) - axy(x + y) + x^2y^2 = 0$$
$$a^2(y^2 + yz + z^2) - ayz(y + z) + y^2z^2 = 0$$
$$a^2(z^2 + zx + x^2) - azx(z + x) + z^2x^2 = 0$$

von einander abhängen.

(*376*) Mathesis. XIX, 512.

62. Die drei Gleichungen

$$y^2 + z^2 = 2ayz,\ z^2 + x^2 = 2bzx,\ x^2 + y^2 = 2cxy$$

können nur gelöst werden, wenn $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc = 1$ ist.

(*129, 202*) Educ. Times. XIII, 447, XV, 197.
(*534*) Mathesis. XXIII, 354.

63. Welche Identität verbindet a, b, c, wenn

$$(x - y)(x - z) = ayz,\ (y - z)(y - x) = bzx,\ (z - x)(z - y) = cxy$$

ist?

(616) Emmerich XVII, 446. XVIII, 190.

64. x, y, z zu eliminieren aus

$$(x - y + z)(x + y - z) = ayz,$$
$$(y - z + x)(y + z - x) = bzx,$$
$$(z - x + y)(z + x - y) = cxy.$$

(*201*) Educ. Times. XV, 197.

65. Aus den Gleichungen

$$bx^2 + axy + cyz = 0,\ cy^2 + byz + azx = 0,\ az^2 + czx + bxy = 0$$

x, y, z zu eliminieren.

(1255) EMMERICH XXV, 49. XXV, 504.

66. Können die drei Gleichungen

$$x^2 \sin\beta + xy \sin(\beta - \gamma) - yz \sin\gamma = 0,$$
$$y^2 \sin\gamma + yz \sin(\gamma - \alpha) - zx \sin\alpha = 0,$$
$$z^2 \sin\alpha + zx \sin(\alpha - \beta) - xy \sin\beta = 0,$$

in denen α, β, γ die Winkel eines Dreiecks bezeichnen, für andere Werte als $x = y = z = 0$ zusammen bestehen?

(1256) EMMERICH XXV, 49. XXV, 505.

67. Gegeben sind die vier Gleichungen

$$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = 0,$$
$$y_1x_2x_3 + y_2x_3x_1 + y_3x_1x_2 = 0,$$
$$x_2x_3 - (x_2 - x_3)\cot\alpha + 1 = 0,$$
$$x_3x_1 - (x_3 - x_1)\cot\beta + 1 = 0,$$

in denen α und β zwei Winkel eines Dreiecks bezeichnen. Man soll die Gröfsen x_1, x_2, x_3 eliminieren und zwar so, dafs das Resultat in Determinantenform erscheint.

(1012) STOLL XXII, 105. XXII, 501.

68. Das System

$$x^2 + \xi^2 = a,\quad y^2 + \eta^2 = b,\quad z^2 + \zeta^2 = c,$$
$$xy + \xi\eta = d,\quad yz + \eta\zeta = e,\quad zx + \zeta\xi = f$$

enthält im allgemeinen einen Widerspruch, der nur schwindet, wenn zwischen a, b, c, d, e, f eine gewisse Bedingungsgleichung besteht; wie heifst diese?

(31) BAUER VI, 159. —

69. Setzt man in dem vorigen System statt der drei unteren Gleichungen folgende

$$xy \pm \xi\eta = d,\quad yz \pm \eta\zeta = e,\quad zx \pm \zeta\xi = f,$$

so hat man 4 wesentlich verschiedene Systeme, je nachdem man nämlich in diesen Gleichungen das Zeichen + 0, 1, 2, 3mal setzt.

Welche dieser Systeme widersprechen einander, welche sind lösbar; und wie heifsen die Lösungen der letzteren?

(32) BINDER VI, 159. —

70. Welche Gleichung mufs zwischen x und y bestehen, wenn es ein Wertsystem $z_1, z_2, z_3, \cdots z_n$ geben soll, welches das System der $n+1$ Gleichungen

$$0 = 1 + z_1 y = k + z_1 x + z_2 y = k^2 + z_2 x + z_3 y = k^3 + z_3 x + z_4 y$$
$$= \cdots = k^{n-1} + z_{n-1} x + z_n y = k^n + z_n x \text{ befriedigt?}$$

(847) SCHUMACHER XX, 116. XX, 510.

---

§ 3. Höhere algebraische Gleichungen.

a. Reduzierbare Gleichungen.

α. Abscheidung linearer Faktoren.

1. $$x^3 - 2ax^2 + a^3 = 0.$$

(440) MÜSEBECK, XV 612. XV, 612.

2. $$\frac{x}{a} + \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}.$$

(125) Nouv. Ann., Journ. élém. XIII, 446.

3. $$\sqrt{(\sqrt{x}\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x} + x} + \sqrt{x}\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} = x.$$

(29 c) PICK VI, 159. — (0, 2, i, $-i$).

4. $$(2\sqrt{3x} - 3\sqrt{2})\left(\sqrt{3\sqrt{3x} + \sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3x} - 2\sqrt{2}}\right)$$
$$= \sqrt[4]{72}\,(2x - 3).$$

(746 c) SZIMÁNYI XIX, 33. XIX, 427.

5. $$\begin{vmatrix} a-x, & c, & b \\ c, & b-x, & a \\ b, & a, & c-x \end{vmatrix} = 0.$$

(482) FUHRMANN XVI, 125. XVI, 428.

6. $$\begin{vmatrix} a-x, & b, & c, & d \\ b, & a-x, & d, & c \\ c, & d, & a-x, & b \\ d, & c, & b, & a-x \end{vmatrix} = 0.$$

(548) SCHUMACHER XVI, 503. XVII, 286.

7. $(2x+b+c)(2x+c+a)(2x+a+b)+(x+a)(x+b)(x+c)=0.$

(*508*) Journ. élém. XXII, 516.

8. $8(x+a)(x+b)(x+c)+(x+b+c-a)(x+c+a-b)(x+a+b-c)=0.$

(*509*) Journ. élém. XXII, 516.

9. $8(x+b+c-a)(x+c+a-b)(x+a+b-c)+(x+3a-b-c)(x+3b-c-a)(x+3c-a-b)=0.$

(*510*) Journ. élém. XXIII, 50.

10. $(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)(a+b+c)-abcx=0.$

(*511*) Journ. élém. XXIII, 50.

11. $a(a+x)(a+2x)(a+3x)=b(b+x)(b+2x)(b+3x).$

(*512*) Journ. élém. XXIII, 51.

12. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-b-c+a}=0.$

(*500*) Journ. élém. XXII, 514.

13. $\frac{1}{x(x-a)(x-b)}+\frac{1}{a(a-x)(a-b)}+\frac{1}{b(b-x)(b-a)}+\frac{1}{x^3-abx-a^3}=0.$

(*501*) Journ. élém. XXII, 515.

14. $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x+2}+\frac{3x}{x+3}+\frac{4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=0.$

(*199*) Journ. élém.

15. $\frac{x-b-c}{x-2a}+\frac{x-c-a}{x-2b}+\frac{x-a-b}{x-2c}+1=0.$

(*505*) Journ. élém. XXII, 515.

16. $\frac{2x+c-b}{x+b-c}+\frac{2x+a-c}{x+c-a}+\frac{2x+b-a}{x+a-b}+2=0.$

(*506*) Journ. élém. XXII, 515.

17. $\frac{x+b+c-a}{x+3a-b-c}+\frac{x+c+a-b}{x+3b-c-a}+\frac{x+a+b-c}{x+3c-a-b}+1=0.$

(*507*) Journ. élém. XXII, 516.

18. $\sqrt[3]{\frac{2x+3}{2x-3}}+\sqrt[3]{\frac{2x-3}{2x+3}}=\frac{8}{18}\cdot\frac{4x^2+9}{4x^2-9}.$

(*258*) Math. Magazine. XVI, 359.

19. $\frac{y}{x} \cdot \frac{1+x^2}{1+y^2} = a; \quad \frac{y^3}{x^3} \cdot \frac{1+x^6}{1+y^6} = b^3.$

(*341*) Educ. Times. XVIII, 506.

20.
$$x^2 + yz = a$$
$$x^2y + yz = b$$
$$x^2y^2 + z = c.$$

(*343*) Mathesis. XVIII, 506.

21.
$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3.$$

(*524*) Journ. élém. XXIII, 196.

22. $(x + a + b)^5 = x^5 + a^5 + b^5.$

(*513*) Journ. élém. XXIII, 51.

23.
$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \cdot\; a_{n-1}, & a_n - \alpha_n x \\ a_1, & a_2, & \cdot\; a_{n-1} - \alpha_{n-1}x, & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1, & a_2 - \alpha_2 x, & \cdot\; a_{n-1}, & a_n \\ a_1 - \alpha_1 x, & a_2, & \cdot\; a_{n-1}, & a_n \end{vmatrix} = 0.$$

(658) Emmerich XVIII, 132. XVIII, 498.

β. Zerlegung in Faktoren 2. Grades.

24. $x(x + a)(x + b)(x + a + b) + c = 0.$

(*198*) Journ. élém. XV, 196.

25. $(x - 1)(2x - 3)(3x - 4)(6x - 5) = 14.$

26. $(5x - a)(4x - 3a)(3x - 5a)(2x - 7a) = 24(x + 2a)^4$

(746 *a*, *b*) Szimányi XIX, 33. XIX, 427.

27. $(x + a)^4 + 4(x - b)^4 = c(a + b)^2 + c(x - b)^2.$

(692 a) Szimányi XVIII, 356. XIX, 90.

28. $\frac{24x^6 - 68x^5 + 102x^4 - 109x^3 + 82x^2 - 36x + 8}{6x^5 - 11x^4 + 13x^3 - 7x^2 + 2x} = 4.$

29. $\frac{34x^2 - 358x + 828}{(x - 8)(x - 4)(x - 3)} = \frac{34x^2 - 322x + 648}{(x - 2)(x - 6)(x - 7)}.$

(627 *a*, *b*) Szimányi XVII, 525. XVIII, 268.

30. $$4x^4 - 6x^3 - 3x + 1 = 0.$$
(117) UNFERDINGER (Grun. Arch. XLII 347) XI, 274. —

31. $$(x-1)^2(x^2+1) = c^2x^2.$$
(107) UNFERDINGER ($l \cdot c.$) XI, 108. XI, 431.

32. $$(1+3x^2+x^4)(1-x+x^2)^2 = c^2x^2(1+x^2)^2.$$
(106) UNFERDINGER ($l.\ c.$) XI, 108. XI, 431.

33. Setzt man in der Gleichung

$$ax_1^2 + bx_1 = c$$

successive

$$x_1 = x_2 + \frac{1}{x_2},\ x_2 = x_3 + \frac{1}{x_3},\ \cdots x_{n-1} = x_n + \frac{1}{x_n},$$

so gelangt man zu der reziproken Gleichung 2^n ten Grades, deren Lösung auf quadratische Gleichungen führt. Diese Gleichung soll gesucht werden.

(177) v. SCHAEWEN XII, 362. —

34. $$x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 4x - 2 = 0.$$
(*339*) Educ. Times. XVIII, 505.

35. $$10x^2 - x^4 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})\,x.$$
(*47*) Educ. Times. XII, 37.

36. $$x^6 + (b\sqrt{x} - \sqrt{x^3})^4 - ax^2 = (b-x)^4 + x^4 - a.$$
(*518*) Educ. Times. XXIII, 52.

37. $$\sqrt{x^2+ax+1} + \sqrt{x^2+bx+1} + \sqrt{x^2+cx+1} = 0.$$
(*504*) Nyt Tidsskrift. XXII, 515.

38. $$\alpha(x^2 - px + q)^2 + \beta(x^2 + px + q)^2 = x^2.$$
(*514*) Journ. élém. XXIII, 51.

39. $$(x^3 - 3qx + p^3 - 3pq)^2 - 4(px+q)^3 = 0.$$
(*515*) Journ. élém. XXIII, 51.

40. $$3(xy+1)(x+y) = 16xy$$
$$9(x^2y^2+1)(x^2+y^2) = 100x^2y^2.$$
(*342*) Educ. Times. XVIII, 506.

b. Nicht reduzierbare Gleichungen.

41. In welchem Verhältnis stehen zwei Gröfsen a und b $(a < b)$, wenn jedes der Mittelglieder der Reihe $a,\ \frac{2ab}{a+b},\ \sqrt{ab},$

$\frac{a+b}{2}$, b das geometrische Mittel der beiden Nachbarglieder ist? Analoge Fragen.

(744) v. JETTMAR XIX, 33. XIX, 426.

42. $$x^3 = 10 \pm 9i\sqrt{3}$$

(*523*) Nyt Tidsskrift. XXIII, 196.

43. $$x^2 - y^2 = a^2,\ x^3 + 3xy^2 = b^3.$$

(*133*) Math. Visitor. XIII, 449.

44. $$x^2 + y = 11,\ x + y^2 = 7.$$

(*131*) Math. Visitor. XIII, 448.

45. $$2x^4 + x^3 + 9x^2 + 9x + 18 = 0.$$

(118) UNFERDINGER (Grun. Arch. XLII, 347) XI, 274. —

46. $$a(x-1)^4(x^2+1)^2 + bx^4 = cx^2.$$

(116) UNFERDINGER (*l. c.*) XI, 274. Nicht gelöst.

47. $$3(x^2+y^2) = 2xy(x+y)$$
$$xy(x+y) = 13.$$

(*130*) Math. Visitor. XIII, 447.

48. $$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{160} + \frac{9}{2}$$
$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x(x-y)} = \frac{1}{24}.$$

(*132*) Math. Visitor. XIII, 448.

49. $$2(x-y)^2[(x+y)^2+z^2] = z^4$$
$$\frac{3x(x+y)-z^2}{3y(x+y)-z^2} = \frac{4y-7}{7-4x}$$
$$4(x+y)z - z^2 = 16xy$$

unter der Bedingung zu lösen, dafs z eine ganze Zahl, x und y rational werden.

(*533*) Mathesis. XXIII, 354.

50. $$x^2(y+z) = a^3,\ y^2(z+x) = b^3,\ z^2(x+y) = c^3.$$

(*196*) Educ. Times. XV, 196.

51. $$yz(y+z-x) = a$$
$$zx(z+x-y) = b$$
$$xy(x+y-z) = c.$$

(*260*) Educ. Times. XVI, 431.

52.
$$\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}=a$$
$$\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}=b$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c.$$

(858) Emmerich XX, 196. XX, 592.

53.
$$a(xy+yz+zx)=xyz$$
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=2xyz(x+y+z)$$
$$a(x+y+z)^2=4xyz.$$

(*348, 525*) Journ. élém. XIX, 35; XXIII, 197.

54.
$$xy+yz+zx=47$$
$$x(-x+y+z)+y(x-y+z)+z(x+y-z)=44$$
$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{65}{42}.$$

(*526*) Educ. Times. XXIII, 197.

55.
$$(x+\lambda)(y+\lambda)(z+\lambda)=a_1$$
$$(x^2+\lambda^2)(y^2+\lambda^2)(z^2+\lambda^2)=b_1$$
$$(x^3+\lambda^3)(y^3+\lambda^3)(z^3+\lambda^3)=c_1.$$

(870) Emmerich XX, 349. XXI, 107.

56.
$$x^2+2yv+2zu=a$$
$$y^2+2zx+2uv=b$$
$$z^2+2uy+2vx=c$$
$$u^2+2vz+2xy=d$$
$$v^2+2xu+2yz=e.$$

Wie heifst das allgemeine Gleichungssystem, das auf demselben Wege gelöst werden kann?

(770, 970) Fuhrmann, Hahn XIX, 189, XXI, 428.
XIX, 588, XXII. 190.

---

57. Die Bedingung dafür, dafs einem Kreise vom Radius r ein Fünfeck eingeschrieben werden kann, das zugleich einem Kreise vom Radius ϱ umgeschrieben ist:

$$\varrho(r+c)\sqrt{2r}=\varrho(r+c)\sqrt{r-c-\varrho}+(r-c)(r+c+\varrho\sqrt{r+c-\varrho},$$

wo c die Zentrale bezeichnet, wird in folgender Weise erfüllt: Von den drei reellen Wurzeln der Gleichung

$$\varepsilon^3-12\varepsilon+\frac{11r^2-27c^2}{r^2}=0$$

sei ε' diejenige, die mehr als die Einheit beträgt; dann ist

$$\varrho = \frac{3\,(r^2 - c^2)}{2\,(\varepsilon' - 1)\,r}.$$

(827) Schlömilch XX, 32. XX, 423.

c. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen.

58. Wenn identisch $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$, wo die einzelnen Glieder eine als Unbekannte zu betrachtende Gröfse enthalten, so fällt die Auflösung der irrationalen Gleichung

$$\sqrt[3]{\varphi_1} + \sqrt[3]{\varphi_2} + \sqrt[3]{\varphi_3} = 0$$

mit den Auflösungen der Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ zusammen.

(575) Valta XVII, 110. XVII, 518.

59. Wenn identisch $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0$, so fallen unter denselben Voraussetzungen wie bei der vorigen Aufgabe die Auflösungen der Gleichung

$$\sqrt[3]{\varphi_1} + \sqrt[3]{\varphi_2} + \sqrt[3]{\varphi_3} + \sqrt[3]{\varphi_4} = 0$$

mit denen von $\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} + \frac{1}{\varphi_3} + \frac{1}{\varphi_4} = 0$ zusammen.

(576) Valta XVII, 110. XVII, 518.

60. Bezeichnet man $1 + \frac{27c^2}{2b^3}$ mit α, so kann die Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ in folgender Form geschrieben werden:

$$x = \sqrt{\frac{b}{6}(\alpha + 1)}\left\{1 - \frac{2}{\sqrt[3]{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} + 1}\right\} - \frac{3c}{2b}.$$

(1160) Teege XXIII, 591. XXIV, 341.

61. Welche Bedingung mufs zwischen den Koeffizienten der kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ bestehen, wenn eine ihrer Wurzeln a) das arithmetische, b) das geometrische, c) das harmonische Mittel zwischen den beiden anderen sein soll? Wie findet man nachher die Wurzeln?

(69) Schlömilch IX, 435. X, 266.*)

62. Angenommen die Wurzeln der Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ bilden eine arithmetische Reihe; wie heifst deren Anfangsglied und Differenz?

(*516*) Journ. élém. XXIII, 52.

---

*) Vergl. den Aufsatz von Bardey „Über Gleichungen, deren Wurzeln eine arithmetische oder geometrische Reihe bilden“ X 333, Nachtrag XI 25.

63. a so zu bestimmen, dafs die Gleichung $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + a = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat.

(*349*) Mathesis. XIX, 35.

64. Die Gleichung $x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 48x - 48 = 0$ ohne kubische Resolvente aufzulösen und das Merkmal anzugeben, an welchem man bei Gleichungen dieser Art die Auflösbarkeit auf einfacherem Wege erkennt.

(15) Binder V, 369. — Vergl. V, 332, § 6.

65. Unter welcher Bedingung kann man die Gleichung $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ in die Form $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + p(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + q = 0$ bringen?

(*123*) Journ. élém. XIII, 445.

66. Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln der Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, so soll die Resolvente, welche die Wurzel $x_1x_2 + x_3x_4$ hat, durch einfache Potenzierung dieser Wurzel gefunden werden, d. h. es soll die dritte Potenz dieser Wurzel linear und ganz durch ihre zweite und erste und die Koeffizienten der Gleichung ausgedrückt werden.

(507) Schumacher XVI, 274. XVII, 23.*)

67. Gesetzt die in der vorigen Aufgabe genannte Resolvente reduziere sich auf $z^3 - 1 = 0$. Man soll a) die Koeffizienten b, c, d als Funktionen von a bestimmen, b) die Gleichung für $a = 2$, $a = 0$ auflösen.

(772) Schumacher XIX, 272. XX, 27.

68. Gegeben $x - y = a$ und $xy = b$. Man soll $x^n - y^n$ als Funktion von a und b für einen ganzen positiven Wert von n ausdrücken.

(*128*) Journ. élém. XIII, 447.

69. Es sei $a + b + c = 0$ und $a^n + b^n + c^n$ werde mit S_n bezeichnet. Man soll $S_4, S_5, \cdots S_{10}$ vermittelst S_2 und S_3 ausdrücken.

(*602*) Journ. élém. XXIV, 461.

70. Es sei $a + b + c + d = 0$ und $a^n + b^n + c^n + d^n$ werde mit S_n bezeichnet. Man soll S_5 und S_6 vermittelst S_2, S_3 und S_4 ausdrücken.

(*603*) Journ. élém. XXIV, 462.

---

*) Aufl. Z. 2 lies $x_3 + x_4 = \eta_1$; Z. 1 v. u. lies $+ (c^2 + a^2d - 4bd)$.

71. Unter welcher Bedingung ist

$$f(x) = x^{mn} - x^{(m-1)n} + x^{(m-2)n} - \cdots + (-1)^m$$

durch

$$f_1(x) = x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - \cdots + (-1)^m$$

teilbar?

(1085) EMMERICH XXII, 596. XXIII, 349.

72. Die Gleichung $\sqrt{\varphi_1} + \sqrt{\varphi_2} + \sqrt{\varphi_3} + \cdots + \sqrt{\varphi_n} = 0$, wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$ rationale Funktionen sind, zu rationalisieren, so dafs das Resultat in Gestalt einer annullierten Determinante erscheint.

(911) STOLL XX, 594. XXI, 351, 593.

73. Wenn $f(x) = 0$ eine algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten ist und $f(0)$, $f(1)$ ungerade Zahlen sind, so hat die Gleichung keine Lösung in ganzen Zahlen.

(912) BEYENS XX, 594. XXI, 352.

---

§ 4. Algebraische Ungleichungen.

1. Bezeichnet g das geometrische, h das harmonische Mittel zwischen den positiven Gröfsen a und b, so ist einerseits

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} > a + b - 4g\sin(45^0 - \tfrac{1}{4}\gamma)^2$$

und andrerseits

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} < a + b - h\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2.$$

Man verlangt eine Deduktion dieser, bei der Ermittelung mancher Grenzwerte recht brauchbaren Ungleichungen.

(415) SCHLÖMILCH XV, 440, 529. XVI, 114.

2. Aus dem bekannten Satze, dafs das geometrische Mittel zweier positiven Zahlen weniger beträgt als deren arithmetisches Mittel folgt unmittelbar bei positiven a, b, α, β

$$\sqrt{(a+\alpha)(b+\beta)} < \tfrac{1}{2}(a+b) + \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta);$$

das Gegenstück hierzu bildet die Ungleichung

$$\sqrt{(a+\alpha)(b+\beta)} > \sqrt{ab} + \sqrt{\alpha\beta},$$

von welcher eine Deduktion gegeben werden soll.

(485) SCHLÖMILCH XVI, 204. XVI 496, XVII, 446.

3. Die gröfsten und kleinsten Werte von

$$M = x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

zu bestimmen, wenn $x > 0$ ist.

(374) SCHLÖMILCH XV, 194. XV, 516.

4. Welcher Spielraum mufs dem positiven echten Bruche ε angewiesen werden, wenn die Ungleichung $\sqrt{1 + x^4} > 1 - 2\varepsilon x + x^2$ für alle positiven x bestehen soll?

(210) SCHLÖMILCH XIII, 124. XIV, 27.

5. Warum ist

$$x \geqq \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(1 + x^2 + y^2)^2 - x^2}},$$

wenn x und y^2 positive Gröfsen sind?

(1211) STEINERT XXIV, 344. XXV, 114.

6. Es soll bewiesen werden, dafs für $\alpha > \beta > 0$ und bei ganzen positiven n der Wert des Quotienten $\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$ zwischen $\frac{n+1}{n}\alpha$ und $\frac{n+1}{n}\beta$ enthalten ist.

(1088) SCHLÖMILCH XXIII, 49. XXIII, 423.

7. Ist $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$, so ist

$$\text{a) } \frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) \geqq \left(\frac{1}{n}a\right)^2,$$

$$\text{b) } \frac{1}{n}\left(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3\right) \geqq \left(\frac{1}{n}a\right)^3.$$

(669) SZIMÁNYI XVIII, 197. XVIII, 593.

8. Das arithmetische Mittel aus n nicht sämtlich gleichen positiven Zahlen ist gröfser als ihr geometrisches Mittel.

(552) SIMON XVI, 503. XI 361, XVII, 356.

9. Vermittels Differentialrechnung ist leicht zu finden, dafs die Funktion $\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + x - \sqrt[n]{1 + x^n}\right)$ für $x = 1$ ihr Maximum $2 - \sqrt[n]{2}$ erreicht, dafs also für jedes positive, von der Einheit verschiedene x die Ungleichung besteht

$$1 + x - \sqrt[n]{1 + x^n} < \left(2 - \sqrt[n]{2}\right) x,$$

aus welcher für $x = \frac{b}{a}$ folgt:

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} > a + b - \left(2 - \sqrt[n]{2}\right)\sqrt{ab} \; (a \lessgtr b).$$

Bei Untersuchungen über Grenzwerte läfst sich diese Relation nicht selten vorteilhaft benutzen und es ist daher eine elementare Herleitung derselben zu wünschen.

(330) Schlömilch XIV, 597. XV, 282.

10. Es sollen die Maxima und Minima der Funktionen

$$a)\ y = \frac{A + Bx}{a + bx + cx^2}$$

und

$$b)\ y = (A + Bx)\ (a + bx + cx^2)$$

ermittelt werden und zwar auf elementarem Wege blofser Transformationen der genannten Ausdrücke:

(1125) Schlömilch XXIII, 351. XXIV, 98.

II. Zahlentheorie.

§ 5. Teilbarkeit.

1. Eine Zahl ist durch 7 teilbar, wenn der Unterschied ihrer doppelten Einer und der ihnen voranstehenden Zahl durch 7 teilbar ist.

Zerlang II, 337.

II, 337. Verallg. von Dickstein IV, 404 und Masing IV, 407.

2. $2^{2n} - 1$ ist stets durch 3 ohne Rest teilbar.

(539) Haag XVI, 430. XVII, 278.

3. Zwischen der Einerziffer jeder dekadischen Zahl und der Einerziffer ihres Kubus besteht die Alternative, dafs beide Endziffern entweder übereinstimmen oder einander zu 10 ergänzen Wie erklärt sich dies?

(748) Schlömilch XIX, 97. XIX, 500 (Verallgemeinerung).

4. Die Summe von drei aufeinander folgenden Kubikzahlen ist immer durch das Dreifache der mittleren Zahl und durch 9 teilbar.

(*207*) Journ. élém. XV, 199.

5. Ist n eine beliebige ganze Zahl, so ist $n(n + 2)(5n - 1)(5n + 1)$ immer durch 24 teilbar.

(*624*) Mathesis. XXIV, 467.

6. Ist n irgend eine ganze Zahl, so ist $n^5 - n$ durch 30 teilbar, und wenn n ungerade ist, durch 240.

(*204*) Educ. Times. XV, 198.

7. Ist n irgend eine ganze durch 3 nicht teilbare Zahl, so ist $n^{13} - n$ durch $2^{13} - 2$ teilbar.

(1084) Emmerich XXII, 596. XXIII, 348.

8. Die Summe von 20 aufeinander folgenden Potenzen einer positiven oder negativen ganzen Zahl ist durch 10 teilbar.

(872) Emmerich XX, 350. XXI, 109.

9. Alle Primzahlen aufser 2 und 5 gehen auf in einer der Zahlen von der Form $\sum_0^n 10^i$.

(1118) Hillebrecht XXIII, 271. XXIV, 16.*)

10. a) Wird eine dreistellige Zahl zweimal nacheinander hingeschrieben, so ist die entstandene sechsstellige Zahl durch 7, 11, 13 ohne Rest teilbar. b) Nimmt man statt der dreistelligen Zahl eine vierstellige, so läfst sich die entstandene achtstellige Zahl durch 73 und 137 aufdividieren. c) Wird eine zweistellige Zahl viermal nacheinander gesetzt, so ist die entstandene achtstellige Zahl durch 73, 101, 137 teilbar.

(1116) Schlömilch XXIII, 270. XXIV, 14 (Zusätze).

11. Lautet die ganze Zahl a mit umgekehrter Zifferfolge b, so ist bekannt, dafs $a - b = d$ stets, $a + b = s$ aber nur dann durch 9 ohne Rest teilbar ist, wenn dies mit a der Fall ist. Giebt es eine ähnliche Regel für die Teilung durch 11 und welche?

(1190) Sievers XXIV, 190. XXIV, 606.

12. Setzt man aus den Ziffern einer Zahl a eine neue Zahl b beliebig zusammen, so ist $a - b = d$ immer durch 9 teilbar, $a + b = s$ nur dann, wenn a durch 9 teilbar ist. Wie heifst die analoge Regel für die Zahl 11?

(1274) Dörr XXV, 191. XXV, 587.

13. Bildet man aus den Ziffern der Zahl a zwei neue Zahlen b und c, wobei man diesen Ziffern 0, 9, sowie Ziffern, deren Summe 9 oder ein ganzes Vielfaches von 9 ist, beifügen oder entziehen und auch derartige Zifferngruppen zu einer beliebigen Zifferngruppe addieren oder davon subtrahieren kann, so ist $b - c = d$ immer, $b + c = s$ nur gleichzeitig mit a durch 9 teilbar. Es ist die entsprechende Regel für 11 anzugeben.

(1275) Dörr XXV, 192. XXV, 588.

---

*) 2. Bew. Z. 2 lies $10^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p$ und $9\sum^{p-1} 10^n \equiv 0 \bmod p$.

14. a) Permutiert man in einer ganzen Zahl a die 3., 6., 9., u. s. w. Stelle, ohne daſs die dazwischen liegenden Klassen von 2 Stellen (die höchste Klasse kann auch nur eine Stelle besitzen) ihren Platz verändern, so geben alle auf diese Art erhaltenen Zahlen bei der Division durch 37 denselben Rest. b) Ebenso die Zahlen, die man erhält, wenn man in einer der obigen Zahlen die 3., 6., 9., u. s. w. Stelle an ihrem Platze läſst und nur die zweizifferigen Klassen unter einander vertauscht. So geben 372 563, 572 363, 363 572, 563 372 bei der Division durch 37 denselben Rest. Ebenso 1 327 634, 1 627 334, 27 601 334 u. s. w. Man gebe den Grurd davon an. c) Läſst sich ein ähnliches Gesetz auch allgemein für die $m$te, $2m$te, $3m$te, u. s. w. Stelle aufstellen? Für die Division durch welche Zahlen?

(1276) Haas XXV, 192. XXVI, 18.

15. Man teile eine ganze Zahl a von rechts nach links in Klassen von je drei Ziffern. (Die höchste Klasse kann auch weniger Ziffern haben, doch sind die leeren Stellen bei der folgenden Operation durch Nullen auszufüllen.) Dann bilde man die Zahl b, indem man die niedrigste Klasse von a aufschreibt, rechts von ihr die vorletzte Klasse von a u. s. w. Die Summe von a und b sei s, ihre Differenz sei d. Z. B. $a = 1\,365\,873$, $b = 873\,365\,001$, $s = 874\,730\,874$, $d = 871\,999\,128$. Man gebe nun an, unter welchen Bedingungen s, bez. d durch 37 oder 27, unter welchen Bedingungen durch 77, 91, 143 teilbar ist.

(1285) Haas XXV, 278. XXVI, 25.

16. Man teile eine ganze Zahl a von rechts nach links in Klassen von je n Ziffern. (Die höchste Klasse kann auch weniger Ziffern haben, doch sind die leeren Stellen bei der folgenden Operation durch Nullen auszufüllen.) Dann bilde man die Zahl b, indem man mit der niedrigsten Klasse von a (links) beginnt, dann die nächst höhere Klasse von a aufschreibt u. s. w. Es sei $a + b = s$, $a - b = d$. Man untersuche die Teilbarkeit von s und d bezüglich $10^n - 1$ (und dessen Teiler) und bezüglich $10^n + 1$ (und dessen Teiler).

(1286) Haas XXV, 278. XXVI, 26.

17. Man teile eine ganze dekadische Zahl von rechts nach links in Klassen von n Stellen. (Die oberste Klasse kann auch weniger Stellen enthalten.) Dann bilde man die Summe dieser Klassen (als Zahlen für sich betrachtet) und subtrahiere sie von der ursprünglichen Zahl. Den Rest teile man wieder in Klassen von n Stellen; man streiche nun eine dieser Klassen weg und bilde die Summe aller übrigen Klassen. Wie kann man, ohne

die ursprüngliche Zahl zu kennen, aus der Summe der übrigen Klassen die weggestrichene Zahl erraten?

(1287) HAAS XXV, 278. XXVI, 27.

---

18. Ist z eine beliebige ganze positive Zahl und stellt man z dar in der Form

$$z = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0,$$

wo $a_n, a_{n-1}, \cdots$ ganze positive Zahlen $< p$ bedeuten, so ist die höchste Potenz von p, durch welche $z!$ teilbar ist, die $\frac{z-q}{p-1}$te, wobei $q = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ ist.

(1076) ZÜGE XXII, 512. XXIII, 269.

19. Bezeichnen k und n ganze und positive Zahlen, so ist $\frac{k-1}{n+1}\binom{kn}{n}$ immer eine ganze Zahl; insbesondere ist daher $\binom{2n}{n}$ jederzeit durch $n+1$ ohne Rest teilbar.

(542) SCHLÖMILCH XVI, 430. XVII, 281.

20. Das letzte Resultat folgt auch aus der für ganze positive n gültigen Summenformel $\sum\limits_{0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Folgerung: Das arithmetische Mittel aus den Quadraten aller Binomialkoeffizienten ist immer eine ganze Zahl.

(1089) SCHLÖMILCH XXIII, 49. XXIII, 424.

21. Die eben erwähnte Folgerung läſst sich auf eine Eigenschaft der Koeffizienten zurückführen, die in der Entwickelung $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \cdots$ vorkommen. — Nicht ohne Interesse dürfte nun die Frage sein, ob der genannte Satz auch dann noch gilt, wenn die Quadrate der Binomialkoeffizienten durch höhere Potenzen derselben ersetzt werden. Aus Zahlenproben (s. XXIII, 424) scheint hervorzugehen, daſs der Satz nicht für ungerade, wohl aber für gerade Potenzen richtig bleibt.

(848) SCHLÖMILCH XX, 116. Nicht gelöst.

22. Der Quotient $\left[\binom{n}{k}-1\right]\left[\binom{n}{k}+1\right] : (n+1)$ geht für $k=0$ in 0, für $k=1$ in $n-1$ über, wird also in beiden Fällen zu einer ganzen Zahl, wenn n eine solche ist. Auch zeigt sich an Beispielen, daſs es mehrere ganze positive Werte von n giebt, bei welchen alle folgenden Quotienten

$$\left[\binom{n}{2}-1\right]\left[\binom{n}{2}+1\right] : (n+1),\ \left[\binom{n}{3}-1\right]\left[\binom{n}{3}+1\right] : (n+1), \cdots$$

gleichfalls ganze Zahlen sind. Es soll nun das Bildungsgesetz derjenigen n bestimmt werden, für welche obiger Quotient jedesmal eine ganze Zahl wird, sobald k eine positive ganze Zahl $< n$ bezeichnet.

(871) SCHLÖMILCH XX, 349. XXI, 108.

---

§ 6. Dezimalbrüche.

1. Es sollen diejenigen echten Brüche ermittelt werden, deren Verwandlung in einen Dezimalbruch zu einer Periode führt, die unmittelbar hinter dem Komma beginnt und deren Ziffern eine arithmetische Progression bilden.

(1106) SCHLÖMILCH XXIII, 194. XXIII, 584.

2. Es sollen alle Brüche von der Form $\frac{1}{N}$ angegeben werden, deren Periode $2k$ Stellen enthält, so daſs die 1te und die $(k+1)$te, die 2te und die $(k+2)$te Stelle u. s. w. sich zu 9 ergänzen. Beispiel: $\frac{1}{7}$.

(152) SCHLÖMILCH XII, 111. XII, 431.

3. a) Ist Q eine Primzahl und $\frac{P}{Q}$ gleich einem Dezimalbruch, dessen Periode q Stellen hat, so ist $\frac{A}{Q^n}$ im allgemeinen gleich einem Dezimalbruch, dessen Periode $q \cdot Q^{n-1}$ Stellen hat. Einzige Ausnahme $\frac{A}{3^n}$ mit 3^{n-2} stelliger Periode. b) Ist Q eine Primzahl von der Form $2^n + 1$, wobei $n > 3$ vorausgesetzt wird, so ist $\frac{P}{Q}$ gleich einem Dezimalbruch, dessen Periode $Q - 1$ Stellen hat.

(791) SIEVERS XIX, 347. XX, 188.

4. Denjenigen gemeinen Bruch mit kleinstem Nenner zu suchen, der nach der Verwandlung in einen Dezimalbruch auf 5 Stellen genau $= 0{,}39062$ ist.

Leipziger Tageblatt. XVIII, 604.

---

§ 7. Kettenbrüche.

1. Verwandelt man zwei Brüche, deren Summe 1 ist, in einfache Kettenbrüche, so enthält der gröſsere von beiden ein Glied mehr als der kleinere.

(426) SIEVERS XV, 523. XVI, 195.

2. Wieviel Glieder hat ein einfacher Kettenbruch, welcher gleich dem gewöhnlichen echten Bruch $\frac{p}{q}$ ist, höchstens?

(427) SIEVERS XV, 523. XVI, 195.*)

3. Die allgemeine Form desjenigen einfachen Kettenbruches anzugeben, unter dessen Näherungswerten sich drei aufeinander folgende befinden, a) deren Zähler, b) deren Nenner in arithmetischer Progression wachsen.

(613) EMMERICH XVII, 366. XVIII, 130.**)

4. Die allgemeine Form desjenigen einfachen Kettenbruches anzugeben, unter dessen Näherungswerten sich zwei aufeinander folgende $\frac{z_{i-1}}{n_{i-1}}, \frac{z_i}{n_i}$ befinden, für welche $n_{i-1} - z_{i-1} = n_i - z_i$ ist.

(614) EMMERICH XVII, 366. XVIII, 131.

5. Es soll das Bildungsgesetz für denjenigen einfachen Bruch gefunden werden, der seinem Werte nach zwischen zwei bestimmten aufeinander folgenden Näherungswerten eines gegebenen einfachen Kettenbruches liegt und dabei einen möglichst kleinen Nenner besitzt.

(1126) FISCHER XXIII, 351. XXIV, 99.

---

§ 8. Unbestimmte Analytik.

a. Aufgaben I. Grades.

1. Auf wieviele und welche Arten kann man 100 süddeutsche Gulden in Kronenthalern à 2,7 Gulden und preufsischen Thalern à 1,75 Gulden ausbezahlen?

(23) BAUER VI, 62. — (1 Lösung).

2. Unter drei Kategorieen von Personen, zusammen 100, werden 100 ℳ in der Weise verteilt, dafs jede Person der ersten Kategorie 4 ℳ, jede der zweiten 0,50 ℳ und jede der dritten 0,25 ℳ erhält. Aus wieviel Personen besteht jede Kategorie?

(24) BAUER VI, 62. — (5 Lösungen).

3. Eine vierzifferige Zahl ist durch 7 und 37 teilbar. Multipliziert man die Zahl mit 32 und dividiert das Produkt durch 29, so ist der Rest der Division gleich 24. Wie heifst die Zahl?

(*539*) Nyt Tidsskrift. XXIII, 355.

---

*) 1. Aufl. Z. 2 lies $r_{n-2} = r_{n-1}\, a_n + 1$, Z. 12 lies: Division von q durch p.

**) Aufl. Z. 6 lies $z_{i+2} = z_{i+1}\, a_{i+2} + z_i$.

4. Drei aufeinander folgende ganze Zahlen zu finden, die bezw. durch 7, 9, 11 teilbar sind.
(*537*) Mathesis. XXIII, 355.

5. Drei in arithmetischer Progression stehende Zahlen zu finden, die bezw. durch 4, 5, 7 teilbar sind.
(*538*) Mathesis. XXIII, 355.*)

6. Von einer arithmetischen Progression sei die Gliederzahl n und die Summe s gegeben. Man bestimme das Anfangsglied x und die Differenz y, und zwar sollen n, s, x, y ganze Zahlen sein.
(143) SCHLÖMILCH XII, 37. XII, 361.

7. Wieviel positive ganzzahlige Lösungen einschl. der Null hat die Gleichung $x + y + z = k$, wo k eine positive ganze Zahl ist?
(57) v. SCHAEWEN IX, 285. IX, 433.

8. Wieviel positive ganzzahlige Lösungen einschl. der Null haben die $k + 1$ Gleichungen

$$x + y + z = 0,\; x + y + z = 1, \cdots x + y + z = k,$$

wo k eine positive ganze Zahl ist?
(58) v. SCHAEWEN IX, 285. IX, 434.

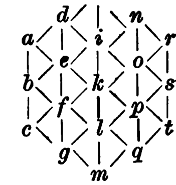
9. Wie zeigt man, dafs der Gleichung

$$30x_1 + 42x_2 + 70x_3 + 105x_4 = 10537$$

22100 positive ganzzahlige Lösungen genügen?
(59) v. SCHAEWEN IX, 285. IX, 434.

10. Wenn in einem Jahre, dessen Sonnenzirkel 19, dessen goldene Zahl 6 und dessen Römerzinszahl 14 ist, die Frühlings-Tag- und Nachtgleiche am 20. März 5 Uhr nachmittags nach dem Kalender neuen Stils eingetreten ist und die Länge des tropischen Jahres 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 46,08 Sekunden beträgt, wann mufs sie in demjenigen Jahre eingetreten sein, dessen obengenannte chronologische Merkmale sämtlich 1 sind?
(694) FLEISCHHAUER XVIII, 357. XIX, 92.

11. An Stelle der in das nebenstehende Sechseck eingeschriebenen Buchstaben sind die Zahlen von 1 bis 19 so zu setzen, dafs die Summe der auf einer und derselben geraden Linie stehenden Zahlen, gleichviel ob sie aus drei, vier oder fünf Gliedern zusammengesetzt ist, nach allen Richtungen hin gleich 38 ist.



(795) v. HASELBERG XIX, 429. XX, 263.

---

*) Aufl. Z. 3 lies $24y - 28\alpha$.

b. Aufgaben II. oder höheren Grades.

12. Neun aufeinander folgende Zahlen sind in folgender Weise in ein Quadrat gestellt:

$$\begin{vmatrix} n-4, & n+2, & n-2 \\ n-1, & n, & n+4 \\ n+3, & n-3, & n+1 \end{vmatrix}$$

Man soll n so bestimmen, dafs der Wert der Determinante eine Quadratzahl ist.

(*622*) Mathesis. XXIV, 466.

13. In welchen beiden regelmäfsigen Vielecken verhalten sich die Winkel wie die Anzahlen der Ecken?

(1242) Sievers XXIV, 609. XXV, 348.

14. Die Zahl 45 in vier solche Teile zu zerlegen, dafs der erste vermehrt um eine gewisse Zahl, der zweite vermindert um dieselbe Zahl, der dritte multipliziert mit derselben Zahl und der vierte dividiert durch diese Zahl dasselbe Resultat geben.

(*351*) Mathesis. XIX, 36.

15. In einer fünfzifferigen Zahl ist die mittelste Ziffer harmonisches Mittel zwischen der ersten und letzten, und arithmetisches Mittel zwischen den beiden anderen Ziffern. Ferner ist die Zahl um 35937 kleiner als die mit denselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge geschriebene Zahl. Wie heifst dieselbe?

(*540*) Nyt Tidsskrift. XXIII, 356.

---

16. 1 ist die einzige figurierte Zahl zweiter Ordnung, welche gleich der Summe der Quadrate zweier aufeinander folgender ganzer Zahlen ist.

(*205*) Nouv. Ann. XV, 198.

17. 10 ist die einzige figurierte Zahl zweiter Ordnung, welche gleich der Summe der Quadrate zweier aufeinander folgender ungerader Zahlen ist.

(*206*) Nouv. Ann. XV, 198.

18. Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Differenz eine gegebene Kubikzahl n^3 ist.

(*616*) Mathesis. XXIV, 464.

19. Drei Quadratzahlen so zu bestimmen, dafs das Verhältnis ihrer Summe zu ihrem Produkt ein vollständiges Quadrat ist.

(*137*) Math. Visitor. XIII, 450.

20. Drei Quadratzahlen zu finden, die eine arithmetische Reihe bilden.

(*617*) Mathesis. XXIV, 465.

21. Drei aufeinander folgende Binomialkoeffizienten, $\binom{n}{p}$, $\binom{n}{p+1}$, $\binom{n}{p+2}$ zu finden, die eine arithmetische Reihe bilden.

(*618*) Mathesis. XXIV, 465.

22. Vier aufeinander folgende Binomialkoeffizienten zu finden, welche eine arithmetische Proportion bilden. Eine arithmetische Reihe können sie nicht bilden.

(*619*) Mathesis. XXIV, 465.

23. Drei aufeinander folgende Binomialkoeffizienten können nicht eine geometrische Reihe bilden.

(*620*) Mathesis. XXIV, 466.

24. Von drei aufeinander folgenden Binomialkoeffizienten kann der mittlere auch nicht das harmonische Mittel der beiden anderen sein.

(*621*) Mathesis. XXIV, 466.

25. Drei positive Unbekannte x, y, z, deren Summe s gegeben ist, sollen so bestimmt werden, dafs sie eine harmonische Proportion bilden und zugleich rationale Bruchteile von s ausmachen.

(504) Schlömilch XVI, 274. XVI, 592.

26. Ein Dreieck besitze den gegebenen Umfang s und die unbekannten Seiten x, y, z, für welche die Reihenfolge $x < y < z$ gelten möge; es sollen nun die Seiten so bestimmt werden, dafs sie entweder eine arithmetische oder eine geometrische oder eine harmonische Proportion bilden. In allen Fällen verlangt man rationale Werte von x, y, z.

(1181) Schlömilch XXIV, 189. XXIV, 602.

27. $x^2 + y^2 = (x - y)^3$ in ganzen Zahlen zu lösen.

(*541*) Mathesis. XXIII, 356.

28. Sämtliche positive ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 = (x - y)^4$ aufzusuchen.

(796) Emmerich XIX, 429. XX, 264.

---

29. Bei welchen Vielecken ist die Anzahl der Diagonalen ein Quadrat?

(*352*) Mathesis. XIX, 36.

30. Dreiecke anzugeben, deren Seiten drei aufeinander folgende ganze Zahlen sind und deren Flächeninhalt rational ist.

(346) v. Schaewen XV, 38. XV, 348.
(1191) Bosse XXIV, 190. XXIV, 607.

31. Diejenigen Dreiecke aufzusuchen, deren Seiten eine arithmetische Progression von gegebener Differenz bilden und deren Flächen rationale Zahlen sind.

(458) Schlömilch XVI, 25. XVI, 347.

32. Eine Zahl zu finden, die sowohl gleich der Summe der Quadrate von zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen als auch gleich der Summe der Quadrate von drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist.

(*77*) Nouv. Ann. XII, 268.

33. Eine positive Zahl zu finden, die sowohl gleich dem Produkt von zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen als auch gleich dem von drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist.

(*138*) Nouv. Ann. XIII, 451.

34. Eine Zahl zu finden, die sowohl selbst wie auch ihre vierte Potenz gleich der Summe der Quadrate von zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist.

(*76*) Nouv. Ann. XII, 268.

---

35. Drei gemischte Zahlen $a + p$, $a_1 + p_1$, $a_2 + p_2$, wo a die Ganzen und p die Brüche sind, so zu bestimmen, dafs $(a + p)(a_1 + p_1)(a_2 + p_2) = (a + p) + (a_1 + p_1) + (a_2 + p_2) + a a_1 a_2 + p p_1 p_2$ ist.

(296) Harmuth XIV, 270. XV, 30.

36. S_α sei die Summe der ersten α ungeraden Zahlen, S_β die Summe der darauf folgenden β ungeraden Zahlen und S_γ die Summe der auf diese folgenden γ ungeraden Zahlen. Es sollen nun α, β, γ so bestimmt werden, dafs $S_\alpha S_\beta = S_\gamma$ ist.

(*263*) Mathesis. XVI, 432.

37. Kann man für p und q solche Werte finden, dafs die Wurzel $\sqrt{3q^3 : (4p^3 - q^3)}$ rational wird?

(1140) Niseteo XXIII, 431. XXIV, 187.

38. Zu beweisen, dafs die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ für keine ganze Zahl $z < 10^6$ in ganzen Zahlen zu befriedigen ist.

(1077) Schumacher XXII, 512.
XXIII, 269, 417; XXIV, 272 u. XXV, 350.

c. **Zahlenanalytik.**

39. Welche Zahl endigt mit 2 und wird dadurch verdoppelt, dafs man die 2 rechts abschneidet und vorn links wieder ansetzt? Verallgemeinerung.

Aus Bardey's Aufgabensammlung Kap. XXII.

VI, 63; XXVII, 491.

40. Eine Zahl zu suchen, aus welcher durch Versetzung der 1. Stelle hinter die letzte oder auch der letzten Stelle vor die erste eine 2. Zahl dergestalt entsteht, dafs jene erste durch die zweite dividiert einen ganzzahligen Quotienten giebt.

Leipziger Tageblatt. XVIII, 603.

41. Gesucht wird die Zahl N, die durch zyklische Vertauschung der Ziffern der Reihe nach in ihr 3-, 2-, 6-, 4- und 5-faches übergeht.

(1046) Dorn XXII, 351. XXIII, 116.

42. Alle zweizifferigen Zahlen zu finden, welche die Eigenschaft haben, dafs ihr Verhältnis zu der durch Vertauschung ihrer (ungleichen) Ziffern entstehenden Zahl gleich dem Verhältnis $p:q$ zweier einzifferiger Zahlen ist.

Reidt II, 218. II, 218.

43. Diejenigen zweizifferigen Zahlen zu finden, welche die Eigenschaft haben, dafs, wenn man in ihren Quadraten die Ziffern der Einer und Hunderter vertauscht, man die Quadrate der in umgekehrter Reihenfolge geschriebenen Zahlen erhält.

(1338) Aus Mathesis XXV, 588. XXVI, 423.

44. Von welchen zwei Zahlen ist die Summe gleich der Quersumme des Produktes? Wie viele Lösungen giebt es?

(1127) Sievers XXIII, 351. XXIV, 99.

45. Zahlenpaare anzugeben, deren Summe und Produkt mit umgekehrten Ziffern geschrieben werden. Beispiele: 9 und 9, 24 und 3.

(1257) Sievers XXV, 49. XXV, 506.

46. Welche drei dreistelligen Zahlen bilden eine geometrische Proportion und gehen durch zyklische Vertauschung der Ziffern in einander über?

(960) v. Jettmar XXI, 353. XXII, 99.
(1273) Sievers XXV, 191. XXV, 586.

47. Welche n-stelligen Zahlen sind dem durch $n!$ dividierten Produkte gleich, dessen Faktoren erhalten werden, wenn man einmal die erste, dann die letzte Ziffer der Zahl wegstreicht?

(817) v. Schaewen XIX, 589. XX, 341.

48. Eine Zahl zu finden, die gleich der Summe der Ziffern ihres Kubus ist.

(*30_2*) Nouv. Ann. XI, 111.

49. Für welche Werte von x ist es möglich, die ersten $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ ganzen Zahlen nur mit Hülfe der Glieder der Reihe $1, x, x^2, \cdots x^n$ durch Addition und Subtraktion ohne Wiederholung zu bilden?

(1309) Tafelmacher XXV, 352. XXVI, 181.

III. Niedere Analysis.

§ 9. Einfachere Reihen.

a. Arithmetische Reihen.

1. Wie heifst die Reihe, in der für jeden Wert von n die Summe der n ersten Glieder gleich $4n^2$ ist?

(*354*) Journ. élém. XIX, 189.

2. Eine Reihe zu finden, so dafs für jeden Wert von n die Summe der n ersten Glieder gleich $n(an + b)$ ist.

(*353*) Mathesis. XIX, 189.

3. $S = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots \pm n(n + 1)$ zu berechnen.

(*625*) Journ. élém. XXIV, 468.

Summen von Quadrat- und Kubikzahlen.

4. Die Summe $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \cdots + n(2n + 1)$ zu berechnen.

(*264*) Mathesis. XVI, 432.

5. Die Differenz zwischen der Summe der Quadrate der n ersten geraden Zahlen und der Summe der Quadrate der n ersten ungeraden Zahlen ist $n(2n + 1)$.

(*357*) Mathesis. XIX, 190.

6. Die Summe der n ersten Quadratzahlen ist gleich dem sechsten Teil der Summe der $2n + 1$ aufeinander folgenden ganzen Zahlen, die mit n^2 anfangen.

(*266*) Mathesis. XVI, 433.

7. Die drei ersten Glieder einer Reihe sind 1, 7, 19 und das allgemeine Glied u_n ist eine ganze Funktion zweiten Grades

von n. Das Gesetz für die Reihe zu finden, die Reihe aufzustellen und die Summe der n ersten Glieder zu finden.

(*209*) Journ. élém. XV, 199.

8. In einer aus n Gliedern bestehenden arithmetischen Reihe, deren erstes Glied a und deren Differenz d ist, ist die $n$fache Summe der Quadrate der Glieder vermindert um das Quadrat der Summe der n Glieder unabhängig von a.

(*365*) Mathesis. XIX, 349.

9. Ist p relativ prim zu 6, so ist die Summe von p aufeinander folgenden Quadratzahlen teilbar durch p.

(*265*) Mathesis. XVI, 432.

10. $2n+1$ aufeinander folgende ganze Zahlen zu finden, so dafs die Summe der Quadrate der $n+1$ ersten dieser Zahlen gleich ist der Summe der Quadrate der n folgenden Zahlen.

(*78*) Journ. élém. XII, 269.

11. Die Reihe der ungeraden Zahlen wird so in Gruppen geteilt, dafs die erste Gruppe $\frac{1}{2}(1+1)$, die zweite $\frac{2}{2}(2+1), \cdots$ die $n$te $\frac{n}{2}(n+1)$ Zahlen enthält. Dann ist die Summe der Glieder der $n$ten Gruppe $\Sigma n \cdot \Sigma n^2$.

(*359*) Mathesis. XIX, 190.

12. Die Summe aller harmonischen Mittel zwischen denjenigen Zahlenpaaren, deren Summe n ist, zu berechnen.

(*409*) Educ. Times. XX, 512.

13. $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \cdot 7 - \cdots \pm (2n-1)\, 2n\, (2n+1)$ zu berechnen.

(1289) Niseteo XXV, 278. XXVI, 103.

14. Wie grofs ist das $n$te Glied der Reihe: 1, 3, 6, 10, 16, 24, 34, 46, 61, 79, 100, 124, 152, $\cdots$?

(714) Haag XVIII, 504. XIX, 263.

15. Werden die natürlichen Zahlen in folgender Weise geordnet: $1 + (2+3+4) + (5+6+7+8+9) + \cdots$, so ist der Wert irgend einer Gruppe gleich der Summe zweier aufeinander folgenden Kubikzahlen. Wie kann hiernach Σn^3 gefunden werden?

(*364*) Mathesis. XIX, 349.

16. $S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + (n-1)\, n^2$ zu berechnen.

(*134*) Journ. élém. XIII, 449.

17. $2^3 + 6^3 + 10^3 + \cdots + (4n - 2)^3 + 1$ ist ein Quadrat.
(*356*) Mathesis. XIX, 189.

18. Die Differenz zwischen dem Kubus der Summe und der Summe der Kuben der n ersten ungeraden Zahlen ist ein Quadrat.
(*358*) Mathesis. XIX, 190.

19. Die Summe der Kuben der n ersten ungeraden Zahlen ist gleich der Summe von n ungeraden aufeinander folgenden Zahlen.
(*355*) Mathesis. XIX, 189.

20. Die Summe der n^2 ganzen Zahlen, die auf die n ersten Zahlen folgen, ist doppelt so grofs wie die Summe der Kuben der n ersten Zahlen.
(*361*) Mathesis. XIX, 348.

21. Die Kubikzahlen werden so in Reihen geteilt, dafs in der ersten Reihe eine, in der zweiten 2, ··· in der $n$ten Reihe n Kubikzahlen stehen. Wie grofs ist die Summe der $n$ten Reihe?
(*410*) Journ. élém. XX, 513.

22. $1^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 4^2 + \cdots + n^2 (n + 1)^2$ zu berechnen.
(*630*) Journ. élém. XXV, 50.

23. Gegeben ist die Reihe $1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 13 + 7 \cdot 25 + 9 \cdot 41 + \cdots$ Es ist zu beweisen, dafs a) das allgemeine Glied die Differenz zweier Quadrate, b) die Summe der Reihe ein Quadrat ist; c) die Quadratwurzel aus der Summe gleich $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots$ ist, d) jedes Glied das Produkt zweier Zahlen ist, von denen die eine die Hypotenuse, die andere die kleinere Kathete eines Pythagoreischen Dreiecks darstellt; e) das um 1 vermehrte $n$te Glied durch $2n$, das um 1 verminderte durch $n - 1$ teilbar ist; f) alle Glieder ungerade Zahlen sind.
(*414*) Educ. Times. XX, 514.

---

24. Teilt man die Reihe der ungeraden Zahlen so in Gruppen, dafs die erste p^α, die zweite $2p^\alpha, \cdots$ die $n$te np^α Zahlen enthält, so ist die Summe der Glieder der $n$ten Gruppe $n^3 p^{2\alpha}$.
(*360*) Mathesis. XIX, 347.

25. Man teilt die Reihe der natürlichen Zahlen so in Gruppen, dafs die $n$te Gruppe p^n Zahlen enthält. Deren Summe ist dann $\frac{p^n (p^n - 1)(p + 1)}{2(p - 1)}$.
(*362*) Mathesis. XIX, 348.

26. Man teilt die Reihe der ungeraden Zahlen so in Gruppen, dafs die $n$te Gruppe p^n Zahlen enthält. Deren Summe ist dann $\frac{p^{n+1}(p^n + p^{n-1} - 2)}{p-1}$.

(*363*) Mathesis. XIX, 348.

b. **Geometrische Reihen.**

27. Auf dem einen Schenkel des spitzen Winkels α ist der Punkt A durch seine Entfernung a vom Scheitelpunkt gegeben. Fällt man nun von A auf den anderen Schenkel die Senkrechte AB, von B auf den ersten Schenkel die Senkrechte BC u. s. w., so ist $AB + BC + \cdots = a \cot \frac{\alpha}{2}$.

(761) Meinel XIX, 187. XIX, 584.

28. Gegeben sind die Summen der beiden fallenden geometrischen Reihen $s_1 = 1 + q_1 + q_1^2 + \cdots$ und $s_2 = 1 + q_2 + q_2^2 + \cdots$, gesucht wird die Summe $s_{1,2} = 1 + q_1 q_2 + (q_1 q_2)^2 + \cdots$

(*374*) Journ. élém. XIX, 511.

29. Man berechne die Summe der Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$ in inf. $+ \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots$ in inf. $+ \frac{1}{17} + \frac{1}{17^2} + \cdots$ in inf. $+ \frac{1}{4^n + 1} + \frac{1}{(4^n + 1)^2} + \cdots$ in inf.

(*373*) Journ. élém. XIX, 511.

30. In einem regelmäfsigen n-Eck sind alle Randdiagonalen gezogen, in dem hierdurch entstandenen regelmäfsigen n-Eck ebenso u. s w. in inf. Wie grofs ist die Summe aller Umfänge und aller Flächen?

(375) Sievers XV, 194. XV, 518.

31. In einem regelmäfsigen n-Eck sind alle Seiten in derselben Weise im Verhältnis $p : q$ geteilt und die Teilpunkte mit einander verbunden, in dem so entstandenen regelmäfsigen n-Eck ebenso u. s. w. in inf. Wie grofs ist die Summe aller Flächen und aller Umfänge?

(376) Sievers XV, 194. XV, 518.

32. Aus den Seiten $OA = a$ und $OB = b$ $(< a)$ ist das Rechteck $OACB$ konstruiert und von C die Senkrechte auf AB gefällt, welche OA in B_1 und die verlängerte BO in A_1 schneidet; ebenso ist aus OA_1 und OB_1 das Rechteck $OA_1C_1B_1$ gebildet,

von C_1 auf A_1B_1 das Lot gefällt, das A_1O in B_2 und B_1O in A_2 trifft; aus OA_2 und OB_2 sind analog die Punkte C_2, B_3, A_3 bestimmt u. s. w. in inf. Es soll nun erörtert werden, unter welchen Umständen die Summen $S_1 = OA + OA_1 + OA_2 + \cdots$, $S_2 = OB + OB_1 + OB_2 + \cdots$, $S_3 = AB_1 + A_1B_2 + A_2B_3 + \cdots$, $S_4 = BA_1 + B_1A_2 + B_2A_3 + \cdots$, $S_5 = OACB + OA_1C_1B_1 + OA_2C_2B_2 + \cdots$ endliche Werte besitzen und wieviel diese betragen.

(961) Schlömilch XXI, 354. XXII, 99.

---

33. Die Glieder der Reihe $u_1, u_2, u_3, \cdots u_{2n}$ haben die Eigenschaft, daſs, wenn man vier aufeinanderfolgende herausnimmt, das Produkt der beiden äuſseren gleich dem der mittleren ist. Gegeben sind nun die drei ersten Glieder u_1, u_2, u_3 (wo u_3 von u_1 verschieden ist); man soll die Summe S_{2n} der Reihe berechnen.

(*261*) Journ. élém. XVI, 431.

34. $u_1, u_2, u_3 \cdots u_n$ seien Glieder von der Eigenschaft, daſs jedes Glied gleich dem Produkt der beiden vorhergehenden ist. Ist nun P_n das Produkt der Glieder, so soll bewiesen werden, daſs $P_n = u_2\ P_{n-1}P_{n-2}$ ist, wobei u_1 und u_2 beliebig vorausgesetzt sind.

(*262*) Journ. élém. XVI, 432.

---

35. Folgende Reihen zu summieren:

$$\text{a)}\ 1 + 2^3a + 3^3a^2 + \cdots + n^3a^{n-1},$$
$$\text{b)}\ 1 + 2^4a + 3^4a^2 + \cdots + n^4a^{n-1}.$$

(702) Niseteo XVIII, 445. XIX, 179.

36. $s_1 = a + 3a^3 + 5a^5 + \cdots + (2n-1)\,a^{2n-1}$ zu berechnen.

(857) Niseteo XX, 196. XX, 591.

37. $s_2 = a + 3^2a^3 + 5^2a^5 + \cdots + (2n-1)^2\,a^{2n-1}$, sowie die analog gebildeten Summen s_3 und s_4 zu berechnen.

(959) Kiebel XXI, 353. XXII, 98.

38. Die n ersten Glieder der Reihe $1 + 5 + 13 + 29 + 61 + \ldots$ zu summieren.

(*208*) Educ. Times. XV, 199.

39. Gesucht wird das $n$te Glied der Reihen a) 1, 10, 84, 680 ⋯; b) 1, 4, 24, 176, 1376, ⋯; c) 1, 6, 44, 344, 2736 ⋯.

(540) Haag XVI, 430. XVII, 279.

40. In wieviel reguläre Oktaeder und Tetraeder läfst sich a) ein reguläres Tetraeder, b) ein reguläres Oktaeder von 2^n mal gröfserer Kante zerlegen?

(541) HAAG XVI, 430. XVII, 280.

41. Ein Würfel enthält ein Oktaeder und acht Tetraeder. Wieviel Oktaeder und Tetraeder von 2^n mal kleinerer Kante enthält derselbe?

(566) HAAG XVII, 33. XVII, 440.

42.*) Wieviel Würfel, deren Kante gleich $\frac{1}{n}$ a) der Halbachse eines Oktaeders, b) der Achse eines Tetraeders ist, lassen sich im ersten Fall in ein Oktaeder, im zweiten in ein Tetraeder beschreiben?

(599) HAAG XVII, 287. XVIII, 32.

43. a) Wieviel Würfel enthält ein Rhombendodekaeder, dessen Achse $2n$ mal so grofs ist als eine der Würfelkanten? b) Wieviel Rhombendodekaeder enthält ein Würfel, dessen Kante n mal so grofs ist als die Achse der Rhombendodekaeder?

(630) HAAG XVII, 525. XVIII, 270.

c. **Bruchreihen.**

44. Man hat identisch

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}.$$

(25) Aus den Nouv. Ann. VI, 63. VI, 298.

45. Ist

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=s_n,$$

so ist

$$s_1+s_2+\cdots+s_{2n}=(2n+1)\,s_{2n}$$

und

$$s_1+s_2+\cdots+s_{2n-1}=2n\,s_{2n-1}-1.$$

(793) SIMON XIX, 429. XX, 262.

46. $S=\frac{a_1-1}{a_1}+\frac{a_2-1}{a_1 a_2}+\frac{a_3-1}{a_1 a_2 a_3}+\cdots$ zu berechnen. Anwendungen.

(626) Journ. élém. XXIV, 468.

---

*) Die Aufgaben 42, 43 sind wegen ihres Zusammenhangs mit den beiden vorhergehenden an dieser Stelle eingereiht. Vergl. die Programmabh.: „Die regulären Krystallkörper. Eine geometrisch-krystallographische Studie von Prof. Fr. Haag, Rottweil 1887."

47. $S = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ zu berechnen.

(*372*) Journ. élém. XIX, 511.

48. Die Summe $S_{2,n}$ von n Gliedern der Reihe

$$\frac{1}{a(a+b)}, \frac{1}{(a+b)(a+2b)}, \frac{1}{(a+2b)(a+3b)}, \ldots$$

zu berechnen und ferner den Grenzwert, dem sich die Summe für $n = \infty$ nähert.

(*628*) Nyt Tidsskrift. XXIV, 469.

49. Den Grenzwert von $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \cdots$ zu finden.

(*627*) Nyt Tidsskrift. XXIV, 468.

50. Die Summe $S_{3,n}$ von n Gliedern der Reihe

$$\frac{1}{a(a+b)(a+2b)}, \frac{1}{(a+b)(a+2b)(a+3b)}, \ldots$$

und ihren Grenzwert für $n = \infty$ zu berechnen.

(*629*) Nyt Tidsskrift. XXIV, 469.

51. Die Summe von n Gliedern der Reihe $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}, \frac{2}{3\cdot5\cdot7}, \frac{3}{5\cdot7\cdot9}, \ldots$ zu berechnen.

(*411*) Mathesis. XX, 513.

52. $S = \sum_{1}^{n} {}_x \frac{ax+b}{x(x+1)(x+2)}$ zu berechnen.

(*412*) Journ élém. XX, 513.

53. $S = \sum_{1}^{n} {}_x \frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ zu berechnen.

(*413*) Journ. élém. XX, 514.

54. Die Summe von n Gliedern der Reihe $\frac{1^2}{1\cdot3}, \frac{2^2}{3\cdot5}, \frac{3^2}{5\cdot7}, \frac{4^2}{7\cdot9}, \ldots$ zu berechnen.

(*416*) Mathesis. XX, 515.

55. Die Summe von n Gliedern der Reihe $\frac{1^4}{1\cdot3}, \frac{2^4}{3\cdot5}, \frac{3^4}{5\cdot7}, \ldots$ zu berechnen.

(*417*) Mathesis. XX, 515.

56. Die Reihe $S = \frac{1}{a} + \frac{1+2a}{a^2} + \frac{1+2a+3a^2}{a^3} + \cdots + \frac{1+2a+\cdots+na^{n-1}}{a^n}$ zu summieren.

57. Die Reihe $\frac{1}{a} + \frac{1-2a}{a^2} + \frac{1-2a+3a^2}{a^3} + \frac{1-2a+3a^2-4a^3}{a^4} + \cdots + \frac{1-2a+3a^2-4a^3+\cdots+(-1)^{n-1}na^{n-1}}{a^n}$ zu summieren.

(1315, 1316) NISETEO XXV, 431. XXVI, 268, 269.

58. Die Summe $S = \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \cdots + \frac{2x^{(2^n)}}{x^{(2^{n+1})}-1}$ zu berechnen.

(*415*) Mathesis. XX, 515.

59. Wird die *m*te Trigonalzahl $\frac{1}{2}m(m+1)$ mit t_m bezeichnet, so ist das unendliche Produkt $\left(1-\frac{1}{t_2}\right)\left(1-\frac{1}{t_3}\right)\left(1-\frac{1}{t_4}\right)\cdots = \frac{1}{3}$. Die Aufgabe, einen elementaren Beweis hiervon zu liefern, gestattet folgende Verallgemeinerung: Die rationale ganze Zahl a soll so bestimmt werden, dafs das unendliche Produkt $\left(1-\frac{a}{t_{k+1}}\right)\left(1-\frac{a}{t_{k+2}}\right)\left(1-\frac{a}{t_{k+3}}\right)\cdots$ einen rationalen echt gebrochenen Wert erhält. Beispielsweise für $a = 10$, $k = 4$ ist $\left(1-\frac{10}{t_5}\right)\left(1-\frac{10}{t_6}\right)\left(1-\frac{10}{t_7}\right)\cdots = \frac{1}{126}$.

(1212) SCHLÖMILCH XXIV, 457. XXV, 184.

d. Rekurrente Reihen.

60. Es soll das *n*te Glied der Reihe 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ⋯, bei der jede Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger ist, dargestellt werden.*)

(661) WEINMEISTER XVIII, 132. XVIII, 500.

61. Die Reihe $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 5} + \frac{5}{3\cdot 8} + \cdots + \frac{u_n}{u_{n-1}u_{n+1}}$ zu summieren.

(*31, 75*) Nouv. Ann. XII, 268.

*) Vergl.: „Leonardo von Pisa, zubenannt Fibonacci, und die von ihm zuerst aufgestellte rekurrente Reihe." Von Prof. Dr. Pfeifer in Dillingen (Bayern). XVII, 250.

62. Von den durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und die Rekursionsformeln a) $a_i = 2a_{i-2} + a_{i-1}$, b) $a_i = a_{i-2} + 2a_{i-1}$ definierten Reihen das $n$te Glied und die Summe der n ersten Glieder zu ermitteln.

(790) Emmerich XIX, 347. XX, 187.

63. Die Zahlenreihe $z_0, z_1, z_2, z_3, \cdots$ hat man so gebildet, dafs $z_0 = a$, $z_1 = b$ und nachher allgemein $2z_i = z_{i-2} + z_{i-1}$ ist. Man soll z_n als Funktion von a, b und n darstellen.

(1065) Schlömilch XXII, 510. XXIII, 192,

64. a) Die Zahlenreihe $z_0, z_1, z_2, \cdots$ möge dadurch bestimmt sein, dafs aus den gegebenen Anfangsgliedern $z_0 = a$ und $z_1 = b$ die übrigen Reihenglieder mittels der Rekursionsformel $z_{n+2} - 2\varepsilon z_{n+1} + \varepsilon^2 z_n = 0$ berechnet werden, worin ε eine gegebene Konstante bedeutet. Man soll nun die independente Formel für z_n suchen. Bei echt gebrochenem ε besitzt die unendliche Reihe $z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$ eine endliche Summe, die im Spezialfall $\varepsilon = \frac{1}{2}$ unabhängig von a, nämlich $= 4b$ ist. b) Auf analoge Weise kann man die Zahlenreihe untersuchen, die aus $z_0 = a$, $z_1 = b$, $z_2 = c$ mittels der Rekursionsformel $z_{n+3} - 3\varepsilon z_{n+2} + 3\varepsilon^2 z_{n+1} - \varepsilon^3 z_n = 0$ gebildet wird. Bei echt gebrochenem ε konvergiert auch hier die unendliche Reihe $z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$; im Spezialfalle $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ist ihre Summe unabhängig von b, nämlich $= \frac{9}{8}(a + 3c)$.

(1117) Schlömilch XXIII, 270. XXIV, 15.

---

§ 10. Finanztechnik.

a. Zinseszins- und Rentenrechnung.

1. Wie müssen sich bei verschiedenen Zinsfüfsen und verschiedenen Zinsperioden die letzteren ihrer Dauer nach zu einander verhalten, wenn die Verzinsung zu verhältnismäfsig gleichwertigen Resultaten führen soll?

(287) Fleischhauer XIV, 101. XIV, 524.

2. Zwei gleichalterige Personen treten gleichzeitig in eine Lebensversicherungsgesellschaft ein; für a *M* zahlbar im Todesfalle leistet die erste Person eine jährliche Einzahlung von b *M*, die zweite eine einmalige von c *M*. Welche wahrscheinliche Lebensdauer und welchen Zinsfufs berechnet die Gesellschaft?

(173) Schmitz XII, 267. — Vergl. XII, 422.

3. Ein Darlehen von k (7000) *M*, das bei p $(4\frac{1}{2})\%$ in gleichen Jahresraten zu amortisieren ist, wird erst kündbar, wenn

dem Schuldner $\frac{1}{2}$ k *M* gutgeschrieben sind, d. h. wenn die Summe aller Jahresleistungen mit ihren Zinseszinsen $\frac{1}{2}$ k beträgt. Am Anfang welches Jahres tritt das ein, wenn am 1. Jan. 1866 a (352,64) und am 1. Jan. 1880 b (1647) *M* gutgeschrieben waren? Und wieviel beträgt alsdann noch der Schuldrest?

(125) Fleischhauer XI, 432. XII, 262.

4. Ein Institut hat eine Anleihe mittels z (10 000) Schuldscheinen zu α (100) *M* aufgenommen und zahlt diese zugleich mit den jährlich zugeschlagenen p (4)%igen Zinseszinsen in n (50) gleichen Jahresraten R am Ende je eines der aufeinander folgenden Jahre zurück. Wie grofs ist R? Zu welchem Werte mufs ein Schuldschein bei der m (20) ten Tilgung eingelöst werden, und wieviel Schuldscheine werden bei dieser Tilgung eingelöst? Wieviel Schuldscheine werden durch die ersten m Jahresraten getilgt? Welcher Rest (Bruchteil eines Schuldscheins) verbleibt alsdann? Wie grofs ist der nach der $m$ten Tilgung verbleibende Schuldbestand dieser Anleihe?

(428) Fleischhauer XV, 523. XVI, 196.

5. Von einem Kapital werden die jährlich zu p_1 (5)% fälligen Zinsen vom Zeitpunkt ihrer Fälligkeit an zu p_2 (4)% auf Zinseszins wieder angelegt. Wie hoch ist der Zinsfufs der durchschnittlichen Veranlagung des Kapitals bis dahin, wo der Wert des Gesamt-Zinsenertrages dem ursprünglichen Kapital gleich ist?

(259) Fleischhauer XIII, 365. XIV, 269.

6. Ein Anlehen w wird durch eine gewisse Anzahl $(n_1 + n_2 + n_3)$ gleicher Annuitäten (a_1) jährlich abgezahlt. Wenn nun nach der $n_1$ten Annuität der Prozentsatz p_1 in p_2 übergeht und nach weiteren n_2 Jahren wieder die ursprüngliche Höhe erreicht, um wieviel Prozent ändern sich die $n_2 + n_3$ letzten Annuitäten gegenüber der ursprünglichen, oder wieviel Annuitäten sind mehr oder weniger zu entrichten, wenn der Betrag der einzelnen Annuitäten unverändert bleiben soll?

(747) Valta XIX, 97. XIX, 499.

7. Wenn eine Staatsanleihe, die in n (50) Jahren mittelst am Ende jeden Jahres fälliger Annuitäten von N (100 000) *M* zu verzinsen und zu amortisieren ist, für A (2 000 000) *M* netto an ein Bankhaus abgesetzt wird, wie hoch mufs dann der Staat die erlöste Summe jährlich verzinsen? (Höhere Gleichung).*)

(211) Fleischhauer XIII, 124. XIV, 29.

*) Vergl. den Aufsatz von Schlömilch „Zur Schuldentilgungs- und Rentenrechnung" XI, 262. — S. auch XI, 70, 266; XXIX, 13.

b. Regelmäfsig veränderliche Teilzahlungen.

8. Auf einem Pachtgute sind m ℳ Meliorationskosten entstanden, die nebst ihren p %igen Zinsen vom Pächter und Verpächter in folgender Weise getilgt werden sollen: Jeder von ihnen leistet n Jahre hindurch jedesmal am Jahresschlusse eine Zahlung, die beim Pächter immer a % kleiner ist als im nachfolgenden Jahre, beim Verpächter dagegen b % gröfser als im vorhergegangenen Jahre. Die letzte Zahlung des Pächters und die erste Zahlung des Verpächters sollen hierbei gleich grofs sein. Wie grofs ist jede, und wieviel von den Meliorationskosten zahlt der Pächter, wieviel der Verpächter?

(816) Fleischhauer XIX, 588. XX, 341.

9. An eine Kasse sollen jährlich Zahlungen geleistet werden, die wie die ungeraden Zahlen wachsen und mit den Zinsen zu p (4) % weiter verzinst werden. Wie grofs mufs die m (50) te Einzahlung sein, wenn in n (100) Jahren das in dieser Weise angesammelte Kapital W (10 000) ℳ betragen soll, und wieviel wird bis zum Ende des $m$ten Jahres angespart sein?

(212) Fleischhauer XIII, 124. XIV, 29.

10. Eine Schuld soll so getilgt werden, dafs die jährlichen Abzahlungen eine fallende geometrische Reihe bilden. Unter welcher Bedingung nimmt der Schuldrest fortwährend ab; andernfalls, zu welcher Zeit erreicht er ein Minimum? Wie gestaltet sich die Sache, wenn die Abzahlungen eine fallende arithmetische Reihe bilden?

(295) Schlömilch XIV, 192. XIV, 594.*)

11. Bei der Ablösung einer Fruchtdecimation soll ihr gegenwärtiger Jahreswert N und eine jährliche Preissteigerung von a % dieses Wertes zu Grunde gelegt werden. Wieviel mufs das Ablösungskapital betragen, wenn es an einem Fälligkeitstermin der Decimation anstatt derselben gezahlt und bei der Wertsermittelung ein Zinsfufs von p % sowie gemeine Zinsverzinsung zu Grunde gelegt werden soll?

(297) Fleischhauer XIV, 270. XV, 32.

12. Jemand legt n Jahre hindurch am Anfange eines jeden Jahres verschiedene Beträge in ein Geldinstitut. Zu welcher Summe wachsen die gesamten Einlagen bei p % Zinseszins bis zum Ende des $n$ten Jahres an, wenn die erste Einlage s ℳ be-

*) Vergl. den Aufsatz von Schlömilch „Zur Schuldentilgungsrechnung" XIV, 483.

trägt und jede folgende Einlage um den $r$ten Teil der vorhergehenden und a ℳ gröfser ist?

13. Die erste Einlage möge s ℳ betragen, die zweite $s + \frac{s}{r} + a$, die dritte um den $r$ten Teil der zweiten Einlage $+ 2a$ ℳ gröfser sein u. s. w., die $n$te Einlage um den $r$ten Teil der $(n-1)$ten Einlage $+ (n-1)a$ ℳ gröfser sein. Wie grofs ist das Guthaben am Ende des $n$ten Jahres?

(597, 598) SZIMÁNYI XVII, 287. XVIII, 31, 32.

14. Jemand legt n Jahre hindurch am Anfang eines jeden Jahres Beträge in eine Sparkasse, die wie die Quadrate der natürlichen Zahlen wachsen, also a ℳ, $4a$ ℳ, $\cdots n^2 a$ ℳ Zu welcher Summe werden diese Beträge bei p % Zinseszins bis zum Ende des $n$ten Jahres anwachsen?

(618) SZIMÁNYI XVII, 446. XVIII, 191 (Zusatz).

15. Wie grofs ist der Barwert einer Jahresrente auf n Jahre, wenn die Rate am Ende des $m$ten Jahres $= A_0 + A_1 m + A_2 m^2 + \cdots + A_s m^s$ ist?

(74) v. SCHAEWEN X, 197. X, 347.

c. Spezielle Finanztechnik.

16. In einem Konkurse wird eine 20mal anfällige Jahresrente, die 3 Jahre nach Eröffnung zum erstenmal fällig geworden sein würde, angemeldet. Nach der Konkursordnung für das Deutsche Reich sind über n Jahre fällige Forderungen nach einfacher Diskontrechnung auf 100 (5% jährlich) auf den Zeitpunkt des Konkurses zu reduzieren. Um wieviel % ist der zu liquidierende Wert nach der K.-O. höher als nach der Zinseszinsrechnung?

(174) FLEISCHHAUER XII, 267. XIII, 123.

17. Eine Feuerversicherungsbank gewährt bei einer Prämienvorauszahlung auf n Jahre r % Rabatt. Wieviel Prozent der gezahlten Prämien dürfen im Durchschnitt von n Jahren nach Ablauf je eines Jahres höchstens als Dividende an die Prämienzahler zurückerstattet werden, wenn bei einem derartigen Rabatt die $n$jährig Versicherten nicht schlechter wegkommen sollen als die einjährig Versicherten und die Zahlungen zu p % Zinsen und Zinseszinsen pro Jahr angelegt werden können?

(595) FLEISCHHAUER XVII, 201. XVII, 596.

18. Ein Sterbekassenverein, von dessen Mitgliedern a beitragsfrei sind, während jedes der übrigen bei jedem Todesfalle seiner Kategorie den Beitrag b zahlt, zahlt selber im Todesfall jedes

seiner Mitglieder die Summe s. Nach Berichtigung des letzten Sterbekapitals besafs der Verein, bevor die Beiträge der Mitglieder eingesammelt waren, ein Kapitalvermögen v. Wie grofs müfste die Mitgliederzahl n_1 jetzt sein, wenn die künftig noch zu erhebenden Beiträge nebst der Summe v gerade hinreichen sollen, die beim allmähligen Aussterben des Vereins noch fällig werdenden Sterbegelder zu decken? Für v existiert ein gewisser Maximalwert als Funktion von a, b, s; wie grofs ist dieser, und wie hoch beläuft sich in diesem besonderen Falle die Mitgliederzahl n_2? Von einer Verzinsung der Aktiva und Passiva werde abgesehen.

(484) Fleischhauer XVI, 204. XVI, 495.

19. Für jedes einzelne Mitglied einer Gesellschaft gleichalteriger Personen soll ein Darlehen von c (300) *M* gewährt werden, und es soll der Gesamtbetrag dieser Darlehne samt ihren p (4) %igen Jahreszinsen mittels gleicher Jahresrenten N in n (10) Jahren durch die je am Jahresschlufs noch lebenden Mitglieder getilgt werden. Wieviel wird jede dieser Renten betragen, wenn die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines Jahres zu sterben, im ersten Jahre $= a$ (0,73) %, in jedem späteren Jahre aber je x (0,02) % gröfser ist?

(385) Fleischhauer XV, 289. XV, 601.

20. Wieviel wert ist gegenwärtig bei einer jährlichen Verzinsung von p % eine jährliche vorauszahlbare Verbindungsrente von v *M* für zwei Personen, von denen die eine a Jahre, die andere $a + m$ Jahre alt ist, wenn diese Rente längstens $m + n$ Jahre lang zahlbar ist und im Durchschnitt jährlich x % Personen sterben?

(690) Fleischhauer XVIII, 278. XIX, 90.

21. Die sämtlichen p %igen Obligationen einer Anleihe werden mittels n durchschnittlich gleicher nachzahlbarer Jahresleistungen N verzinst und auslosungsweise getilgt. Zur Zeit der $m$ten Auslosung steht der Kurs der nicht ausgelosten Obligationen h % über ihrem Nennwert, die ausgelosten stehen pari. Wieviel Prozent vom Nennwert beträgt nach Mafsgabe der mathematischen Wahrscheinlichkeit ausgelost zu werden, die Netto-Versicherungsprämie gegen die Gefahr der Verlosung unmittelbar nach der $m$ten Auslosung, wenn für die Verwertung der Versicherungsprämie der Zinsfufs der Anleihe zu Grunde gelegt wird?

(345) Fleischhauer XV, 38. XV, 348.

22. Ein Pfandbrief-Institut verzinst seine Pfandbriefe mit $4\frac{1}{2}$ % (pro anno) in halbjährigen nachzahlbaren Raten und läfst sich die aus dem Pari-Erlös begebenen Darlehne mittelst 50 voller Annuitäten von je $5\frac{1}{2}$ % (pro anno) in vierteljährigen vorauszahlbaren

Raten verzinsen und amortisieren. Wieviel Prozente der ursprünglichen Pfandbriefschuld müfste danach, genau genommen, dieses Institut halbjährlich profitieren? (Höhere Gleichung).

(175) FLEISCHHAUER XII, 362. XIII, 197.

---

§ 11. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

a. Kombinatorik.

1. Der Talus oder Astragalos, eine Art Würfel der Alten (Knöchel von Tieren oder Nachbildungen derselben), hatte vier Längsseiten, welche beim Werfen bezüglich die Werte 1, 6, 3, 4 besafsen, während die Zahlen 2 und 5 nicht vorkamen. Wieviel verschiedene Würfe waren bei dem Spiel mit vier solchen Talis möglich und welche?

REIDT II, 218. —

2. Wie lassen sich die Ziffern 1 bis 7 in die sieben horizontalen und sieben vertikalen Reihen eines in 7^2 Quadrate geteilten Quadrates hineinschreiben, so dafs weder in diesen noch in den beiden Diagonalreihen eine Ziffer wiederholt vorkommt, und auf wievielfache Weise ist das möglich?

(659) BROCKMANN XVIII, 132. XVIII, 498.

3. Ein magisches Quadrat aus den Steinen eines Dominospiels zu bilden, wenn die Steine (0,0), (1,1), $\cdots$ (6,6) als 0, 1, $\cdots$ 6 gelten.

(*377*) Mathesis. XIX, 512.

4. $(2n - 1)^2$ Würfel von verschiedener Farbe auf jeder Seite, jedoch unter sich gleich, sollen zur Bildung quadratischer Mosaiks, die für alle Hauptlinien des Quadrats symmetrische Anordnung haben, verwandt werden. Wieviele solcher Zusammenstellungen sind möglich?

(619) RASCHIG XVII, 446. XVIII, 192.

5. Stellt man n Türme auf einem Schachbrett mit n^2 Feldern so auf, dafs keiner den anderen schlagen kann, so gelten folgende Sätze: a) n gerade. Die Türme, welche auf Feldern von der Farbe des Eckfeldes links unten stehen, nehmen ebensoviel gerade als ungerade Vertikalreihen ein; deshalb sind Türme, deren Felder dieselbe Farbe haben, in gerader Zahl vorhanden. b) n ungerade. Die Türme, die auf Feldern von der Farbe eines Eckfeldes stehen, nehmen eine Zahl ungerader Vertikalreihen ein, die um 1 gröfser ist als die ihrer geraden Vertikalreihen; deshalb sind Türme, deren Felder die Farbe eines Eckfeldes haben, in ungerader Zahl vorhanden.

(1213) STEINERT XXIV, 457. XXV, 184.

6. Auf wieviel Wegen kann im folgenden Schema der Satz: „*Quot viae legendi, tot per annum volvantur horae felices*" gelesen werden?

```
Quotviaelegenditotper
uotviael        era
otviaele        ran
tviaeleg          num
viaelege          umv
      nditotperannumvolvanturhoraefe
                                  el
                                  lices
                                   ces
                                   es
                                   s
```

(414) Breuer XV, 360. XVI, 24.

---

7. Scherzaufgabe. Jeder Mensch hat bekanntlich 2 Eltern, 4 Großeltern, 8 Urgroßeltern u. s. w. Fünfzig Generationen rückwärts gerechnet müssen demnach 2^{50} Vorfahren gelebt haben, was aber unmöglich ist, weil die Erde so viel Hungrige nicht ernähren kann. — Worin liegt der Fehler dieses Schlusses?

(869) Schlömilch XX, 275. XXI, 30.

8. Man werfe aus einer Skatkarte drei Blätter auf und zähle auf jedes derselben so viele, daſs man am Schluſs 15 hat, wobei jedes Blatt für einen Point zählt, das aufgeworfene aber nach Skatregel, jedoch die Sieben, Acht und Neun für 7, 8, 9. Wie läſst sich aus der Anzahl q der übrig bleibenden bezw. der fehlenden Blätter die Augensumme s der aufgeworfenen Blätter ermitteln? Welcher Verallgemeinerung ist die Aufgabe fähig?

(1045) Sievers XXII, 350. XXIII, 116.

9. Das Kartenspiel Sego besteht aus 54 Karten, 19 Zählkarten (z) [4 Könige, der Pagat, die Einundzwanzig und der Sküs à 5 Points (p), 4 Damen à $4p$, 4 Caval à $3p$ und 4 Bauern à $2p$] und 35 nichts zählenden leeren Blättern (l) [Aſs, Zehner u. s. w.]. Teilt man das Spiel in 18 Haufen (h) mit je 3 Karten und verlangt, wie es Spielregel ist, daſs $1h$ mit $3l$ $1p$ zählt, sonst soviel p als die in ihm enthaltenen z zusammen, jedoch mit der Bedingung, daſs 2 oder $1p$ abgezogen werden müssen, je nachdem 3 oder $2z$ in $1h$ sich befinden, so ist die Gesamtsumme der Points aller Haufen gleich 70.

(1171) Steinert XXIV, 103. XXIV, 450.

---

10. Es seien n Punkte gegeben, durch welche $\binom{n}{3}$ Ebenen bestimmt sind. Man verlangt die Zahl jener Punkte, in welchen sich diese Ebenen schneiden und die nicht mit den gegebenen Punkten zusammenfallen.

(620) SCHUMACHER XVII, 446. XVIII, 192, 497.

11. Auf wieviel Arten läfst sich ein n-Eck mit lauter hohlen Winkeln in Dreiecke zerlegen?

(500) EHRLENHOLTZ XVI, 273. XVI, 589.*)

---

12. Wie grofs ist die Anzahl der Variationen mit Wiederholung aus n Elementen zur $p$ten Klasse, in denen a) ein Element a αmal vorkommt ($\alpha < p$), b) ein Element a αmal, ein zweites b βmal, ein drittes c γmal, die übrigen Elemente jedoch höchstens nur einmal vorkommen? $p - (\alpha + \beta + \gamma) \leqq n - 3$.

(815) ZÜGE XIX, 510. XX, 273.

13. Wie grofs ist die Summe aller Zahlen, die durch Permutation der Ziffern einer gegebenen Zahl entstehen? (Die gegebene Zahl bestehe aus α Ziffern gleich a, β Ziffern gleich $b, \cdots$ μ Ziffern gleich m.)

(947) EPSTEIN XXI, 195. XXI, 590.

14. Aus den n ersten natürlichen Zahlen werden die Kombinationen ohne Wiederholung der ersten, zweiten, $\cdots n$ten Klasse gebildet und jede Kombination wird als Produkt der darin vorkommenden Zahlen betrachtet. Es ist das Produkt sämtlicher Kombinationen aller Klassen zu bestimmen.

(1032) NISETEO XXII, 198. XXII, 593.

Summen kombinatorischer Produkte.

15. Eine ganze homogene Funktion 2. Grades von n reellen Variabeln mit nur positiven Koeffizienten kann höchstens $\frac{1}{4} n^2$ bezw. $\frac{1}{4}(n^2 - 1)$ negative Glieder haben, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

(1260) STEINERT XXV, 115. XXV, 508.

---

*) Um zu dem angegebenen Resultat zu gelangen kann man mit der Rekursionsformel

$$(1)\ f_n = f_{n-1} + f_3 f_{n-2} + f_4 f_{n-3} + \cdots + f_{n-2} f_3 + f_{n-1}$$

die Gleichung

$$(2)\ f_{n-1} = \frac{n-1}{2(n-4)} (f_3 f_{n-2} + f_4 f_{n-3} + \cdots + f_{n-2} f_3)$$

verbinden, die ebenfalls aus kombinatorischen Erwägungen hervorgeht.

16. Sind $c_1, c_2, c_3, \cdots$ die Kombinationssummen beliebiger Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ zur 1., 2., 3., $\cdots$ Klasse, so ist
$(1+c_2+c_4+\cdots)^2=(c_1+c_3+c_5+\cdots)^2+(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)\cdots$

(629) SPORER XVII, 525. XVIII, 269.

17. Bekanntlich ist $a^2+b^2+2ab=(a+b)\ (a+b)$; $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$. Bezeichnet man die Summen der ersten, zweiten, $\cdots$ Potenzen einer Anzahl von Gröfsen mit $s_1, s_2, \cdots$ die Summen ihrer als Produkte aufgefafsten Kombinationen ohne Wiederholungen zur 1., 2., $\cdots$ Klasse mit $c_1, c_2, \cdots$, so heifsen obige Formeln: $s_2+2c_2=c_1s_1$; $s_3-3c_3=c_1(s_2-c_2)$. Diese Formeln lassen sich weiter fortsetzen: $s_4+c_2s_2+4c_4=c_1(s_3+c_3)$; $s_5+c_2s_3+c_3s_2+5c_5=c_1(s_4-c_4)$; $\cdots s_{2n}+c_2s_{2n-2}-c_3s_{2n-3}+\cdots+2nc_{2n}=c_1(s_{2n-1}+c_{2n-1})$; $s_{2n+1}+c_2s_{2n-1}-c_3s_{2n-2}+\cdots-(2n+1)c_{2n+1}=c_1(s_{2n}-c_{2n})$.

(1047) FUHRMANN XXII, 351. XXIII, 118.

18. Wie grofs ist die Summe der als Produkte aufgefafsten Amben und Ternen der n ersten natürlichen Zahlen und zwar der betreffenden Kombinationen a) ohne, b) mit Wiederholung?

(596) BERMANN XVII, 287. XVIII, 30.

19. Es sei $S_1=1+2+\cdots n$; $S_2=1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots 1\cdot n+2\cdot 3+\cdots 2\cdot n+\cdots+(n-1)n$ u. s. w., so dafs S_k erhalten wird, wenn man aus den Zahlen 1, 2, 3, $\cdots n$ die Kombinationen ohne Wiederholung zu je k Elementen bildet, diese als Produkte betrachtet und die Produkte addiert. Dann bestehen die beiden Rekursionsformeln

$$kS_k=\tfrac{1}{2}(n+k)\binom{n-k+1}{1}S_{k-1}-\tfrac{1}{3}(2n+k)\binom{n-k+2}{2}S_{k-2}+\cdots$$

und

$$kS_k=\binom{n-k+2}{2}S_{k-1}+\binom{n-k+3}{3}S_{k-2}+\cdots$$

(372) SCHLÖMILCH XV, 126. XV, 439.

20. Es bezeichne T_k die Summe, die entsteht, wenn man aus den Zahlen 1, 2, $\cdots n$ die Kombinationen zu je k Elementen mit Wiederholungen bildet, jede solche Kombination als Produkt betrachtet und die Produkte addiert; dann besteht die Rekursionsformel

$$kT_k=\binom{n+k}{2}T_{k-1}-\binom{n+k}{3}T_{k-2}+\cdots$$

(505) FUHRMANN XVI, 274. XVI, 592.

21. In welcher Weise sind die Zahlen 1, 2, $\cdots n$ so in eine geschlossene Linie zu stellen, dafs die Summe der Produkte von je zwei nebeneinander stehenden Zahlen a) ein Minimum, b) ein Maximum wird? Wie grofs ist c) das Minimum, d) das Maximum?

(792) SCHURIG XIX, 347. XX, 189.

22. Bildet man die Summen der Kombinationen ohne Wiederholung zur 1., 2., 3., $\cdots$ Klasse aus den Zahlen 1 bis n, wobei jede Kombination als dekadische Zahl betrachtet wird, also $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots$; $S_2 = 12 + 13 + \cdots + 23 + 24 + \cdots + 34 + \cdots$; $S_3 = 123 + 124 + \cdots + 234 + \cdots$, so ist $S_1 = 1 \cdot \binom{n+1}{2}$; $S_2 = 12 \cdot \binom{n+1}{3}$; $S_3 = 123 \cdot \binom{n+1}{4}$; $\cdots$ $S_k = [1 \cdot 10^{k-1} + 2 \cdot 10^{k-2} + 3 \cdot 10^{k-3} + \cdots + k \cdot 10^0] \binom{n+1}{k+1}$.

(1013) NISETEO XXII, 105. XXII, 501.

b. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

23. Ein Drittel sämtlicher Äpfel eines Baumes ist angefault, ein Viertel aller Äpfel ist wurmstichig. Wie grofs sind die Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, w_3, w_4, dafs ein beliebig abgepflückter Apfel 1) gesund ist, 2) angefault, 3) wurmstichig, 4) sowohl angefault als wurmstichig?

(*136*) Math. Visitor. XIII, 450.

24. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von n an einem Tage versammelten Personen wenigstens eine an diesem Tage ihren Geburtstag hat? Wie grofs mufs n sein, wenn jemand, der auf das Eintreten dieses Ereignisses wettet, Aussicht auf Erfolg haben soll?

(615) v. LÜHMANN XVII, 366. XVIII, 131, 190.

25. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs drei aus der Reihe der ganzzahligen Winkel 1^0, 2^0, $\cdots 179^0$ herausgegriffene Winkel die Winkel eines ebenen Dreiecks vorstellen?

(563) DIETSCH XVI, 594. XVII, 364.

26. Die n ersten natürlichen Zahlen sind in eine Urne gethan. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs wenn drei Zahlen blindlings herausgegriffen werden, 1) eine Zahl gleich der Summe der beiden anderen, 2) eine Zahl gleich der halben Summe der beiden anderen ist?

(*623*) Mathesis. XXIV, 466.

27. Aus den n ersten natürlichen Zahlen werden p herausgezogen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die gezogenen Zahlen eine arithmetische Reihe bilden?

(1259) Niseteo XXV, 115. XXV, 507.

28. In einer Lotterie von im ganzen n Nummern werden p unter sich gleiche Gewinne gezogen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der arithmetisch geordneten Gewinnliste mindestens einmal zwei aufeinander folgende Losnummern vorkommen?

(1044) Mathematicus XXII, 350. XXIII, 115.

29. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs drei aus der Zahlenreihe $1, 2, 3, \cdots n$ beliebig herausgegriffene Zahlen die Seiten eines ungleichseitigen Dreiecks vorstellen?

(561) Dietsch XVI, 594. XVII, 362.

30. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs drei Zahlen der Zahlenreihe $1, 2, 3, \cdots n$ die Seiten eines beliebigen ebenen Dreiecks vorstellen?

(562) Dietsch XVI, 594. XVII, 363.

31. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den Nummern 1 bis 90 drei gezogen werden, deren Zahlensumme kleiner als 100 ist?

(565) Szimányi XVII, 33. XVII, 438.

---

§ 12. Reihen mit Binomialkoeffizienten.

1. Die Formel $\sum_{\alpha=0}^{\alpha=r-1} \binom{r-1}{\alpha}\binom{n-r}{s-\alpha} = \binom{n-1}{s}$ soll a) mit, b) ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung bewiesen werden.

(425) Dietsch XV, 522. XV, 522; XVI, 194.

2. Für ganze positive p ist: $1 + \binom{2p}{1} - \binom{2p}{2} - \binom{2p}{3} + \binom{2p}{4} + \binom{2p}{5} - \cdots = \pm 2^p$, je nachdem $p = 4n$ oder $4n + 1$ resp. $= 4n + 2$ oder $4n + 3$ ist.

(1161) Teege XXIII, 592. XXIV, 341.

3. Wird $1 - \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} - \binom{n-3}{3} + \cdots = (-1)^n C^n$ gesetzt, so ist $C_n = C_{n-3}$ und $C_{3n+2} = 0$.

(439) Fuhrmann XV, 612. XVI, 265.

4. Ist n eine positive ganze Zahl, so ist $\binom{n}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} - \binom{n-3}{3} + \cdots$ entweder $= 1$ oder $= 0$ oder $= -1$; den Formen $n = 6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$ entsprechen nämlich die Summen 1, 1, 0, -1, -1, 0.

(1064) Schlömilch XXII, 510. XXIII, 191.

5. Wird $1 - \frac{1}{2}\binom{n-1}{1} + \frac{1}{4}\binom{n-2}{2} - \cdots = C_n$ gesetzt, so ist $C_n + \frac{1}{4} C_{n-4} = 0$.

(373) Artzt XV, 194. XV, 516.

6. Die Reihe $1 + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \cdots + p\binom{n}{2p} + \cdots$ zu summieren.

(73) v. Schaewen X, 196. X, 346.

7. $1 + \frac{1}{2}\binom{k+1}{1} + \frac{1}{4}\binom{k+2}{2} + \frac{1}{8}\binom{k+3}{3} + \cdots = 2^{k+1}$.

(715) Grube XVIII, 504. XIX, 264 (Verallgemeinerung).

8. Ist n eine positive ganze Zahl, so ist

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \frac{1}{4}\binom{n}{4} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(749) Schlömilch XIX, 97. XIX, 501.

9. Für ganze positive m ist

a) $$\frac{1}{\binom{m}{0}} + \frac{1}{\binom{m}{1}} + \frac{1}{\binom{m}{2}} + \cdots + \frac{1}{\binom{m}{m}} = \frac{m+1}{2m}\left(\frac{1}{1} + \frac{2^1}{2} + \frac{2^2}{3} + \cdots + \frac{2^m}{m+1}\right);$$

b) $$\frac{1}{\binom{m}{0}} - \frac{1}{\binom{m}{1}} + \frac{1}{\binom{m}{2}} - \cdots + \frac{(-1)^m}{\binom{m}{m}} = [1 + (-1)^m]\,\frac{m+1}{m+2}.$$

(506) Schlömilch XVI, 274. XVII, 22.*)
b) (1314) Stoll XXV, 431. XXVI, 267.

10. a) $$\frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n-1}{k}} + \frac{1}{\binom{n-2}{k}} + \cdots + \frac{1}{\binom{k}{k}} = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{1}{\binom{n}{k-1}}\right);$$

---

*) Z. 3, 4, 5 des Beweises lies $(m+1)$ statt $(m+1)$!

b) $\frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} + \frac{1}{\binom{n-2}{k-2}} + \cdots + \frac{1}{\binom{n-k}{0}}$

$$= \frac{n-k}{n-k-1}\left(1 - \frac{1}{\binom{n}{k+1}}\right).$$

(1313) STOLL XXV, 431. XXVI, 265.

11. $\sum_0^{m+1} {}_i \binom{p-2i}{m}\binom{m+1}{i}(-1)^i = \binom{m+1}{p-m}$, p und m als ganz und positiv vorausgesetzt.

(273) STOLL XIV, 34. XIV, 355.

12. $\sum_0^{m} {}_i \binom{p-2i}{m}\binom{m}{i}(-1)^i = 2^m$, p und m als ganz und positiv und $p \geqq 2m$ vorausgesetzt.

(274) STOLL XIV, 34. XIV, 356.

13. Ist m eine positive ganze Zahl, so ist $1 - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)}$ $+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 4\cdot(2m-1)(2m-3)} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2m-1)(2m-3)(2m-5)} + \cdots$ $= 2^m : \binom{2m}{m}$.

(275) STOLL XIV, 34. XIV, 356.

14. $\sum_0^{m+1} {}_i \binom{p-\varepsilon i}{m}\binom{m+1}{i}(-1)^i = 0$, falls $p - \varepsilon(m+1) \geqq 0$.

(342) DIETSCH XV, 38. XV, 346.

15. $\sum_0^{m} {}_i \binom{p-\varepsilon i}{m}\binom{m}{i}(-1)^i = \varepsilon^m$, falls $p \geqq \varepsilon m$.

(343) DIETSCH XV, 38. XV, 347.

16. $\sum_0^{m+1} {}_i \binom{p-\varepsilon i}{\tilde{\omega}}\binom{m+1}{i}(-1)^i = 0$, falls $\tilde{\omega} < m+1$ und $p \geqq \varepsilon(m+1)$.

(344) DIETSCH XV, 38. XV, 348.

17. Zu beweisen, daſs die von selbst abbrechende Summe $\sum_{1}^{i} \frac{(-1)^i}{n-i} \binom{n-i}{i} = 0$ ist, falls n die Form $6\mu \pm 1$ hat.

(1261) Tafelmacher XXV, 115. XXV, 509.*)

18. Zu beweisen, daſs die von selbst abbrechende Summe $(4r+\lambda) \sum_{0}^{i} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^i \binom{4r+\lambda-i}{i}}{4r+\lambda-i}$ die Werte $\left(-\frac{1}{4}\right)^r$, Null, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{r+1}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{r+1}$ annimmt, je nachdem λ gleich 1, 2, 3 oder 4 ist.

(389) Dietsch XV, 289. XV, 605.

19. Bei ganzen positiven k und n gilt der Satz

$$\sum_{0}^{i} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{m-i}{k} = 1.$$

Mit Hülfe desselben läſst sich beweisen, daſs für jedes beliebige x ist:

$$\frac{\sum_{0}^{m} {}^{i}\, x^i}{(1+x)^m} = \sum_{0}^{i} (-1)^i \binom{m-i}{i} \frac{x^i}{(1+x)^{2i}}.$$

(1075) Schlömilch XXII, 512. XXIII, 268.

20. Für ein gegebenes positives ganzes m sollen diejenigen Werte von x gesucht werden, durch welche in der Reihe $\binom{m}{0} + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \cdots$ zwei benachbarte Glieder gleich und Maximalterme werden. Auſserdem sind die Indizes der Maximalterme *a priori* zu bestimmen.

(331) Schlömilch XIV, 597. XV, 284.

21. Man ersetze in der Identität $(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \cdots$ die $n+1$ Gröſsen $a^{n-i} b^i$ durch $p$te Potenzen von $n+1$ aufeinander folgenden Zahlen. Welche Beziehung muſs zwischen n und p stattfinden, damit die Summe identisch verschwindet?

(1033) Kokott XXII, 198. XXII, 594.

---

*) Z. 9 des Beweises lies $-\frac{2}{n}$ statt $\frac{2}{n}$.

22. Wird $1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\cdots=a_n$, $\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\cdots=b_n$, $\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\cdots=c_n$ gesetzt, so ist $a_n^2+b_n^2+c_n^2=\frac{1}{3}(4^n+2)$.

(370) PAMPUCH XV, 125. XV, 437.

23. Bei den Funktionen

$$x_\sigma = 1+\frac{\sigma^3}{3!}+\frac{\sigma^6}{6!}+\cdots+\frac{\sigma^{3n}}{(3n)!},$$
$$y_\sigma = \frac{\sigma}{1}+\frac{\sigma^4}{4!}+\frac{\sigma^7}{7!}+\cdots+\frac{\sigma^{3n+1}}{(3n+1)!},$$
$$z_\sigma = \frac{\sigma^2}{2!}+\frac{\sigma^5}{5!}+\frac{\sigma^8}{8!}+\cdots+\frac{\sigma^{3n+2}}{(3n+2)!}$$

gelten die Additionstheoreme

$$x_{\sigma+\tau} = x_\sigma x_\tau + y_\sigma z_\tau + y_\tau z_\sigma,$$
$$y_{\sigma+\tau} = x_\sigma y_\tau + x_\tau y_\sigma + z_\sigma z_\tau,$$
$$z_{\sigma+\tau} = x_\sigma z_\tau + x_\tau z_\sigma + y_\sigma y_\tau.$$

(371) PAMPUCH XV, 126. XV, 438.

IV. Höhere Analysis.*)

§ 13. Grenzwerte.

1. Bezeichnen n und k ganze positive Zahlen, so geht der Quotient

$$\frac{(1-x^n)\left(1-x\cos\frac{2n\pi}{k}\right)}{1-2x\cos\frac{2n\pi}{k}+x^2}$$

für $x=1$ in n oder 0 über, je nachdem $\frac{n}{k}$ eine ganze Zahl ist oder nicht.

(771) SCHLÖMILCH XIX, 272. XX, 27.

*) Vergl. folgende Aufsätze von Schlömilch: „Bemerkungen über Grenzwerte" IX, 197; „Über die Grenzwerte der Funktionen mehrerer Variabelen" IX, 356; „Notiz über die bedingt konvergierenden Reihen" XII, 30; „Über die unendliche Reihe für die Zahl e" XVII, 183; Zusatz XVII, 277; „Betrachtungen über das Unendliche" XVIII, 161; „Beiträge zur algebraischen Analysis" XVIII, 561; „Über die Differentiation der Potenz, des Logarithmus und der Exponentialgröfse" XIX, 81.

2. $\lim \frac{\sum n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$.

(716) WEBER XVIII, 504. XIX, 266.
(1087) KOEBKE XXIII, 49. XXIII, 423. S. XVIII, 567.

3. Bezeichnen $C_1, C_2, C_3, \cdots$ die bekannten Kombinationssummen, die durch die Gleichung $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n) = x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_{n-1} x + C_n$ definiert sind, so gilt für unendlich wachsende n und ein konstantes k der Satz: $\lim \frac{C_k}{n^{2k}} = \frac{1}{k!\, 2^k}$.

(745) SCHLÖMILCH XIX, 33. XIX, 427.

4. Bezeichnet m_k das arithmetische Mittel der in C_k (s. die vorige Aufgabe) enthaltenen Produkte, so ist für unendlich wachsende n: $\lim \frac{m_k}{n^k} = \frac{1}{2^k}$.

(794) SCHLÖMILCH XIX, 429. XX, 263.

5. Mit Hilfe der bekannten für $\alpha > \beta > 0$ und ganze positive m geltenden Ungleichungen

$$m\alpha^{m-1} > \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} > m\beta^{m-1}$$

soll bewiesen werden, dafs der Ausdruck $n^{\frac{1}{n}}$ bei unendlich wachsenden ganzen positiven n gegen die Grenze 1 konvergiert.

(769) SCHLÖMILCH XIX, 188. XX, 422.

6. Jemand hat a (4000) ℳ in n (4) Jahren so abzuzahlen, dafs am Ende jedes Jahres dieselbe Summe zu zahlen ist. Dabei sollen die p (5) %igen Zinsen jeden Augenblick zum Kapital geschlagen werden. Wie grofs ist die Jahresrate?

(*135*) Math. Visitor. XIII, 449.

7. Wenn ein Kapital bei Zinsverzinsung jährlich um p % seiner jeweiligen Gröfse wachsen soll, wieviel % höchstens darf dann sein Zinsfufs mit Rücksicht auf etwaige Ratenzahlung der Zinsen niedriger sein?

(286) FLEISCHHAUER XIV, 101. XIV, 524.

8. Zu beweisen, dafs $x - \sin x < \frac{1}{6} x^3$ ist.

(*182*) Journ. élém. XIV, 602.

9. Zu beweisen, dafs der Ausdruck $\frac{\sin 2\omega}{2}\left(\frac{1}{1}\cot\frac{\omega}{1} + \frac{1}{2}\cot\frac{\omega}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\cot\frac{\omega}{n}\right)$ für $\omega = n\pi$ die Anzahl der Teiler von n darstellt.

(486) SCHLÖMILCH XVI, 204. XVI, 496.

§ 14. Reihenentwickelungen.

1. Die Koeffizienten A, B, C so zu bestimmen, dafs die Summe $A + B\sqrt{1-x} + C\sqrt[4]{1-x}$, nach Potenzen von x entwickelt, in möglichst viel Anfangsgliedern übereinstimmt mit der Reihe $1 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{64}x^2 - \frac{5}{256}x^3 - \frac{175}{16384}x^4 - \frac{11025}{1048576}x^5 - \cdots$ Die Differenz beider Entwickelungen ist näherungsweis zu ermitteln.

(993) SCHLÖMILCH XXI, 590. XXII, 343.

2. Auf einer Geraden nehme man (immer in derselben Richtung) die Strecke $AB = a$ willkürlich, ferner $BC = \frac{1}{5}a$, $BD = 2a$ und beschreibe aus C als Mittelpunkt mit dem Radius CD einen Kreis; wird nun durch B eine beliebige Gerade gezogen, die jenen Kreis in E schneidet, so ist nahezu $\sphericalangle AEB = \frac{1}{3} DBE$, falls $\sphericalangle DBE$ zwischen 0^0 und 60^0 liegt. An der Grenze 60^0 ergiebt sich $\sphericalangle AEB$ nur um $5' 41''$ zu klein.

(985) SCHLÖMILCH XXI, 520. XXII, 267.

3. Mittelst welcher einfachen Regel kann die Frage, nach wieviel Jahren sich ein Kapital bei einem Zinsfufs von $p\%$ durch Zinsverzinsung nahezu verdoppelt, durch blofses Kopfrechnen gelöst werden?

(176) FLEISCHHAUER XII, 362. XIII, 197.

4. Ein Kapital a wächst in n Jahren mit Zinseszinsen zu $p\%$ auf die Summe s an. In welchen Terminen folgen die Zinszuschläge?

SCHLEGEL XXV, 180. XXV, 180.

5. Unter der gemeinschaftlichen Bedingung $x^2 < 1$ lassen sich bekanntlich die vier Funktionen $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{x}{1+x^2}$, $l(1+x^2)$, $arctg x$ nach steigenden Potenzen von x entwickeln; dieselben Funktionen können aber auch in Reihen von der Form $C_0 + C_1 (1-x) + C_2 (1-x)^2 + C_3 (1-x)^3 + \cdots$ verwandelt werden. Die Bedingungen, unter denen dies möglich ist und die für jeden Fall geltenden Werte der Koeffizienten C sind zu ermitteln.

(319) SCHLÖMILCH XIV, 525. XV, 183.

6. Im engen Zusammenhange mit dem Vorigen stehen die beiden Entwickelungen

$$\sec 2\vartheta = A_1 \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta} + A_2 \frac{\cos 2\vartheta}{\cos\vartheta^2} + A_3 \frac{\cos 3\vartheta}{\cos\vartheta^3} + \cdots,$$

$$tg\, 2\vartheta = B_1 \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} + B_2 \frac{\sin 2\vartheta}{\cos\vartheta^2} + B_3 \frac{\sin 3\vartheta}{\cos\vartheta^3} + \cdots,$$

deren Gültigkeitsgrenzen und Koeffizienten bestimmt werden sollen.

(320) SCHLÖMILCH XIV, 525. XV, 187.

7. Unter der Voraussetzung, dafs ϑ zwischen den Grenzen $+45^0$ und -45^0 liegt, ist

$$\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}+\frac{1}{2}\frac{\sin 2\vartheta}{\cos\vartheta^2}-\frac{1}{4}\frac{\sin 4\vartheta}{\cos\vartheta^4}-\frac{1}{4}\frac{\sin 5\vartheta}{\cos\vartheta^5}-\frac{1}{8}\frac{\sin 6\vartheta}{\cos\vartheta^6}+\cdots=0,$$

$$\frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta}-\frac{1}{2}\frac{\cos 2\vartheta}{\cos\vartheta^2}-\frac{1}{2}\frac{\cos 3\vartheta}{\cos\vartheta^3}-\frac{1}{4}\frac{\cos 4\vartheta}{\cos\vartheta^4}+\frac{1}{8}\frac{\cos 6\vartheta}{\cos\vartheta^6}+\cdots=0.$$

(413) Stoll XV, 360. XVI, 23.

8. Unter der Voraussetzung $-1 < x < \infty$ gilt für alle μ folgende Entwickelung:

$$(1+x)^\mu = 1 + C_1\frac{x}{2+x} + C_2\left(\frac{x}{2+x}\right)^2 + C_3\left(\frac{x}{2+x}\right)^3 + \cdots$$

Welches sind die Koeffizienten C_1, C_2, $\cdots$ C_n, $\cdots$? Wie läfst sich das Resultat aus der gewöhnlichen binomischen Entwickelung

$$(1+z)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1}z + \binom{\mu}{2}z^2 + \cdots$$

herleiten? Durch Einführung einer imaginären Variablen erhält man noch Formeln für $\cos\mu\vartheta$ und $\sin\mu\vartheta$. An welche Bedingung ist deren Gültigkeit geknüpft?

(47) Schlömilch VIII, 502. IX, 432.

9. Für $l\,(b\sin\varphi^2 - a\cos\varphi^2)$, wo l den natürlichen Logarithmus bedeutet, b, a und φ reell sind und $b > a$ ist, eine Reihe zu finden, die nach den Sinus oder Kosinus von Vielfachen von φ fortschreitet.

(814) Steinke XIX, 510. XX, 272.

Bezeichnet T_n die Anzahl der Teiler der ganzen Zahl n, so ist nach einer von Lambert herrührenden Bemerkung ($x^2 < 1$ vorausgesetzt)

$$f(x) \equiv \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \cdots = T_1x + T_2x^2 + T_3x^3 + \cdots,$$

wonach der Koeffizient 2 nur denjenigen Potenzen von x zukommt, deren Exponenten Primzahlen > 1 sind. Hieraus lassen sich folgende Sätze ableiten:

10. Für die Entwickelung von

$$g(x) \equiv \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} + \cdots = U_1x + U_2x^2 + U_3x^3 + \cdots$$

sind ungerade und gerade n zu unterscheiden; im ersten Falle ist $U_n = T_n$; im zweiten kann man n unter der Form 2^kq darstellen, wo k eine ganze, q eine ungerade Zahl bedeudet; es ist dann $U_n = -(k-1)\,T_q$.

11. Dieselbe Unterscheidung macht sich nötig bei der Entwickelung von

$$h(x) \equiv \frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} - \cdots = V_1 x + V_2 x^2 + V_3 x^3 + \cdots;$$

für ungerade n ist $V_n = T_n$; für $n = 2^k q$ wird $V_n = (k-3)\, T_q$. Beiläufig folgt hieraus, wenn p eine Primzahl > 1 bedeutet, daſs V_n nicht nur für $n = p$, sondern auch für $n = 16p$ den Wert 2 erhält.

(284, 285) Schlömilch XIV, 100. XIV, 522, 523.

---

12. Unter der Voraussetzung $u_1 > u_2 > u_3 \cdots > 0$ sind die beiden unendlichen Reihen $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$ und $1u_1 + 2u_4 + 3u_9 + 4u_{16} + \cdots$ entweder gleichzeitig konvergent oder gleichzeitig divergent. Beispielsweise folgt hieraus, daſs die Reihe $x^{\sqrt{1}} + x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{3}} + x^{\sqrt{4}} + \cdots$ für $0 \leqq x < 1$ konvergiert und für $x \geqq 1$ divergiert.

(144) Schlömilch XII, 37. XII, 361.

13. Aus zwei positiven Zahlen α und β hat man das arithmetische Mittel α_1 und das harmonische Mittel β_1 gebildet, dann wieder aus α_1 und β_1 das arithmetische Mittel α_2 und das harmonische Mittel β_2 u. s. w. Es ist nun zu untersuchen, ob einerseits $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ gegen einen bestimmten Grenzwert a, andererseits $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots$ gegen eine Grenze b konvergieren, ob a und b verschieden oder gleich sind, und wieviel im letzteren Falle der gemeinschaftliche Wert von a und b beträgt, den man das arithmetisch-harmonische Mittel zwischen α und β nennen könnte.

(1107) Schlömilch XXIII, 194. XXIII, 584.

---

§ 15. Arithmetisches Mittel unendlich vieler Gröſsen.

1. Gegeben sind zwei sich rechtwinklig schneidende Achsen OX und OY; auf OX trägt man $OA = a$ ab, teilt OA in n gleiche Teile, schlägt über jedem derselben als Durchmesser einen Kreis und legt von dem auf OY gegebenen Punkte Q an jeden derselben eine Tangente. Welcher Grenze nähert sich das arithmetische Mittel der Quadrate sämtlicher Tangenten, wenn n unendlich groſs wird?

(*420*) Journ. élém. XXI, 32.

2. Für unendlich wachsende n soll der Grenzwert bestimmt werden, gegen den das arithmetische Mittel der Brüche

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+2b}, \cdots \frac{1}{a+(n-1)b}$$

konvergiert, wobei a und b positiv sind.

(386) Schlömilch XV, 289. XV, 601.

3. Man verlangt die Grenzwerte, gegen welche bei unendlich wachsendem n konvergieren a) das arithmetische, b) das harmonische, c) das geometrische Mittel aus den Gliedern der Progression

$$\alpha, \alpha\left(1+\frac{\beta}{n}\right), \alpha\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^2, \cdots \alpha\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^{n-1}.$$

(992) Schlömilch XXI, 590. XXII, 343.

4. Das harmonische Mittel zwischen α und β werde kurz mit $M(\alpha, \beta)$ bezeichnet; man sucht die Grenzwerte, gegen welche die Ausdrücke

$$\frac{1}{n}\left[M\left(a, \frac{b}{n}\right) + M\left(a, \frac{2b}{n}\right) + \cdots + M\left(a, \frac{nb}{n}\right)\right]$$

und

$$\frac{1}{n-1}\left[M\left(\frac{a}{n}, (n-1)\frac{b}{n}\right) + M\left(2\frac{a}{n}, (n-2)\frac{b}{n}\right) + \cdots + M\left((n-1)\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right)\right]$$

bei unendlich wachsendem n konvergieren.

(481) Schlömilch XVI, 124. XVI, 427.

5. Einen gegebenen Halbkreis mit dem Durchmesser AB teilt man in n gleiche Bogen $BB_1 = B_1B_2 = \cdots = B_{n-1}A$. Welcher Grenze nähert sich das arithmetische Mittel der Sehnen $AB, AB_1, AB_2, \cdots$, wenn n unendlich grofs wird?

(*419*) Journ. élém. XX, 516.

6. In einer Ebene sind gegeben ein Kreis mit dem Zentrum C und ein fester Punkt D; man hat den mit der Geraden CD zusammenfallenden Kreisdurchmesser AB in n gleiche Teile geteilt und durch jeden Teilpunkt eine zu AB senkrechte Gerade gezogen, die den Kreis zweimal schneidet, so dafs auf der Peripherie die Punkte $P_1, P_2, \cdots P_{2n}$ entstehen; gesucht wird der Grenzwert, gegen den das arithmetische Mittel von $DP_1, DP_2, \cdots DP_{2n}$ bei unendlich wachsendem n konvergiert, der also in gewissem Sinne als die mittlere Entfernung des Kreisumfanges vom Punkte D gelten kann.

(529) Schlömilch XVI, 429. XVII, 196.

7. Gegeben ist eine Ellipse mit den Halbachsen $CA = a$ und $CB = b$. a) Wird CA in n gleiche Teile geteilt, zu jeder Abscisse CM_k die Ordinate M_kP_k und die Tangente P_kV_k konstruiert, wo V_k auf der Verlängerung von CB liegt, so nähert

sich das arithmetische Mittel aus $CV_0\,(CB)$, $CV_1, \cdots CV_{n-1}$ für $n = \infty$ der Grenze $\frac{1}{2}\pi b$. b) Wird analog CB in n gleiche Teile geteilt, zu jeder Ordinate CN_k die Abscisse N_kQ_k und die Tangente Q_kU_k konstruiert, so nähert sich das arithmetische Mittel aus $CU_0\,(CA)$, $CU_1, \cdots CU_{n-1}$ für $n = \infty$ der Grenze $\frac{1}{2}\pi a$.

(479) Schlömilch XVI, 124. XVI, 425.

8. Die Exzentrizität CF eines aus den Halbachsen $CA = a$ und $CB = b$ konstruierten Ellipsenquadranten ist in n gleiche Teile geteilt und durch jeden Teilpunkt M_k eine Ellipsennormale gelegt, die den Quadranten in P_k schneidet; das arithmetische Mittel der Strecken M_1P_1, $M_2P_2, \cdots M_nP_n$ $(= FA)$ nähert sich dann bei unendlich wachsendem n der Grenze $\frac{\pi b}{4}$. — Wird P_kM_k verlängert bis zum Durchschnitt N_k mit der verlängerten BC, so konvergiert das arithmetische Mittel der Strecken N_1P_1, $N_2P_2, \cdots$ N_nP_n $(= CA)$ gegen die Grenze $\frac{\pi a^2}{4b}$.

(568) Schlömilch XVII, 33. XVII, 441.

9. Welcher Grenze nähert sich das arithmetische Mittel der n Grössen

$$\frac{1}{\sqrt{(n\alpha)^2 + (1\beta)^2}},\ \frac{2}{\sqrt{(n\alpha)^2 + (2\beta)^2}},\ \frac{3}{\sqrt{(n\alpha)^2 + (3\beta)^2}}, \cdots \frac{n}{\sqrt{(n\alpha)^2 + (n\beta)^2}},$$

falls n unendlich wächst?

(305) Schlömilch XIV, 356. XV, 113, 291.

10. Unter welchen Umständen hat das arithmetische Mittel der n Grössen

$$\sqrt{\alpha^2 + n^2\beta^2},\ \sqrt{\alpha^2 + n^2\beta^4},\ \sqrt{\alpha^2 + n^2\beta^6}, \cdots \sqrt{\alpha^2 + n^2\beta^{2n}}$$

für $n = \infty$ einen endlichen Grenzwert und wieviel beträgt dieser?

(306) Schlömilch XIV, 356. XV, 114.

11. Die Kathete $CA = a$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ist in n gleiche Teile geteilt, so dafs $CA_1 = \frac{a}{n}$, $CA_2 = 2\frac{a}{n}, \cdots$ ist; die andere Kathete $CB = b$ ist so geteilt, dafs $CB_2 = \frac{b}{2}$, $CB_3 = \frac{b}{3}$ u. s. w. ist. Man soll den Grenzwert bestimmen, welchem sich das arithmetische Mittel aus den n Strecken A_1B_1, $A_2B_2, \cdots$ A_nB_n bei unendlich wachsendem n nähert.

(387) Schlömilch XV, 289. XV, 603.

12. In einem $\triangle ABC$ sei D die Projektion von C auf AB, ferner sei AB in n gleiche Teile geteilt, deren Endpunkte $P_1, P_2, \cdots$

P_n (B) heifsen mögen; von C aus werde nach jedem Teilpunkte wie z. B. nach P_k eine Gerade gezogen und auf dieser in P_k eine Senkrechte errichtet, die die verlängerte CD in Q_k schneidet; man soll nun den Grenzwert bestimmen, gegen den das arithmetische Mittel der Strecken $P_1 Q_1, P_2 Q_2, \cdots P_n Q_n$ bei unendlich wachsendem n konvergiert.

(416) Schlömilch XV, 440. XVI, 115.

13. Unter Voraussetzung eines positiven echt gebrochenen α und eines beliebigen positiven β soll der Grenzwert von

$$\sqrt{\alpha + \frac{1^2\beta}{n^4}} + \sqrt{\alpha^2 + \frac{2^2\beta}{n^4}} + \sqrt{\alpha^3 + \frac{3^2\beta}{n^4}} + \cdots + \sqrt{\alpha^n + \frac{n^2\beta}{n^4}}$$

für $n = \infty$ bestimmt werden.

(388) Schlömilch XV, 289. XV, 604.

14. Man soll den Grenzwert ermitteln, gegen den die Summe

$$\frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{n}} + \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{2n}} + \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{3n}} + \cdots + \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{nn}}$$

bei unendlich wachsendem n konvergiert.

(660) Schlömilch XVIII, 132. XVIII, 499 (Verallgem.).

15. Man sucht den Grenzwert, gegen den die Summe

$$\sqrt{\frac{\alpha}{1^4} + \frac{\beta}{1n}} + \sqrt{\frac{\alpha}{2^4} + \frac{\beta}{2n}} + \sqrt{\frac{\alpha}{3^4} + \frac{\beta}{3n}} + \cdots + \sqrt{\frac{\alpha}{n^4} + \frac{\beta}{nn}}$$

für $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ bei unendlich wachsendem n konvergiert.

(936) Schlömilch XXI, 116. XXI, 518.

---

§ 16. Besondere Reihen und Produkte.

1. Bezeichnet α einen beliebigen Kreisbogen, so konvergieren die Summen $\sin\frac{\alpha}{n^2} + \sin\frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n\alpha}{n^2}$ und $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n^2} + \operatorname{tg}\frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \operatorname{tg}\frac{n\alpha}{n^2}$ bei unendlich wachsendem n gegen den gemeinschaftlichen Grenzwert $\frac{1}{2}\alpha$.

(639) Schlömilch XVII, 597. XVIII, 350.

2. Ist $S_1 = \sin x + \frac{1}{3}\sin x^3 + \frac{1}{5}\sin x^5 + \cdots$ und $S_2 = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x - \cdots$, so ist $S_1 = 2S_2$.

(423) Educ. Times. XXI, 33.

3. Es sollen die Summen der folgenden Reihen bestimmt werden:

a) $1 + \binom{2}{1} x(1-x) + \binom{4}{2}[x(1-x)]^2 + \binom{6}{3}[x(1-x)]^3 + \cdots,$

b) $1 + \frac{1}{2}\binom{2}{1} x(1-x) + \frac{1}{3}\binom{4}{2}[x(1-x)]^2 + \frac{1}{4}\binom{6}{3}[x(1-x)]^3 + \cdots,$

c) $1 + \frac{1}{2}\binom{2}{1} x(1-x) + \frac{1}{4}\binom{4}{2}[x(1-x)]^2 + \frac{1}{6}\binom{6}{3}[x(1-x)]^3 + \cdots.$

(543) SCHLÖMILCH XVI, 431. XVII, 281.

4. Gesucht wird die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots$$

(307) SCHLÖMILCH XIV, 357. XV, 115.

5. Gesucht wird der Wert des unendlichen Produktes

$$\frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{1+x^{\frac{1}{4}}}{2} \cdot \frac{1+x^{\frac{1}{8}}}{2} \cdots\cdot$$

(308) SCHLÖMILCH XIV, 357. XV, 116.

6. Man sucht die Summen der beiden unendlichen Reihen

$$\sum \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin n\omega}{z^n + \cos n\omega} \text{ und} \sum \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \frac{\omega}{n}}{z^{\frac{1}{n}} + \cos \frac{\omega}{n}},$$ worin sich die

Summenzeichen auf die Werte $n = 1, 2, 4, 8, 16, \cdots$ beziehen. Unter arc tg α werde hierbei derjenige zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltene Bogen verstanden, der α zur Tangente hat.

(551) SCHLÖMILCH XVI, 503. XVII, 354.

7. Die beiden für positive echt gebrochene x und y geltenden Ungleichungen

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 < l\sqrt{(1+x)^2 + y^2} < x + \tfrac{1}{2}y^2,^*$$

$$y - xy - \tfrac{1}{3}y^3 < \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{1+x} < y$$

soll man beweisen und daraus den Satz herleiten, daſs das Produkt

---

*) Fassung des Lösers der Aufgabe; XXIV, 609 steht

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 < l\,(1 + x + y) < x + y.$$

$$\left(1+\frac{1^{p-1}(\alpha+i\beta)}{n^p}\right)\left(1+\frac{2^{p-1}(\alpha+i\beta)}{n^p}\right)\left(1+\frac{3^{p-1}(\alpha+i\beta)}{n^p}\right)\cdots$$

$\left(1+\frac{n^{p-1}(\alpha+i\beta)}{n^p}\right)$, worin p eine Konstante ≥ 1 ist, bei unendlich wachsendem n gegen die Grenze $e^{\frac{\alpha}{p}}\left(\cos\frac{\beta}{p}+i\sin\frac{\beta}{p}\right)$ konvergiert. Im speziellen Fall $p=1$ wird hieraus der bekannte Satz

$$\lim\left(1+\frac{\alpha+i\beta}{n}\right)^n = e^\alpha(\cos\beta+i\sin\beta).$$

(1243) SCHLÖMILCH XXIV, 609. XXV, 348.

8. Die Summe der reziproken Triangularzahlen ist bekanntlich $S_3=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots=2$; für die Quadratzahlen ist $S_4=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$. Man verlangt nun eine Formel für die Summe S_k der reziproken Polygonalzahlen k ter Ordnung. Abgesehen von dem Falle $k=4$ reicht die Gleichung

$$\int_0^1 x^\mu\,dx=\frac{1}{\mu+1}\ (\mu>-1)$$

aus, um S_k in ein bestimmtes Integral zu verwandeln, dessen Wert nach den gewöhnlichen Methoden entwickelt werden kann.

(1086) SCHLÖMILCH XXII, 596. XXIII, 349.

9. Setzt man $1^n+2^n+3^n+\cdots+x^n=S_n(x)$, wo $S_n(x)$ dann mit der bekannten Bernoullischen Funktion durch die Gleichung verbunden ist: $S_n(x)=\frac{\varphi(x+1,m+1)}{n+1}$,

$$\varphi(z,m)=z^m-\tfrac{1}{2}mz^{m-1}+m_2B_1z^{m-2}-m_4B_2z^{m-4}+\cdots,$$

so ist

$$1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\cdots=(-1)^n(2\pi)^{2n+1}\cdot\frac{S_{2n}\left(-\frac{1}{4}\right)}{2\cdot(2n)!}.$$

(Verallgemeinerung der Leibnizschen Reihe $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{1}{4}\pi$).

(990) SIEVERS XXI, 521. XXII, 271.

B.

Planimetrie.*)

I. Lehrsätze.

§ 1. Das Dreieck.

a. Das rechtwinklige Dreieck.

1. In dem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck ACG ($CA = CG$) ist AG in drei gleiche Teile geteilt, der G zunächst liegende Teilpunkt sei B; ferner sind im Dreieck ABC die Höhen AD, BE und CF gefällt, H sei ihr Schnittpunkt. Bezeichnet man nun die Elemente des Dreiecks ABC wie gewöhnlich, die des Höhendreiecks DEF mit Strichen, so ist

a) $\operatorname{tg}\alpha = 1;\ \operatorname{tg}\gamma = 2;\ \operatorname{tg}\beta = 3.$

b) $\triangle = 5\triangle' = c^2 - a^2 = \frac{1}{3}b^2.$

c) $AE = 2\,CE,\ CD = \frac{3}{2}BD;\ BF = \frac{1}{3}FA.$

d) $AH = 5\,HD,\ BH = HE,\ CH = 2\,HF.$

e) $\varrho' = \frac{1}{5}r.$**)

Beweis: (R.)

(*254*) Educ. Times. XVI, 357.

---

*) Abkürzungen.

(G.)	bedeutet	Beweis	oder	Lösung	geometrisch mit Benutzung der Sätze von der Kongruenz und Ähnlichkeit.
(G.R.)	„	„	„	„	geometrisch, zum Teil durch Rechnung.
(P.L.)	„	„	„	„	mit Benutzung der perspektivischen Lage irgend welcher Gebilde.
(H.B.)	„	„	„	„	mit Benutzung der Sätze über harmonische Büschel u. s. w.
(P.G.)	„	„	„	„	durch projektive Punktreihen u. dergl.
(R.)	„	„	„	„	durch Rechnung.
(T.R.)	„	„	„	„	trigonometrische Rechnung.
(G.T.)	„	„	„	„	geometrisch mit trigonometrischer Rechnung.
(R.K.)	„	„	„	„	durch rechtwinklige Koordinaten.
(K.M.)	„	„	„	„	mit Hilfe irgend welcher anderen Koordinaten.

**) Auch folgende Relationen ergeben sich leicht f) $\alpha' = 90^0$, $\operatorname{tg}\beta' = \frac{3}{4}$; $\operatorname{tg}\gamma' = \frac{4}{3}$; g) $a:b:c = \sqrt{5}:3:2\sqrt{2}$; h) $a':b':c' = 5:3:4$; i) $\frac{h_a}{a} = \frac{6}{5}$, $\frac{h_b}{b} = \frac{2}{3}$, $\frac{h_c}{c} = \frac{3}{4}$.

2. Verlängert man die Katheten eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c über die Hypotenuse hinaus um c und verbindet die Endpunkte, so entsteht ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, in dem der Überschuſs der Summe der Katheten über die Hypotenuse $= c$ ist.

Beweis: (R.) und (G. 3).

(1310) EMMERICH XXV, 431. XXVI, 182; 280 Druckfehlerverzeichnis.

3. Über der Hypotenuse BC des rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks ABC ist der Halbkreis gezeichnet, ferner der Kreis (A, AB). Es soll bewiesen werden, dass die entstandene Mondsichel mit dem Dreieck gleichen Inhalt hat.*)

Beweis: (R.)

(1185) BOSSE XXIV, 189. XXIV, 604.

4. Das von der Spitze des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällte Lot teilt dieses Dreieck in zwei Teildreiecke; zu beweisen, dass das Quadrat des Radius des in das ganze Dreieck beschriebenen Kreises gleich ist der Summe der Quadrate der Radien der in die Teildreiecke beschriebenen Kreise.

(4_1) Nouv. Ann. X, 14. —

5. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC fällt man auf die Hypotenuse AB die Höhe $CD = h$ und auf AB im Mittelpunkt P errichtet man die Senkrechte, welche BC in E und AC in F trifft. Die Radien der Inkreise von ADC und BDC seien r_1 und r_2, diejenigen von APF und BPE seien ϱ_1 und ϱ_2; der Radius des Umkreises von ABC sei r und der des Inkreises ϱ. Dann ist

a) $\frac{r_1}{\varrho_1} + \frac{r_2}{\varrho_2} = 2$; b) $r_1\varrho_1 = r_2\varrho_2 = \frac{1}{2}\varrho^2$; c) $r^2 r_1 r_2 = h^2 \varrho_1 \varrho_2$.

Beweis: (G. R.)

(*685*) Journ. élém. XXV, 517.

6. Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Strecken, in welche die Hypotenuse durch den Berührungspunkt des Inkreises geteilt wird.

Beweis: (G.); (T. R.); (R. 2).

(1129) MATING-SAMMLER XXIII, 352. XXIV, 100.

---

*) Zeichnet man 2 gleiche sich berührende Kreise und um den Berührungspunkt einen dritten Kreis, der beide unter dem Durchmesser schneidet, zieht man ferner zwischen den Schnittpunkten alle möglichen Verbindungsgeraden, so sind die 4 Flächenstücke, welche einem der drei Kreise allein angehören, unter sich und mit jedem der vier Dreiecke um den Berührungspunkt inhaltsgleich. Ritgen.

7. Wenn man in einem Dreieck ABC hat: $A + B = 90^0$, so ist $2c^{\pm 2} = (a + b)^{\pm 2} + (a - b)^{\pm 2}$, wo die oberen oder unteren Zeichen zusammen zu nehmen sind.

(*28₂*) Nouv. Ann. XI, 110. —

8. Zwei rechtwinklige Dreiecke, von denen das eine zu Katheten hat die Höhe und die Kathetensumme des anderen, haben denselben Inkreis.

Beweis: (R.).

(567) v. Schäwen XVII, 33. XVII, 441.

9. Die Verbindungslinie einer spitzen Ecke eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Mittelpunkt der Hypotenusenhöhe bestimmt auf der gegenüberliegenden Kathete zwei Abschnitte, die sich zueinander verhalten wie das Quadrat über der Kathete zum Quadrat über der Hypotenusenhöhe.

Beweis: (R. 2); (T. R. 3); (G. 6), teils mit Benutzung neuerer Geometrie.

(1146) Rulf XXIII, 431. XXIV, 263.

10. a) Verlängert man im rechtwinkligen $\triangle ABC$ die Hypotenusenhöhe CD um ihre eigene Länge über C hinaus bis E und verbindet A mit E, so entstehen auf der gegenüberliegenden Kathete BC zwei Abschnitte BF und CF, und es verhält sich $BF : CF = 2a^2 : h^2$.

b) Verlängert man BC unter die Hypotenuse um ihre eigene Länge bis E' und trifft $E'A$ die Kathete BC in F', so verhält sich $BF' : CF' = a^2 : 2h^2$.

Beweis: (T. R.); (G. 4), teils mit Benutzung neuerer Geometrie.

(1147) Rulf XXIII, 510. XXIV, 264.

11. Zieht man im rechtwinkligen Dreieck ABC eine Senkrechte zur Mittellinie CM der Hypotenuse AB, so wird das zwischen den Katheten liegende Stück $A'B'$ derselben durch die Höhe CD in D' halbiert.

Beweis: (G. 6) teils mit Benutzung neuerer Geometrie (H. B.)

(1155) Rulf XXIII, 591. XXIV, 337.

12. ABC sei ein bei C rechtwinkliges Dreieck, $CD \perp AB$, E und F seien die Mittelpunkte der in die Dreiecke ADC und BDC gezeichneten Kreise; Parallelen durch E und F zu CD treffen AC und BC bez. in E' und F'; dann ist $CE' = CF'$.

Beweis: (G.).

(*686*) Mathesis. XXV, 517.

Vergl. Nr. 27.

b. Das gleichseitige Dreieck.

13. Wenn durch die Ecken B und C des gleichseitigen Dreiecks ABC der Kreis mit dem Halbmesser BC gezeichnet wird, dessen Mittelpunkt mit A symmetrisch zu BC liegt und wenn P ein beliebiger Punkt desselben ist, so ist stets $PA^2 = PB^2 + PC^2$.

Beweis: (G. T.); (R. K.); (G. 3), zum Teil mit Benutzung neuerer Geometrie.

(1100) Kücker XXIII, 125. XXIII, 507.

14. Die Geraden, welche die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ABC (Seite a) mit einem Punkte D verbinden, mögen den Umkreis (O, r) in A', B', C' treffen; dann ist $S = AD \cdot AA' + BD \cdot BB' + CD \cdot CC' = 2a^2$.

Beweis: (G. T.).

(*560*) Nyt Tidsskrift. XXIV, 25.

15. Wenn man im gleichseitigen Dreieck ABC von dem beliebigen Punkt M auf AB die Senkrechte MD fällt, so ist $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 3r(2MD - r)$, wo r der Radius des Umkreises ist.

Beweis: (R.).

(*679*) Journ. élém. XXV, 515.

16. In dem gleichseitigen Dreieck ABC liege D auf BC so, dafs $BD = \frac{1}{3} BC$ und E auf AB so, dafs $AE = ED$ ist, dann ist $EC = EB + BD$.

Beweis: (R.).

(*681*) Educ. Times. XXV, 515.

17. Sind u, v, w die Abstände eines beliebigen Punktes P von den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a, so ist stets $u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{3}\sqrt{u^4 + v^4 + w^4 + a^4}$.*)

Beweis: (R.); (R. K.).

(1306) Junker XXV, 352. XXVI, 180.

18. Sind ABC und A_1BC zwei aneinander liegende gleichseitige Dreiecke und ist $AA_1A_2A_3$ eine harmonische Punktreihe, so ist A_2BC dem Schwerliniendreieck von A_3BC ähnlich und umgekehrt.

Beweis: (G. T.).**)

(864b) Artzt XX, 274. XXI, 26.

Vergl. C. § 4 Nr. 1—3.

---

*) Vergl. C. § 5. Nr. 40 und B. § 1. Nr. 94.

**) Vergl. B. § 1. Nr. 19.

c. Das gleichschenklige Dreieck.

19. Ist $AB = AC$ und $A'B'C'$ das Schwerliniendreieck von ABC, so ist $\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\alpha'}{2} = 3$.

Beweis: (G. T. 2).

(864a) ARTZT XX, 274. XXI, 26.

20. Verbindet man einen Endpunkt z. B. A der Grundlinie AB eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit der Mitte M der Höhe CD, so schneidet die Verbindungslinie BM vom gegenüberliegenden Schenkel AC ein Drittel desselben, von der Spitze aus gerechnet, ab.*)

Beweis: (H. B. 2); (G. T.); (G. 2), teils mit Benutzung neuerer Geometrie.

(976) RULF XXI, 429. XXII, 192.

21. In dem gleichschenkligen Dreieck ABC sei das Verhältnis der Grundlinie BC zur Höhe $AH = 9 : 8$; ferner sei M ein Punkt, welcher AH so teilt, dafs $MH : AH = 3 : 5$ ist; werden nun durch M zwei Gerade DMG und EMF (D und E auf BC), gezogen, welche mit der Höhe Winkel von 45^0 bilden, so wird ABC durch diese beiden Geraden in vier gleiche Teile geteilt.

Beweis: (G.).

(*683*) Journ. élém. XXV, 516.

22. Zieht man zwischen den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks eine beliebige Strecke, so ist die durch den Mittelpunkt derselben zur Grundlinie gezogene Parallele gleich der Projektion der Strecke auf die Grundlinie.

Beweis: (G.); (G. T.).

(1165) RULF XXIV, 23. XXIV, 445.

23. In einem Kreis ist ein gleichschenkliges spitzwinkliges Dreieck gezeichnet; über einem seiner Schenkel als Grundlinie zeichnet man in den Kreis ein zweites gleichschenkliges spitzwinkliges Dreieck, über einem der Schenkel des letzteren als Grundlinie ein drittes u. s. w. Die Grenze, welcher sich der Winkel an der Spitze nähert, ist 60^0.

Beweis: (R.); (G.).

(1043) WEINMEISTER XXII, 275. XXIII, 48.

24. Sind von den sechs Teilen, in welche die Winkel eines Dreiecks durch seine Mittellinien zerlegt werden, irgend zwei ein-

*) Der Satz gilt für jedes Dreieck in Bezug auf eine Mittellinie.

ander gleich, so ist das Dreieck entweder gleichschenklig oder es ist dem aus seinen Mittellinien gebildeten Dreieck ähnlich.

Beweis: (G.); (T. R.).

(1266) EMMERICH XXV, 116. XXV, 582.

25. Mufs ein Dreieck gleichschenklig sein, wenn zwei seiner Aufsenwinkelhalbierenden, von der Ecke bis zur Gegenseite gemessen, gleich lang sind?

Beweis: (R.); (T. R.).

(1267) EMMERICH XXV, 116. XXV, 583.

Vergl. C. § 4 Nr. 3 u. 4; ferner die Aufsätze über den Lehmus-Steiner'schen Satz: „Wenn die Winkelhalbierenden zweier Dreieckswinkel gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig" von Günther, Gerlach und Krüger XXIII, 480, 579—581, XXV, 438—441 und von Emmerich XXVI, 173 und XXIX, 90.

d. Das ungleichseitige Dreieck.*)

α. Gröfsenverhältnisse zwischen Strecken.**)

26. Bilden die Seiten eines Dreiecks eine arithmetische Reihe, deren Differenz $\frac{1}{4}\varrho$ ist, wo ϱ den Radius des Inkreises darstellt, so ist $a = \frac{15}{4}\varrho$; $b = \frac{7}{2}\varrho$; $c = \frac{13}{4}\varrho$.

Beweis: (R.).

(*689*) Mathesis. XXV, 518.

27. Bilden die Seiten c, b, a und die Höhe h_c eines Dreiecks eine geometrische Progression, so ist das Dreieck rechtwinklig und $a = \frac{c(\sqrt{5}-1)}{2}$ und $b = c\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Beweis: (R.).

(*251*) Journ. élém. XVI, 207.

28. Die Seiten des Dreiecks, dessen Ecken die Mittelpunkte O des umgeschriebenen, I des eingeschriebenen, N des Feuerbach'schen Kreises bilden, sind, wenn a, b, c die Seiten, r der Radius des umgeschriebenen, ϱ der des eingeschriebenen Kreises des gegebenen Dreiecks sind,

$$NI = \frac{1}{2}r - \varrho;\ OI = \sqrt{r^2 - 2r\varrho};\ ON = \frac{1}{2}\sqrt{9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Beweis: (R.).

(*250*) Math. Magazine. XVI, 207.

*) Vergl. Herrmann: Ableitung einiger planimetrischer Sätze durch Parallelverschiebung, XXV, 561—573; Wimmenauer: Eine neue Ableitung der Hauptsätze vom Feuerbach'schen Kreise XXV, 32—33.

**) Vergl. Schlömilch: Über rationale Dreiecke und Vierecke XVIV, 401—409. Worpitzky: Über die Pythagoreischen oder rationalen Dreiecke XVII, 256.

29. Die Gleichungen der Winkelhalbierenden w_a, w_a', w_b, w_b', w_c, w_c' eines Dreiecks ABC, in welchem $CD \perp AB$ und $CD = h$, $BD = p$ und $AD = q$ gesetzt ist, sind für w_a: $y = \frac{b-q}{h} x$;

$$w_a': y = -\frac{h}{b-q} x; \quad w_b: y = -\frac{a-p}{h}(x-c);$$

$$w_b': y = \frac{h}{a-p}(x-c); \quad w_c: y = -\frac{h}{bp-aq}((a+b)x - bc);$$

$$w_c': y = \frac{bp-aq}{h(a+b)}\left(x + \frac{bc}{a-b}\right).$$

Ferner hat w_c die Länge $\frac{1}{p-q}\sqrt{h^2(a-b)^2 + (aq-bq)^2}$.

Lösung: (R. K.).

(986) Strübing XXI, 520. XXII, 268.

30. In den vier Ecken eines Quadrats, welches in einer horizontalen Ebene liegt, stehen vier Bäume, deren Spitzen E, F, G, H von einem Punkt O innerhalb des Quadrats gleich weit entfernt sind; von drei derselben kennt man die Höhen nämlich $AE = a$, $BF = b$, $CG = c$; dann ist die Höhe des vierten

$$DH = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}.$$

Beweis: (R.).

(*248*) Math. Magazine. XVI, 206.

31. Der Umfang eines Dreiecks*) und seines Inkreises verhalten sich ebenso wie die Inhalte beider Figuren. Dieselbe Beziehung findet zwischen den Oberflächen und den Inhalten der durch Drehung eines gleichschenkligen Dreiecks um die Symmetrielinie entstandenen Körper statt.

Beweis: (R.)

(1119) Sievers XXIII, 271. XXIV, 17.

32. Das Quadrat über einer Dreiecksseite, an welcher kein stumpfer Winkel liegt, ist gleich der Summe der Rechtecke aus je einer der beiden andern Seiten und der Projektion der ersten auf sie.

Beweis: (G.).

Duda und Brockmann. II, 213 und IV, 39.

33. In jedem Dreieck ist das harmonische Mittel m von zwei Seiten a und b größer als die Winkelhalbierende w_c aus der gemeinsamen Ecke.

Beweis: (R.); (T. R. 2).

(1302) Krüger XXV, 351. XXVI, 176.

---

*) Der Satz, der nur für ein gleichschenkliges Dreieck gestellt war, gilt in obiger Fassung. Emmerich.

34. Wenn die eine Seite c eines Dreiecks das harmonische Mittel zwischen den beiden andern a und b darstellen soll, so mufs $a < b(\sqrt{2} + 1)$ sein.

Beweis: (R.).

(457) Schlömilch XVI, 25. XVI, 347.

35. Bilden die Quadrate der Höhe $CH = h$, der Winkelhalbierenden $CD = w$ und der Mittellinie $CM = t$ eines Dreiecks eine arithmetische Reihe, so kann a) wenn das Quadrat des Durchmessers $2r$ des umgeschriebenen Kreises ein Glied der Reihe ist, dies nicht eines der 7 ersten Glieder sein; b) mufs das Quadrat der Seite c, falls es ein Glied der Reihe ist, das vierte sein; dann ist $4r^2$ das achte Glied und die Winkel sind $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{2}{8}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$.

Beweis: (R.).

(*252*) Mathesis. XVI, 208.

36. d_1, d_2, d_3 seien die Segmenthöhen des um ein Dreieck beschriebenen Kreises (Radius r); ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 seien die Radien der Berührungskreise. Dann ist 1) $d_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{2}$ etc. 2) $\varrho_1 - \varrho = 2(d_1 - d_2)$ etc. 3) $d_1 + d_2 + d_3 = 2r - \varrho$; 4) $-d_1 + d_2 + d_3 = 2r - \varrho_1$ etc.

(165) Holzmüller XII, 266. —

37. Um $\triangle ABC$ sei der Kreis mit dem Mittelpunkt O beschrieben; der auf AB senkrechte Durchmesser EOF (F näher an C) treffe AB in D, und G sei die Projektion von C auf EF. Dann ist *a*) $\frac{1}{4}(a - b)^2 = DE \cdot FG$; *b*) $\frac{1}{4}(a + b)^2 = DF \cdot GE$.

Beweis: (G. R.).

(*558*) Journ. élém. XXIV, 24.

38. Wenn man in einem Dreieck vom Mittelpunkt I des Inkreises aus die Entfernung zwischen dem Höhenschnittpunkt und dem Mittelpunkt M des Umkreises unter einem rechten Winkel sieht, so ist $a^2 + b^2 + c^2 = 4(2r - \varrho)(r + \varrho)$, wo r der Radius des Umkreises, ϱ der des Inkreises ist.*)

Beweis: (G. R. 2); (T. R.).

(704) Beyens XVIII, 446. XIX, 181.

39. Von einem Dreieck ABC (Umkreisradius r) kennt man die beiden Seiten a und b. Die Mittellinie t_c teilt das $\triangle ABC$ in zwei Dreiecke, deren Umkreisradien r_a und r_b sind; wenn nun $r_a + r_b = nr$ ist, so ist $t_c = \frac{nab}{a + b}$.

Beweis: (R.).

(*693*) Nyt Tidsskrift. XXV, 520.

---

*) Vergl. Adams: Die merkwürdigen Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks p. 65 (1846).

40. Wird im Dreieck ABC die Seite AB von dem Inkreise und den Ankreisen bez. in F, F', F'', F''' berührt, so ist $AF \cdot AF''' + AF' \cdot AF'' = ab$. Was ergiebt sich, wenn AB Hypotenuse ist?*)

Beweis: (G. T.); (R.); (T. R.).

(1198) Finsterbusch XXIV, 271. XXV, 46.

41. Im Dreiecke ABC sei $CD = w_c$ die Winkelhalbierende und $CM = t_c$ Mittellinie; ist nun $\sphericalangle (t_c w_c) = \sphericalangle (c t_c)$, so ist $ab = \frac{1}{4} c^2$?

Beweis: (G.).

(*253*) Mathesis. XVI, 357.

42. Ist D ein beliebiger Punkt der Seite BC des Dreiecks ABC und treffen zwei von B und C gezogene Parallelen AD in B' und C', so ist $BC \cdot AD = AB' \cdot DC + AC' \cdot BD$.

Spezielle Fälle: a) Sind B' und C' die Durchschnittspunkte von AD mit den Kreisen (B, BD) und (C, CD), so ist $BB' \parallel CC'$ und $AD^2 \cdot BC = CD(AB^2 - BD^2) + BD(AC^2 - CD^2)$. b) Ist AD die Halbierungslinie des Winkels BAC, so wird

$$AD^2(AB + AC) = AC(AB^2 - BD^2) + AB(AC^2 - CD^2).$$

Beweis: (G.).

(*554*) Mathesis. XXIII, 516.

43. In jedem Dreieck verhält sich das Produkt der drei Seiten zu dem Produkt der drei Seiten des Höhenfufspunktdreiecks wie das Produkt der drei oberen Höhenabschnitte zu dem Produkt der drei unteren Höhenabschnitte.

Beweis: (G. T.).

(1268) Pappit XXV, 116. XXV, 584.

44. Der Radius des um ABC beschriebenen Kreises sei r, der des eingeschriebenen ϱ, H der Höhenschnittpunkt. Dann ist $AH + BH + CH = 2r + 2\varrho$.

Beweis: (T. R.).

(423) Adami XV, 441. XVI, 122.

45. In jedem Dreieck, dessen Seiten nicht alle einander gleich sind, ist $2\varrho < r$,

Beweis: (G.); (G. T.); (T. R.); (R. 2).

(477) Emmerich XVI, 124. XVI, 423.

---

*) Die vier Punkte, in denen die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks von den Berührungskreisen berührt wird, sind harmonische Punkte.

46. Während für jedes Dreieck die Beziehung besteht $r \geqq 2\varrho$, ist beim stumpfwinkligen und beim ungleichschenklig rechtwinkligen Dreieck $r > (1 + \sqrt{2})\,\varrho$.

Beweis: (R.); (G. T.).

(1291) EMMERICH XXV, 279. XXVI, 104.

47. (O, r) sei der Umkreis von $\triangle ABC$; BC werde von der Senkrechten in A auf AC in A_1 und von der in A auf AB in A_2 getroffen. (O_a, r_a), (O_b, r_b), (O_c, r_c) seien die Umkreise von bzw. AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2. Dann ist a) $r_a = r \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$; $r_b = r \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma$; $r_c = r \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$. b) Der Inhalt des Dreiecks $O_aO_bO_c$ ist gleich dem von $A'B'C'$, welches man erhält, wenn man an den Umkreis in A, B, C Tangenten legt.

Beweis: (G. T.).

(*601*) Journ. élém. XXIV, 460.

48. Wenn die Fufspunkte zweier Höhen und der Umkreismittelpunkt O eines Dreiecks der Lage nach gegeben sind, so läfst sich der Radius des Umkreises berechnen.

Beweis: (R.) Biquadratische Gleichung.

(1182) BROCKMANN XXIV, 189. XXIV, 603.

49. Es seien ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c die Radien der Berührungskreise eines Dreiecks; zu beweisen, dafs

$$a + b + c = 3\sqrt{\frac{\varrho_a\varrho_b\varrho_c}{\varrho}} - \sqrt{\frac{\varrho\varrho_b\varrho_c}{\varrho_a}} - \sqrt{\frac{\varrho\varrho_a\varrho_c}{\varrho_b}} - \sqrt{\frac{\varrho\varrho_a\varrho_b}{\varrho_c}} \text{ ist.}$$

(9_1) Nouv. Ann. X, 15. —

50. Bezeichnet man mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Radien der drei Kreise, welche den Inkreis eines Dreiecks und je zwei Seiten berühren, so ist der Radius des Inkreises $\varrho = \sqrt{\varrho_1\varrho_2} + \sqrt{\varrho_2\varrho_3} + \sqrt{\varrho_3\varrho_1}$.*)

Beweis: (T. R. 3).

(587) v. SCHÄWEN XVII, 200. XVII, 589.

51. Die Seiten eines Dreiecks seien a, b, c und zwar sei $a < b < c$; dann sind die Bedingungen dafür, dafs sich aus den Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c der drei Ankreise ein neues Dreieck bilden läfst, 1) $(a + b - c)^2 > 4(c - a)(c - b)$ oder 2) $ab\cos\gamma > (c - a)(c - b)$ oder 3) $\cos\gamma > \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma$.

Beweis: (R.) und (T. R.).

(1226) SCHLÖMILCH XXIV, 459. XXV, 273.

---

*) Bezeichnen r_1, r_2, r_3 die Radien der drei Kreise, welche den Inkreis und je zwei Seiten in der Verlängerung berühren, so ist der Radius des Inkreises $\varrho = \dfrac{\sqrt{r_1r_2r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}}$. EMMERICH.

52. Ist O der Mittelpunkt des Inkreises im Dreieck ABC, so bestehen die Gleichungen $\frac{AO^2}{bc}+\frac{BO^2}{ac}+\frac{CO^2}{ab}=1$ und

$$\frac{AO^2-BO^2}{c}+\frac{BO^2-CO^2}{a}+\frac{CO^2-AO^2}{b}=0.$$

Beweis: (R.); (T. R.).
(741) WEBER XIX, 32. XIX, 424.

53. Ist $CO=m$ die Verbindungslinie des Mittelpunktes O des Inkreises eines Dreiecks ABC mit einer Ecke, sind ferner r und ϱ die Radien des Um- resp. Inkreises, so ist $m^2=2r(h_c-2\varrho)$.
Beweis: (G.); (G. T. 3).
(877) BLEICHER XX, 350. XXI, 112.

54. Ist O Inkreismittelpunkt von $\triangle ABC$, so ist

$$\frac{AO^2}{AB\cdot AC}+\frac{BO^2}{BA\cdot BC}+\frac{CO^2}{CA\cdot CB}=1.$$

(vergl. Baltzer, El. der Math. 2. Bd. § 14 Nr. 22).
Beweis: (G. R. 2); (T. R. 2).
(1343) DAENELL XXV, 589. XXVI, 426.

55. Zieht man im Dreieck ABC nach BC die beliebige Transversale AD und von D zu CA und BA Parallelen, welche AB und AC bez. in E und F treffen, so ist a) $AD^2+BD\cdot CD=AB\cdot AE+AC\cdot AF$ und b) $AB^2\cdot CD+AC^2\cdot BD=BC\cdot BD\cdot CD=AD^2\cdot BC$.
Beweis: (T. R.).
(*690*) Mathesis. XXV, 518.

56. Ist q die Seite eines in ein Dreieck ABC gezeichneten Quadrats, dessen eine Seite auf BC liegt und p das Lot AD von A auf BC, so ist $\frac{1}{a}+\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$.
Beweis: (G.).
(*680*) Educ. Times. XXV, 151.

57. Teilt die Linie i_a die Seite a eines Dreiecks nach dem Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten b und c, und ist t_a die Mittellinie zur Seite a, so ist $\frac{t_a+i_a}{t_a-i_a}=\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2$.*)
Beweis: (G. T. 2).
(241) FUHRMANN XIII, 283. XIV, 187.

*) Erweiterung: Bedeuten allgemein i_a und t_a zwei Winkelgegentransversalen, welche BC in D so teilen, dafs $CD:BD=b^n:c^n$ sich verhält, so ist $\frac{t_a+i_a}{t_a-i_a}=\frac{b+c}{b-c}\cdot\frac{b^{n-1}+c^{n-1}}{b^{n-1}-c^{n-1}}$. Kiehl.

58. Ist d die Entfernung des Mittelpunktes M des Umkreises vom Dreieck ABC vom Nagelschen Punkt I (dem Punkt, in welchem sich die Geraden schneiden, welche die Ecken mit den Berührungspunkten der*) Ankreise verbinden); sind ferner r und ϱ die Radien des Um- und Inkreises von ABC, so ist $\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}r - \varrho$.

Beweis: (G.) Vergl. H. § 6, Nr. 26.

(*380*) Journ. élém. XX, 34.

59. Zieht man durch einen Punkt P der Seite AB des Dreiecks ABC oder ihrer Verlängerung die Parallele PQ zu BC bis AC, und entsprechend $QR \parallel AB, RS \parallel AC, ST \parallel BC, TU \parallel AB$, endlich durch U die Parallele zu AC, so trifft diese sechste Parallele wieder im Ausgangspunkt P ein. Liegt P auf AB selbst, so ist die Summe der sechs Parallelen gleich dem Umfang des Dreiecks ABC, liegt aber P auf der Verlängerung von AB, so ist die Differenz aus der Summe der nicht aufeinanderfolgenden Parallelen und der Summe der drei anderen gleich dem Umfange.**)

Beweis: (G. 2) Vergl. § 3, Nr. 6.

(859 a) Pappit XX, 274. XXI, 23.

60. In jedem Dreieck ist bekanntlich das Produkt der beiden Abschnitte, in welche die Höhe durch den Höhenschnittpunkt geteilt wird, konstant gleich $2P$; und zwar ist

$$P = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{64\,s\,(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wo $2s = a + b + c$ ist.

Lösung: (T. R.)

(1293) Pappit XXV, 279. XXVI, 106.

61. Durch P (s. vorige Aufgabe) sollen ausgedrückt werden:

a) das Produkt der Entfernungen des Mittelpunktes des Umkreises von den drei Seiten;

b) das Produkt der drei oberen Höhenabschnitte;

c) das Produkt der drei unteren Höhenabschnitte;

d) das Produkt der drei Seiten des Höhenfußpunktdreiecks;

e) das Verhältnis des letzten Produktes zu dem der drei Höhen.

---

*) „Der Ankreise" statt „des Inkreises" wie XX, 34 irrtümlich angegeben, zu lesen.

**) Schneiden sich QR, ST, PU in X, Y, Z, so haben die ähnlichen Dreiecke ABC und XYZ denselben Schwerpunkt, es kann daher unbeschadet der Schwerpunktslage der restierenden Fläche herausgeschnitten werden.

Liegt P auf AB und sollen sich QR, ST und PU in einem Punkte schneiden, so ist $AP = \frac{1}{3}AB$.

Lösung: (T. R.) a) $\frac{1}{8} abc \cdot \frac{P}{\triangle}$; b) $abc \cdot \frac{P}{\triangle}$; c) $\frac{8\triangle}{abc} P^2$; d) $\frac{8\triangle^2}{abc} P$; e) $\frac{P}{\triangle}$.

(1294) Pappit XXV, 279. XXVI, 106.

62. Der Umfang eines Dreiecks verhält sich zum Umfange des Höhenfuſspunktdreiecks wie der Radius des Umkreises zu dem des Inkreises.

Beweis: (T. R.)

(1295) Pappit XXV, 279. XXVI, 106.

63. In einem Dreieck, dessen Inhalt mit $\triangle$ bezeichnet werde, ist

a) die Summe der Produkte aus je einer Seite und dem zugehörigen unteren Höhenabschnitt $= 2\triangle$;

b) die Summe der Produkte aus je einer Seite und dem entsprechenden oberen Höhenabschnitt $= 4\triangle$;

c) die Summe der Produkte aus je einer Seite und der zugehörigen Höhe $= 6\triangle$.

Beweis: (G.)

(1296) Pappit XXV, 279. XXVI, 107.

64. Das Produkt der drei Seiten des Höhenfuſspunktdreiecks ist gleich dem Produkt der nicht zusammenhängenden Seitenabschnitte des ursprünglichen Dreiecks.

Beweis: (T. R.)

(1297) Pappit XXV, 351. XXVI, 107.

65. Das Produkt einer Höhe und ihres unteren Abschnittes ist gleich dem Produkt der beiden Abschnitte der zugehörigen Seite.*)

Beweis: (G.); (T. R.)

(1298) Pappit XXV, 351. XXVI, 107.

66. Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sei S, BE und CF seien Mittellinien. Wenn $AFSE$ ein Sehnenviereck und $bc = na^2$ ist, so ist $1 \geqq n \geqq \frac{1}{2}$.

Beweis: (G. T.)

(*694*) Nyt Tidsskrift. XXV, 520.

---

*) Das erwähnte Produkt ist auch gleich dem Produkt der entsprechenden Seiten des Fuſspunktdreiecks.

β. Inhaltsbestimmung von Dreiecken oder einzelner Teile.

67. In jedem Dreieck gilt folgende Beziehung $\triangle = \sqrt{\frac{1}{2} r h_a h_b h_c}$.
Beweis: (R.)
(*692*) Nyt Tidsskrift. XXV, 519.

68. Bezeichnet man in einem Dreieck die drei Halbierungslinien der Innenwinkel mit w_a, w_b, w_c und die der Aufsenwinkel mit m_a, m_b, m_c, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$\triangle = 2\, w_a w_b w_c\, m_a m_b m_c$$
$$\sqrt{\left[\left(\frac{1}{m_c w_c} + \frac{1}{m_b w_b} - \frac{1}{m_a w_a}\right)\left(\frac{1}{m_c w_c} - \frac{1}{m_a w_a} - \frac{1}{m_b w_b}\right)\right.}$$
$$\overline{\left.\left(\frac{1}{m_c w_c} - \frac{1}{m_a w_a} + \frac{1}{m_b w_b}\right)\left(\frac{1}{m_c w_c} + \frac{1}{m_a w_a} + \frac{1}{m_b w_b}\right)\right]}.$$

Beweis: (G. T.)
(1163) Teege XXIII, 592. XXIV, 444.

69. Das Dreieck, dessen Ecken die Höhenmitten eines Dreiecks sind, ist gleich dem vierten Teil des Höhenfufspunktdreiecks.*)
Beweis: (G.); (T. R.)
(883 b) Kücker XX, 434. XXI, 187.

70. Der Inhalt des Fufspunktdreiecks ist gleich

$$\frac{\triangle \cdot (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4\, a^2 b^2 c^2}$$

Beweis: (T. R.)
(1299) Pappit XXV, 351. XXVI, 108.

71. Wenn man von einem Punkte P einer Seite z. B. AC des Dreiecks ABC Parallelen zu den beiden anderen Seiten zieht, $PQ \parallel AB$ und $PR \parallel BC$, und die Dreiecke PQC mit $\triangle_1$, ARP mit $\triangle_2$ bezeichnet, so ist $\sqrt{\triangle} = \sqrt{\triangle_1} + \sqrt{\triangle_2}$.
Beweis: (G. T.)
(*691*) Mathesis. XXV, 519.

72. Über den drei Seiten eines Dreiecks als Durchmessern beschreibt man nach aufsen Halbkreise und legt an je zwei der-

*) Verallgemeinerung: Die Mittelpunkte dreier durch einen Punkt gehenden Ecktransversalen eines Dreiecks sind die Ecken eines Dreiecks, welches gleich $\frac{1}{4}$ des Dreiecks ist, dessen Ecken die Durchschnittspunkte der Ecktransversalen mit den Dreiecksseiten sind. Bücking, Kücker.

selben die gemeinschaftlichen Tangenten. Bei A liege die Tangente $DE = m$, bei B Tangente $FG = n$ und bei C Tangente $HI = p$. Ist $\triangle$ der Inhalt des Dreiecks und ϱ der Radius des eingeschriebenen Kreises, so ist 1) $mnp = \triangle\varrho$; 2) $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{\varrho^2}$.

Beweis: (R.)

(*105*) Journ. élém. XIII, 128.

73. Das Verhältnis zu berechnen, in welchem der Inhalt eines durch seine drei Seiten a, b, c gegebenen Dreiecks ABC zu dem Dreieck steht, dessen Ecken die Fufspunkte D, E, F der Winkelhalbierenden AD, BE, CF sind.

Beweis: (R.) $\triangle DEF = \triangle ABC \cdot \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$.

(*249*) Math. Magazine. XVI, 206.

74. Im $\triangle ABC$ seien w_a und w'_a die Halbierungslinien des Winkels α und seines Nebenwinkels, entsprechend w_b und w'_b, w_c und w'_c die der Winkel β und γ, und es sei $a < b < c$. Konstruiert man nun ein Dreieck, in welchem die Seiten w_a und w'_a den Winkel α einschliefsen, ebenso die Dreiecke aus w_b, w'_b, β und w_c, w'_c, γ, und bezeichnet die Flächen derselben resp. mit S_a, S_b, S_c, so ist $\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_b} = \frac{1}{S_c}$.

Beweis: (T. R.)

(686) Beyens XVIII, 277. XIX, 28.

75. Aus den Seiten $a < b < c < d$ sei ein Sehnenviereck konstruiert, dessen Fläche E heifsen möge; ist nun d nicht nur $> c$, sondern auch $> c + b - a$, so läfst sich aus den Seiten $d - a$, $d - b$, $d - c$ ein Dreieck bilden, dessen Fläche F sei, und dann besteht zwischen E und F die Relation

$$F^2 = \left(\frac{d}{m} - 1\right)(abcd - E^2),$$

worin m das arithmetische Mittel zwischen a, b, c, d bezeichnet.

Beweis: (R.)

(601) Schlömilch XVII, 288. XVIII, 33.

76. Die Diagonalen eines Trapezes $ABDC$ schneiden sich in einem Punkte O. Gegeben sind die Flächen p^2 und q^2 der beiden Dreiecke AOB und COD; zu finden den Ausdruck für die Fläche der beiden anderen Dreiecke AOC, BOD und den für die Fläche des Trapezes T.

(7_2) Nouv. Ann. X, 353. —

γ. Eigenschaften besonderer Punkte.*)

77. Die bekannte Eigenschaft des Dreiecks, daſs der Schwerpunkt desselben, der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises und und der Höhendurchschnitt in einer Geraden liegen, ist ein sehr spezieller Fall des folgenden viel allgemeineren Satzes.

Für ein beliebiges Dreieck ABC bezeichne A_0 die Mitte von BC, B_0 die von CA, C_0 die von AB, D den Durchschnitt von AA_0, BB_0, CC_0, also den Schwerpunkt. Wird nun in der Ebene des Dreiecks ein Punkt P willkürlich gewählt und durch A eine Parallele zu A_0P gezogen, ebenso durch B eine Parallele zu B_0P und durch C eine Parallele zu C_0P, so schneiden sich diese drei Parallelen in einem Punkte Q, welcher mit D und P auf einer Geraden liegt und zwar so, daſs $DQ = 2\,DP$ ist.

Hieraus ergiebt sich der anfangs erwähnte Satz, wenn man für P den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises nimmt.

Beweis: (R. K.)

(62) Schlömilch IX, 286. X, 49.

78. a) Die Höhendurchschnittspunkte sämtlicher Dreiecke, welche denselben umgeschriebenen und eingeschriebenen Kreis haben, liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt von dem Mittelpunkt des Inkreises die Entfernung $e = \sqrt{r(r-2\varrho)}$ hat und dessen Radius $r - 2\varrho$ ist. (r Radius des Umkreises, ϱ Radius des Inkreises.)

b) Die Schwerpunkte und die Mittelpunkte der Feuerbachschen Kreise sämtlicher Dreiecke, welche denselben umgeschriebenen und eingeschriebenen Kreis haben, liegen je auf einem Kreise, die sich leicht aus dem vorigen Kreise ableiten lassen.

Beweis: (G. 2.)

(87) Schlömilch X, 351. XI, 197.

79. Der Schwerpunkt eines Dreiecks besitzt die Eigenschaft, daſs das Produkt der oberen und das Produkt der unteren Abschnitte seiner Ecktransversalen sich verhalten wie 8 : 1. Es soll bewiesen werden, daſs kein anderer Punkt im Innern des Dreiecks dieser Eigenschaft teilhaftig ist.

Beweis: (R.)

(916) Emmerich XXI, 31. XXI, 420.

80. Die Potenz des Schwerpunktes E des Dreiecks ABC für den Kreis um ABC ist $e^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

Beweis: (R.); (T. R.)

(780 a) Artzt XIX, 346. XX, 110

*) Vergl. C. § 5. Nr. 45 u. 46; ferner Schlömilch: Über dreifache Punkte im Dreieck XX, 406—407.

81. a) Die Verbindungslinie der Mittelpunkte M und m des Umkreises und des Inkreises eines Dreiecks ist parallel einer Dreiecksseite, wenn $\cos\alpha + \cos\beta = 1$ und $Mm = \frac{1}{2}(a - b)$ ist.

b) Der Mittelpunkt des Umkreises liegt auf der Peripherie des Inkreises, wenn $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sqrt{2}$ ist.

c) Beide Lagen finden gleichzeitig statt, wenn $\sphericalangle(\alpha - \beta) = 45^0$ und $\sphericalangle\gamma = 65^0\,31'\,48'',7$ beträgt.

Beweis: (T. R.)

(695) Schlömilch XVIII, 357. XIX, 92.

82. Die Bedingung für das wirkliche Vorhandensein der beiden Punkte P in der Ebene eines Dreiecks ABC (Seiten: a, b, c), für welche $PA : PB : PC = m : n : p$ $(m < n < p)$ ist, ist $am < bn + cp$, d. h. am, bn, cp müssen die Seiten eines Dreiecks sein.

Beweis: (T. R.)

(632) Bermann XVII, 525. XVIII, 271.

83. Innerhalb eines Dreiecks ABC liege Punkt Q so, dafs

$$\sphericalangle AQB = BQC = CQA = 120^0$$

ist; die durch Q gehenden Ecktransversalen werden mit f_a, f_b, f_c, ihre oberen Abschnitte mit n_a, n_b, n_c und ihre unteren mit m_a, m_b, m_c bezeichnet; dann ist

$$\text{I)}\ \frac{m_a}{f_a} + \frac{m_b}{f_b} + \frac{m_c}{f_c} = 1; \quad \text{II)}\ \frac{n_a}{f_a} + \frac{n_b}{f_b} + \frac{n_c}{f_c} = 2;$$

$$\text{III)}\ \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} = 2\left(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b} + \frac{1}{n_c}\right).^{*)}$$

Beweis: I—II; (R.) III; (R.); (G. R. 2.)

(434) Emmerich XV, 524. XVI, 200.

84. Trägt man die kürzeste Seite AC eines Dreiecks ABC von A aus auf $AB\,(= AC_1)$, von C aus auf $CB\,(= CA_1)$ ab, dann von B aus BA_1 auf $BA\,(= BA_2)$ und BC_1 auf $BC\,(= BC_2)$, so schneiden sich die Mittellote von AA_2 und CC_2 im Mittelpunkt des Inkreises.

Beweis: (G.)

(1049) Beseke XXII, 351. XXIII, 120.

δ. Eigenschaften verschiedener Transversalen.**)

85. Ist in einem Dreieck ABC die Halbierungslinie des Winkels ACB gleich der seines Nebenwinkels, so schneidet der

---

*) I und II gelten für beliebige sich in einem Punkt schneidende Ecktransversalen.

**) Vergl. auch C. § 5. Nr. 47 u. 48, sowie E. § 1. Nr. 1—3.

über AB als Durchmesser beschriebene Kreis BC und BA in P und Q so, dafs $AP = AQ$ ist.

Beweis: (G. 2.)

(*44*) Journ. élém. XI, 367.

86. AA', BB', CC' seien die inneren Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC; ihr Durchschnittspunkt sei O und sie treffen $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ resp. in D, E, F; dann halbiert CC' auch den Winkel DCE.

Beweis: (H. B.)

(*386*) Mathesis. XX, 36.

• **87.** Die inneren Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC treffen den Umkreis O in A', B', C' und der Inkreis I berühre die Seiten in A'', B'', C''. Dann liegen die Schwerpunkte G' und G'' der Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ auf IO; ferner ist $IG' = 2\,G'O$ und $IG'' : IG' = \varrho : 2r$.

Beweis: (P. L.)

(*555*) Mathesis. XXIII, 516.

88. M sei der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$, CM schneide AB in D; die Senkrechte auf AB in D schneide AM in E und BM in F; dann ist $DE : DM = DM : DF$.

Beweis: (G.); (G. T. 2.)

(664) Schlömilch XVIII, 123. XVIII, 502.

89. Im Dreieck ABC seien AO, BO, CO die Winkelhalbierenden; auf AO seien die Senkrechten BA_b und CA_c gefällt, auf BO die Senkrechten AB_a und CB_c, auf CO die Senkrechten AC_a und BC_b; dann liegen $A_bA_cB_aB_c$, $A_bA_cC_aC_b$, $B_aB_cC_aC_b$ je auf einem Kreise; das Potenzcentrum der drei Kreise ist O.

Beweis: (G.) (T. R.); (K. M.)

(948) Leuzinger XXI, 279. XXII, 19.

90. Das von dem Fufspunkt O der Halbierungslinie des Winkels γ auf a oder b gefällte Lot h ist das harmonische Mittel zwischen ϱ und ϱ_c.

Beweis: (H. B.)

(508) Stade XVI, 275. XVI, 275.

91. Fällt man im $\triangle ABC$ von dem beliebigen Punkt M der Halbierungslinie des Winkels ACB auf die Seiten BC, CA, AB bezw. die Lote MD, ME, MF und wird ED von MF in G getroffen, so ist G ein Punkt der von C gezogenen Mittellinie.

Beweis: (G.)

(*549*) Journ. élém. XXIII, 514.

92. Fällt man von den Ecken B und C eines Dreiecks auf irgend eine durch die Ecke A gehende Transversale die Lote BE und CF, so erscheint das Stück EF der Transversale von dem Fuſspunkt D der Höhe AD aus gesehen unter einem konstanten Winkel.

Beweis: (G.)

(705) Sporer XVIII, 446. XIX, 182.

93. Fällt man von einem beliebigen Punkt P auf die Seiten BC, AC und die Mittellinie CE des gegebenen Dreiecks ABC Senkrechte, welche die Höhe CD resp. in F, G und H treffen, so ist $GH = FH$.

Beweis: (G.)

(*384*) Mathesis. XX, 36.

94. Sind u, v, w die von einem Punkt P gezogenen Ecktransversalen PA, PB, PC eines Dreiecks, so ist stets $a^2u^4 + b^2v^4 + c^2w^4 + a^2b^2c^2 = 2ab\cos\gamma(u^2v^2 + c^2w^2) + 2bc\cos\alpha(v^2w^2 + a^2u^2) + 2ac\cos\beta\,(w^2u^2 + b^2v^2)$.

Beweis: (T. R. 2.)

(1305) Junker XXV, 351. XXVI, 179.

95. ABC sei ein Dreieck; D, E, F die Fuſspunkte der Höhen aus den Ecken A, B, C; O der Durchschnittspunkt der Linie EF mit einer zur Seite BC durch die Ecke A gezogenen Parallelen; a die Mitte von BC; G und H die Durchschnittspunkte von OA mit einem Kreise, welcher um den Punkt O als Mittelpunkt und mit Oa als Radius beschrieben ist. Es soll bewiesen werden:

1) daſs die Geraden aG und aH bezüglich die Winkel OaB und OaC halbieren;

2) daſs, wenn die Höhe AD den Kreis im Punkte K schneidet, $AK = Ba$ ist.

(7_1) Nouv. Ann. X, 15. —

96. a) Wenn man in einem Dreieck ABC durch einen Punkt P die Ecktransversalen zieht, welche den Umkreis (Mittelpunkt M) in A', B', C' schneiden, dann die Spiegelpunkte X, Y, Z von A', B', C' in Bezug auf die entsprechenden Seiten BC, CA, AB nimmt, so ist $\triangle XYZ \sim A'B'C'$ und der Umkreis von XYZ geht durch den Höhenschnittpunkt H des Grunddreiecks.

b) P ist für beide Dreiecke gleichliegend, also der Drehpunkt (Situationspunkt) der Dreiecke.

c) Schneidet der Umkreis von XYZ die Höhen von ABC in X', Y', Z', so ist $\triangle ABC \sim X'Y'Z'$ und P auch Drehpunkt für diese Dreiecke.*)

Beweis: (G. T.); (G. 2.) mit Benutzung neuerer Geometrie.

(928) Fuhrmann XXI, 115. XXI, 511.

---

*) Ist P ein Punkt des Umfanges, so hat man den Satz, daſs die Spiegelpunkte eines beliebigen Punktes des Umfangs in Bezug auf die

97. Man vervielfache in dem Dreieck ABC die Winkel β und γ, so daſs $\sphericalangle B'BC = n\beta$, $\sphericalangle C'CB = n\gamma$ wird. (Die Winkel sind hierbei auf derselben Seite von BC anzutragen.) BB' und CC' schneiden sich in A_n. Die Seite BC des Dreiecks BA_nC werde von der Halbierungslinie des bezüglichen Gegenwinkels in X_n, von der zugehörigen Höhe in X'_n getroffen. Errichtet man endlich auf der Halbierungslinie des Winkels $A_{2n-1}BC$ und $A_{2n-1}CB$ in B und C die Lote BB'' und CC'', welche sich in $A_{\frac{1}{2}(2n-1)}$ schneiden, so sei $X''_{\frac{1}{2}(2n-1)}$ der Fuſspunkt des von $A''_{\frac{1}{2}(2n-1)}$ auf BC gefällten Lotes. — In gleicher Weise bestimme man die Punkte Y_n, Y'_n, $Y''_{\frac{1}{2}(2n-1)}$; Z_n, Z'_n, $Z''_{\frac{1}{2}(2n-1)}$.

a) Die nach entsprechenden Punkten gehenden Ecktransversalen schneiden sich in demselben Punkte $\left(P_n, P'_n, P''_{\frac{1}{2}(2n-1)}\right)$.

b) Ist S der Schwerpunkt von ABC, so liegen P_{2n}, S, P'_n in gerader Linie und zwar ist $P_{2n}S : SP'_n = 1 : 2$.

c) Ebenso liegen P_{2n-1}, S, $P''_{\frac{1}{2}(2n-1)}$ in gerader Linie und zwar ist $P_{2n-1}S : SP''_{\frac{1}{2}(2n-1)} = 1 : 2$. Bemerkung: P_{2n}, P'_n, P_{2n-1}, $P''_{\frac{1}{2}(2n-1)}$ und S sind fünf zusammengehörende merkwürdige Punkte höherer Ordnung für das Dreieck ABC; und zwar entspricht P_{2n} dem Umkreismittelpunkt, P_{2n-1} dem Inkreismittelpunkt, P'_n dem Höhenschnittpunkt und $P''_{\frac{1}{2}(2n-1)}$ dem sogenannten fünften merkwürdigen Punkt. Für $n = 1$ ergeben sich die gewöhnlichen fünf merkwürdigen Punkte.

Beweis: (K. M.); (G. T.); (P. G.)

(1280) Glaser XXV, 192. XXVI, 21.

ε. Ähnliche Dreiecke und Dreiecke, die sich in der Ähnlichkeitslage befinden.

98. Die Verbindungsstrecken der homologen Endpunkte zweier gleichwendig ähnlicher Dreiecke werden in gleichem Verhältnis

---

Seiten mit dem Höhenschnittpunkt in einer Geraden liegen. — Liegt P im Unendlichen, so folgt der Satz: Zieht man durch die Ecken A, B, C drei den Umkreis in A', B', C' schneidende Parallelen, bestimmt die Spiegelpunkte A'', B'', C'' von A', B', C', so sind die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ und $A''B''C''$ kongruent und der Mittelpunkt des Umkreises von $A''B''C''$ liegt auf dem Umfange des ersten Kreises. Kücker.

geteilt. Welche Eigenschaften besitzt das durch die Teilungspunkte bestimmte Dreieck?

Beweis: (P. L.)

(*222*) Tidsskrift. XV, 526.

99. Ein Dreieck ist seinem Mittelliniendreieck ähnlich, wenn entweder das Dreieck gleichseitig ist oder die eine Mittellinie gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks ist, welches über der Seite sich konstruieren läfst, nach der die betreffende Mittellinie gezogen ist.

Beweis: (R.) Vergl. § 9 Nr. 16, E. § 4 Nr. 5 und 8 und § 6 Nr. 13.

(677 a) Artzt XVIII, 198. XVIII, 598.

100. Wenn man von den durch zwei sich in C schneidenden Geraden gebildeten Scheitelwinkeln durch zwei nicht parallele Gerade zwei ähnliche Dreiecke ABC und $A'B'C$ abschneidet, so geht die von C gefällte Höhe des einen Dreiecks durch den Umkreismittelpunkt des andern.

Beweis: (G. 4.), zum Teil mit Benutzung neuerer Geometrie,

(965) Leuzinger XXI, 354. XXII, 102.

101. Errichtet man über einer Strecke AB sechs ähnliche Dreiecke, so liegen die Spitzen dieser Dreiecke auf einem Kreise.

Beweis: (G.)

(*547*) Educ. Times. XXIII, 513.

102. Durch einen beliebigen Punkt P in der Ebene eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ werden die drei Ecktransversalen gelegt, welche die Gegenseiten bezw. in B_1, B_2, B_3 treffen. Auf den Ecktransversalen werden die dem Punkte P in Beziehung auf A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 harmonisch konjugierten Punkte P_1, P_2, P_3 konstruiert. Wenn man durch P_1 eine Parallele zu $a_1 = A_2A_3$, durch P_2 eine Parallele zu $a_2 = A_3A_1$, durch P_3 eine Parallele zu $a_3 = A_1A_2$ legt, so erhält man $\triangle\, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, welches dem Dreieck $A_1A_2A_3$ ähnlich ist und ihm gegenüber perspektivisch liegt. Ebenso erhält man noch drei dem gegebenen Dreieck ähnliche Dreiecke $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{A}_1''\mathfrak{A}_2''\mathfrak{A}_3''$, $\mathfrak{A}_1'''\mathfrak{A}_2'''\mathfrak{A}_3'''$ in perspektivischer Lage, wenn man a) durch P, P_3, P_2 Parallele bez. zu a_1, a_2, a_3; b) durch P_3, P, P_1 Parallele bez. zu a_1, a_2, a_3; c) durch P_2, P_1, P Parallele bez. zu a_1, a_2, a_3 legt. Das Verhältnis der Seiten dieser vier Dreiecke zu den homologen Seiten des ursprünglichen Dreiecks ist aufzustellen. (Spezieller Fall, wenn P der Mittelpunkt des Inkreises, P_1, P_2, P_3 die Mittelpunkte der Ankreise des Dreiecks $A_1A_2A_3$ sind.)

Beweis: (K. M.); (G.)

(1200) v. Jettmar XXIV, 271. XXV, 47.

Im Anschlufs an diesen Satz sind noch die folgenden Sätze bewiesen worden:

103. $P_1\mathfrak{A}_1$, $P\mathfrak{A}_1'$, $P_3\mathfrak{A}_1''$, $P_2\mathfrak{A}_1'''$ schneiden einander in der Mitte der Seite a_1 des Dreiecks $A_1A_2A_3$; ebenso $P_2\mathfrak{A}_2$, $P_3\mathfrak{A}_2'$, $P\mathfrak{A}_2''$, $P_1\mathfrak{A}_2'''$ in der Mitte der a_2; $P_3\mathfrak{A}_3$, $P_2\mathfrak{A}_3'$, $P_1\mathfrak{A}_3''$, $P\mathfrak{A}_3'''$ in der Mitte der a_3.

Beweis: (K. M.); (H. B.)

(1201) v. Jettmar XXIV, 272. XXV, 48.

104. Die Verbindungslinie des gemeinschaftlichen Schnittpunktes der Geraden $P_1\mathfrak{A}_1$, $P_2\mathfrak{A}_2$, $P_3\mathfrak{A}_3$ und des Ähnlichkeitspunktes der Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, des Schnittpunktes der Geraden $P\mathfrak{A}_1'$, $P_3\mathfrak{A}_2'$, $P_2\mathfrak{A}_3'$ und des Ähnlichkeitspunktes der Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'$, des Schnittpunktes der Geraden $P_3\mathfrak{A}_1''$, $P\mathfrak{A}_2''$, $P_1\mathfrak{A}_3''$ ($P_2\mathfrak{A}_1'''$, $P_1\mathfrak{A}_2'''$, $P\mathfrak{A}_3'''$) und des Ähnlichkeitspunktes der Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $\mathfrak{A}_1''\mathfrak{A}_2''\mathfrak{A}_3''$ ($\mathfrak{A}_1'''\mathfrak{A}_2'''\mathfrak{A}_3'''$) gehen sämtlich durch den Schwerpunkt des Dreiecks $A_1A_2A_3$.*)

Beweis: (K. M.); (P. L.)

(1202) v. Jettmar XXIV, 342. XXV, 107.

105. Eine beliebige Gerade g in der Ebene des Dreiecks $A_1A_2A_3$ schneide die Seiten a_1, a_2, a_3 dieses Dreiecks bez. in den Punkten C_1, C_2, C_3, durch welche die Strahlen $b_1 = C_1A_1$, $b_2 = C_2A_2$, $b_3 = C_3A_3$ gelegt werden. Durch die Fufspunkte C_1, C_2, C_3 werden die der Geraden g in Beziehung auf a_1 und b_1, bez. a_2 und b_2, a_3 und b_3 harmonisch konjugierten Strahlen g_1, g_2, g_3 konstruiert und die Schnittpunkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ dieser Strahlen auf den Schwerlinien A_1S, bez. A_2S, A_3S des Dreiecks $A_1A_2A_3$ gesucht. Man erhält hierdurch zwei kollineare Dreiseite $a_1a_2a_3$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$, deren Kollineationsachse mit 2 bezeichnet werden möge. Aufserdem erhält man noch das dem Dreiseit $a_1a_2a_3$ kollineare Dreiseit $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{a}_2'\mathfrak{a}_3'$ durch die Schnittpunkte $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'$ der Strahlen g, g_3, g_2 auf den Schwerlinien A_1S bez. A_2S, A_3S mit der Kollineationsachse $2'$, das dem Dreiseit $a_1a_2a_3$ kollineare Dreiseit $\mathfrak{a}_1''\mathfrak{a}_2''\mathfrak{a}_3''$ ($\mathfrak{a}_1'''\mathfrak{a}_2'''\mathfrak{a}_3'''$) durch die Schnittpunkte $\mathfrak{A}_1''$, $\mathfrak{A}_2''$, $\mathfrak{A}_3''$ ($\mathfrak{A}_1'''\mathfrak{A}_2'''\mathfrak{A}_3'''$) der Strahlen g_3, g, g_1 (g_2, g_1, g) auf den Schwerlinien A_1S bez. A_2S, A_3S mit der Kollineationsachse $2''$ ($2'''$). Die Schnittpunkte $g_1\mathfrak{a}_1$, $g\mathfrak{a}_1'$, $g_3\mathfrak{a}_1''$, $g_2\mathfrak{a}_1'''$ liegen in der von A_1 zur Gegenseite a_1 gezogenen Parallelen, ebenso $g_2\mathfrak{a}_2$, $g_3\mathfrak{a}_2'$, $g\mathfrak{a}_2''$, $g_1\mathfrak{a}_2'''$

*) Bestimmt man für jede Ecke eines Vierecks den Seitengegenpunkt für das durch die drei andern Ecken bestimmte Dreieck, so liegt das Viereck mit dem Viereck der Seitengegenpunkte perspektivisch. — Bestimmt man für jede Ecke eines Vierecks den Seitengegenpunkt für das Mittendreieck des Diagonaldreiecks, so liegt das Viereck mit dem Viereck der Seitenpunkte vierfach perspektivisch und zwar sind die Ecken des Mittendreiecks und der Seitengegenpunkt m zu M (M Schnittpunkt der Verbindungslinien der Gegenseitenmitten des Vierecks $PP_1P_2P_3$) die perspektivischen Mittelpunkte. Kücker.

($g_3 \mathfrak{a}_3$, $g_2 \mathfrak{a}_3'$, $g_1 \mathfrak{a}_3''$, $g \mathfrak{a}_3'''$) in der von A_2 (A_3) zur Gegenseite a_2 (a_3) gezogenen Parallelen.

Beweis: (K. M.)

(1203) v. JETTMAR XXIV, 342. XXV, 108.

106. Die Gerade, in welcher die Punkte $g_1 \mathfrak{a}_1$, $g_2 \mathfrak{a}_2$, $g_3 \mathfrak{a}_3$ gemeinschaftlich liegen, ist der Kollineationsachse 2 der Dreiseite $a_1 a_2 a_3$ und $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ parallel. Ebenso ist die Gerade durch $g \mathfrak{a}_1'$, $g_3 \mathfrak{a}_2'$, $g_2 \mathfrak{a}_3$ der Geraden $2'$, die Gerade durch $g_3 \mathfrak{a}_1''$, $g \mathfrak{a}_2''$, $g_1 \mathfrak{a}_3''$ der Geraden $2''$, die Gerade durch $g_2 \mathfrak{a}_1'''$, $g_1 \mathfrak{a}_2'''$, $g \mathfrak{a}_3'''$ der Geraden $2'''$ parallel.

107. a) Zieht man von den Fufspunkten B_1, B_2, B_3 der durch den Punkt P gelegten Ecktransversalen $A_1 A_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ durch einen beliebigen Punkt M in der Ebene des Dreiecks die Strahlen $B_1 M$, $B_2 M$, $B_3 M$ und konstruiert die zu diesen Strahlen in Beziehung auf die betreffenden Dreiecksseiten und Ecktransversalen harmonisch konjugierten Strahlen $B_1 X_1$, $B_2 X_2$, $B_3 X_3$ (so dafs also B_1 ($A_3 M A_1 X_1$) ein harmonisches Büschel ist und analoge an B_2 und B_3), so schneiden $B_1 X_1$, $B_2 X_2$, $B_3 X_3$ einander in einem Punkte M'. b) Die Strahlen $B_1 X_1$, $B_2 X_2$, $B_3 X_3$ sind parallel, wenn M auf dem Umfange eines Kegelschnitts liegt, welcher zugleich durch B_1, B_2, B_3 und durch die Mitten der drei Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ geht.

108. a) Legt man durch die Schnittpunkte C_1, C_2, C_3 einer Geraden g mit den Seiten a_1, a_2, a_3 eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ die Ecktransversalen $b_1 = C_1 A_1$, $b_2 = C_2 A_2$, $b_3 = C_3 A_3$, sucht die Schnittpunkte D_1, D_2, D_3 dieser Ecktransversalen mit einer beliebigen in der Ebene des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ liegenden Geraden m und konstruiert die den Punkten D_1, bez. D_2, D_3 in Beziehung auf $C_1 A_1$ bez. $C_2 A_2$, $C_3 A_3$ harmonisch konjugierten Punkte E_1, bez. E_2, E_3, so findet man, dafs die Punkte E_1, E_2, E_3 in einer Geraden m' liegen. b) Die Gerade geht durch den Schwerpunkt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$, wenn m einen Kegelschnitt berührt, welchen zugleich die Ecktransversalen b_1, b_2, b_3 und die von den Eckpunkten A_1, A_2, A_3 zu den Gegenseiten a_1 bez. a_2, a_3 gezogenen Parallelen berühren.

Beweise: (K. M.)

(1220—1222) v. JETTMAR XXIV, 458. XXV, 189—191.

ζ. Drei Gerade schneiden sich in einem Punkte und drei Punkte liegen auf einer Geraden.

109. Nimmt man in einer Ebene zwei kongruente gleichseitige Dreiecke ABC und $A'B'C'$, bei welchen die Reihenfolge der Ecken umgekehrt angenommen sei, verbindet alle Ecken des einen mit denen des anderen und halbiert diese Strecken, wobei

wir folgende Bezeichnungen annehmen: die Mittelpunkte von AA', AB', AC' seien resp. M_1, M_2, M_3, die von BA', BB', BC' seien resp. N_1, N_2, N_3, und die von CA', CB', CC' seien resp. P_1, P_2, P_3. Dann ergiebt sich Folgendes:

a) $M_1N_2P_3$, $M_2N_3P_1$, und $M_3N_1P_2$ liegen je in einer Geraden.
Beweis: (G. 3.)

b) $M_1N_3P_2$, $M_2N_1P_3$ und $M_3N_2P_1$ sind die Ecken von gleichseitigen Dreiecken.
Beweis: (G. 3.)

c) Jene drei Geraden schneiden sich in einem Punkte O, welcher der gemeinsame Mittelpunkt der letzten Dreiecke ist.*)
Beweis: (G. 3.)

d) Auch $M_1M_2M_3$, $N_1N_2N_3$, $P_1P_2P_3$, $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$, $M_3N_3P_3$ bilden gleichseitige Dreiecke.
Beweis: (G. 3.)

e) M_3P_1 sowie N_1M_2 und N_3P_2 sind senkrecht zu $M_1N_2P_3$; M_1P_2, N_2M_3, N_1P_3 senkrecht zu $M_2N_3P_1$; M_2P_3, N_3M_1, N_2P_1 senkrecht zu $M_3N_1P_2$.
Beweis: (G. 3.)
(322—326) Fuhrmann XIV, 525. XV, 189—191.

110. Die kreuzweise gezogenen Verbindungslinien zweier Ecken eines Dreiecks mit den Halbierungspunkten der von ihnen ausgehenden Höhen schneiden sich auf einem Eckradius des umgeschriebenen Kreises.
Beweis: (G. T. 2); (G. 2); (H. B.); (P. G.); (K. M.) und durch Graſsmann'sche Ausdehnungslehre.
(277) Kiehl XIV, 99. XIV, 518.

111. Im $\triangle ABC$ sei D der Mittelpunkt von BC, E der von AB; ferner sei $FD \perp BC$ und $FD = BD$, $EG \perp AB$ und $EG = AE = EB$, und zwar sei FD nach dem Inneren des Dreiecks, EG nach auſsen zu errichtet; ist noch $BH \perp AC$, so ist GFH eine gerade Linie.
Beweis: (G. 3); (G. T.)
(411) Adami XV, 360. XVI, 21.

112. (Verallgemeinerung von 111.) Trägt man auf zwei Dreiecksseiten CA und CB von C aus $CD = na$ und $CE = nb$ ab, errichtet in D und E auf den Seiten die Senkrechten $DF = ma$ und $EG = mb$, und zwar die eine nach innen, die andere nach auſsen, so schneidet FG von der Höhe CH ein Stück CI ab,

---

*) O ist der gemeinsame Schwerpunkt von $M_1N_3P_2$, $M_2N_1P_3$ und $M_3N_2P_1$ und ist stets der Mittelpunkt der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden gegebenen Dreiecke. Frölich.

dessen Länge nur von dieser Höhe und den angenommenen Verhältniszahlen abhängt.

Beweis (G. 2); (P. L.)

(471) Hülsen XVI, 123. XVI, 420.

113. Drehen sich zwei Seiten C_1A und C_2A eines Dreiecks C_1AC_2, von welchem die gröfste Seite mit s', der gröfste Winkel mit ω und die kleinste Höhe mit h' bezeichnet werden möge, um C_1 resp. C_2 in derselben Ebene, in gleichem Sinne und mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, so ist stets, wofern wir die beweglichen Endpunkte durch A_1 und A_2, den zweiten Schnittpunkt der entstehenden Kreise durch S und die Drehung, durch welche zuerst C_1A in das Dreieck hineinrückt, durch φ bezeichnen,

a) SA_1A_2 eine Gerade und $\triangle AA_1A_2 \sim AC_1C_2$.

Beweis: 1) (G. 2); 2) (G. 3); (G. T.)

b) $SA_1A_2 \leqq 2s'$, aber $SA_1A_2 \geqq 2h'$.

Beweis: (G.)

c) SA_1A_2 wird Minimum durch $\varphi = \varphi'$, wo $\varphi' = 0^0 = 2C_1$ oder $= 360^0 - 2C_2$ ist, je nachdem $\sphericalangle A$ oder C_2 oder $C_1 = \omega$ ist; sie wird Maximum durch $\varphi = \varphi' + 180^0$. (Folgerung aus b.)

d) A_1A_2A erreicht sein Maximum $= 4\,C_1C_2A$, wenn $\varphi = 180^0$ wird.

Beweis: (G.)

e) Ist $C_1C_2 = C_1A = C_2A$, so wird SA_1A_2 Maximum durch $\varphi = (2n + 1)\,60^0$, und Minimum durch $\varphi = 2n \cdot 60^0$. (Folgerung aus b.)

(460—464) Breuer XVI, 25—26. XVI, 349—350.

114. 1) A, B, C, D seien vier Punkte, S sei ihr Schwerpunkt; a, b, c, d seien die Mittelpunkte der vier Umkreise der Dreiecke der vier Punkte, also z. B. a der des Dreiecks ABD. Fällt man von den Mitten L, M, N, P, Q, R der sechs Verbindungslinien AB, BC, CD, DA, AC, BD Lote auf die Gegenseiten, also resp. auf CD, AD, AB, BC, BD, AC, so schneiden sich diese sechs Lote viermal zu je dreien in einem Punkte. Sind α, β, γ, δ diese Punkte (α der Durchschnittspunkt der Senkrechten von M, N und Q), so ist z. B. $aS\alpha$ eine gerade Linie und es ist $Sa = S\alpha$.

Beweis: (P. L.)

2) Sind A, B, C, D vier Punkte eines Kreises, so fallen α, β, γ, δ in einem Punkt zusammen und durch diesen Punkt gehen die vier Feuerbachschen Kreise der Dreiecke der vier Punkte.

Beweis: (G.)

(538 a, b) Sporer XVI, 430. XVII, 199, 278.

115. Wenn man durch einen beliebigen Punkt X der Seite BC des Dreiecks ABC die Parallele zu der von der gegenüber-

liegenden Ecke ausgehenden Mittellinie AD zieht, welche die Seiten AB und AC in B_1 und C_1 schneidet, dann BB_1 und CC_1 in B_2 resp. C_2 halbiert, und XB_2 und XC_2 um sich selbst bis B_3 resp. C_3 verlängert, so ist B_3AC_3 eine Gerade.

Beweis: (G. 2); auch durch (P. G.) ausführbar.

(822) HAHN XIX, 589. XX, 346.

116. Trägt man auf den Höhen AH_a, BH_b, CH_c des Dreiecks ABC von den Ecken aus nach den Seiten zu die unteren Höhenabschnitte bis X, Y, Z ab, so ist XYZ gleich dem Höhenfufspunktdreieck und die Verbindungslinien von A, B, C mit den Seitenmitten von X, Y, Z gehen durch den Mittelpunkt M des Umkreises von ABC.*)

Beweis: (G.) mit Berücksichtigung von Nr. 129; (T. R.)

(901) KÜCKER XX, 512. XXI, 276.

117. Geht ein Lichtstrahl durch den Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks und läfst man denselben an jeder Seite eine Reflexion erleiden, so schneiden sich die drei reflektierten Strahlen in einem Punkte P. Derselbe liegt auf dem Umkreise.

Beweis: (G.)

(926) GLASER XXI, 114. XXI, 510.

118. Zieht man durch einen beliebigen Punkt X der Dreiecksseite BC eine Parallele zur Seite CA, bis diese einen beliebig durch B gezogenen Strahl in B' schneidet; ferner durch C eine Parallele zu BB', welche die durch X zu AB gezogene Parallele in C' schneidet, so liegen die Punkte A, B', C' in einer Geraden.

Beweis: (K. M.); (P. L.)

(964) RULF XXI, 354. XXII, 101.

119. Durch einen beliebigen Punkt O in der Ebene des Dreiecks ABC zieht man die Ecktransversalen AA_1, BB_1, CC_1; ferner mögen sich B_1C_1 und AA_1 in A_2 schneiden, A_1C_1 und BB_1 in B_2. Dann schneiden sich AB_2 und BA_2 auf CC_1.

Beweis: (H. B.)

(*563*) Nyt Tidsskrift. XXIII, 515.

120. A_1, A_2, A_3, A_4 seien Punkte eines Kreises und H_4 sei der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1A_2A_3$; analog H_1, H_2, H_3.

---

*) Verallgemeinerung: Trägt man die unteren Abschnitte dreier durch einen Punkt gehenden Ecktransversalen AA_1, BB_1, CC_1 bis A_2, B_2, C_2 ab, so ist $\triangle A_2B_2C_2 = A_1B_1C_1$. Sind ferner A_1', B_1', C_1' die Seitengegenpunkte zu A_1, B_1, C_1, so ist $\triangle A_2B_2C \cong A_1'B_1'C_1'$ und liegt mit ihm perspektivisch. Die Geraden, welche A, B, C mit den Seitenmitten von $A_2B_2C_2$ verbinden, gehen durch das perspektivische Zentrum von $A_2B_2C_2$ und $A_1'B_1'C_1'$. Bücking.

Dann gehen A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3 und A_4H_4 durch einen Punkt und halbieren sich.*)

Beweis: (G. 3.)

(966) Bücking XXI, 354. XXII, 102.

121. (Im Anschluſs an Nr. 120.) Im Sehnenviereck $A_1A_2A_3A_4$ sei H_4 der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1A_2A_3$, analog H_1, H_2, H_3; schneiden sich A_1H_1 und A_2H_2 in S, so soll der Centralabstand des festen Punktes S durch die Centralabstände zweier Gegenseiten (oder der Diagonalen) des Sehnenvierecks und durch den von diesen eingeschlossenen Winkel ausgedrückt werden.**)

Beweis: (G.); (G. T.) auch durch (K. M.) ausführbar.

(1041) v. Jettmar XXII, 274. XXIII, 46.

122. Wenn das Mittellot der Seite a eines Dreiecks ABC die anliegenden Seiten b und c in den Punkten B_1, C_2, ebenso das Mittellot der Seite b die Seiten c und a in den Punkten C_1, A_2 und das Mittellot der Seite c die Seiten b und a in den Punkten B_2, A_1 trifft, so sind durch die Punkte $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ABC drei Dreiecke bestimmt, deren Umkreise sich in zwei Punkten schneiden. Die Schnittpunkte der Seiten a_1, b_2; b_1, c_2; c_1, a_2 der beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ liegen auf einer Geraden und zwar auf der gemeinschaftlichen Sehne der drei Kreise.

Beweis: Vergl. § 1 Nr. 146; Fuhrmann: Synthet. Beweise p. 106 Nr. 125.

(1050) Ritsert XXII, 351.

123. (Erweiterung von Nr. 122.) Legt man durch einen Punkt P drei beliebige Gerade g_1, g_2, g_3 und schneidet g_1 die Seite a_2 des Dreiecks $A_1A_2A_3$ in B_2, die Seite a_3 in C_3; ebenso g_2 (g_3) die Seite a_3 (a_1) in B_3 (B_1), die Seite a_1 (a_2) in C_1 (C_2), so erhält man die Dreiecke $B_1B_2B_3$ und $C_1C_2C_3$, deren Seiten b_2, c_3; b_3, c_1; b_1, c_2 einander in drei Punkten schneiden, welche in gerader Linie liegen.

Beweis: (P. L.); (K. M.)

(1131) v. Jettmar XXIII, 352. XXIV, 102.

124. Liegen drei Punkte P_1, P_2, P_3 in einer Geraden g und legt man durch P_1 u. A_2 bez. A_3 die Geraden b_2, bez. c_3; durch P_2 und A_3

---

*) Vergl. Progr d. Realgymnas. in Homburg v. d. Höhe 1887.

**) Verbindet man in einem Sehnenviereck $A_1A_2A_3A_4$ den Mittelpunkt von A_1A_2 mit dem Höhenschnittpunkt S des Dreiecks, dessen Ecken der Diagonalenschnittpunkt E und die Mittelpunkte von A_1A_3 und A_2A_4 sind, so steht diese Gerade senkrecht auf A_3A_4. Zugleich ist die Gerade, welche S mit dem Mittelpunkte von A_1A_2 verbindet gleich dem Centralabstand von A_3A_4.

Vergl. Progr. d. Realgymn. in Homburg v. d. Höhe. 1887.

Glaser.

bez. A_1 die Geraden b_3 bez. c_1; durch P_3 und A_1 bez. A_2 die Geraden b_1, bez. c_2, so schneiden die Geraden b_1, b_2, b_3 ein Dreieck $B_1B_2B_3$, die Geraden c_1, c_2, c_3 ein Dreieck $C_1C_2C_3$ ab und die durch die Eckpunkte B_2, C_3; B_3, C_1; B_1, C_2 gelegten Geraden schneiden einander in einem Punkte.

Beweis: (P. L.); (K. M.)

(1132) v. JETTMAR XXIII, 352. XXIV, 102.

125. (Im Anschlufs an Nr. 123 u. 124.) Legt man durch einen Punkt P drei beliebige Gerade g', g'', g''' und schneidet g' die Seite a_2 des Dreiecks $A_1A_2A_3$ in B_2, die Seite a_3 in C_3, die Seite a_1 in D_1; ebenso g'' (g''') die Seite a_3 (a_1) in B_3 (B_1), die Seite a_1 (a_2) in C_1 (C_2), die Seite a_2 (a_3) in D_2 (D_3), so erhält man die Dreiecke $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$, deren Seiten entsprechend mit b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3 bezeichnet werden. Die durch die Schnittpunkte b_2c_3, b_3c_1, b_1c_2 bestimmte Gerade 1, durch c_2d_3, c_3d_1, c_1d_2 bestimmte Gerade 2, durch d_2b_3, d_3b_1, d_1b_2 bestimmte Gerade 3 schneiden einander in einem Punkte.

Beweis: (P. L.); (K. M.)

(1135) v. JETTMAR XXIII, 430. XXIV, 184.

126. Liegen drei Punkte P', P'', P''' in einer Geraden g und legt man durch P' und A_2, bez. A_3, A_1 die Gerade b_2, bez. c_3, d_1; durch P'' und A_3, bez. A_1, A_2 die Gerade b_3, bez. c_1, d_2; durch P'' und A_1, bez. A_2, A_3 die Gerade b_1, bez. c_2, d_3, so schneiden die Geraden b_1, b_2, b_3 ein Dreieck $B_1B_2B_3$, die Geraden c_1, c_2, c_3 ein Dreieck $C_1C_2C_3$, die Geraden d_1, d_2, d_3 ein Dreieck $D_1D_2D_3$ ab. Der Schnittpunkt I der Geraden B_2C_3, B_3C_1, B_1C_2; der Schnittpunkt II der Geraden C_2D_3, C_3D_1, C_1D_2 und der Schnittpunkt III der Geraden D_2B_3, D_3B_1, D_1B_2 liegen in einer Geraden.

Beweis: (P. L.) Vergl. Nr. 123—125.

(1136) v. JETTMAR XXIII, 430. XXIV, 185.

η. Geradlinige Figuren in und um ein Dreieck.

127. In ein Dreieck ABC lassen sich drei Rechtecke mit gleichen, sich in einem Punkt schneidenden Diagonalen beschreiben, bei denen je eine Seite auf eine Seite des Dreiecks fällt.

Beweis: (G.)

(*273*) Educ. Times. XVI, 505.

128. In $\triangle ABC$ ist $\triangle A'B'C'$ beliebig beschrieben; in das letztere $\triangle A''B''C''$ so, dafs seine Seiten denen von ABC parallel sind; in dieses wiederum $\triangle A'''B'''C'''$ so, dafs seine Seiten denen von $A'B'C'$ parallel sind u. s. w.

1) Die homologen Ecken einer Reihe ähnlicher Dreiecke liegen in gerader Linie.

Beweis: (P. L.)

2) $\triangle ABC + A'B'C' + A''B''C'' + A'''B'''C''' + \cdots$ in inf. $= \frac{ABC \cdot A'B'C'}{ABC - A'B'C'}$.

Beweis: (R.)

(*275*) Mathesis. XVI, 506.

129. a) Wenn die Ecken zweier einem dritten Dreieck eingeschriebener Dreiecke symmetrisch zu den Seitenmitten des letzteren liegen, so sind die beiden ersten Dreiecke inhaltsgleich.

Beweis: (T. R.); (P. G.)

(883 a) Kücker XX, 434. XXI, 185.

130. Wenn man durch die Spitze C eines Dreiecks ABC die zur Grundlinie AB parallele Gerade FG zieht, so dass $CF = CG = \frac{1}{2} CE$ (CE Höhe des Dreiecks) wird, und AB in D halbiert, so treffen die Geraden FD und GD bezw. die Seiten AC und BC in den Ecken S und R des dem Dreieck eingezeichneten Quadrats $SRQP$.

Beweis: (G.)

(974) Rohr XXI, 428. XXI, 428.

ϑ. Der dem Dreieck umgeschriebene Kreis.

131. In dem um $\triangle ABC$ beschriebenen Kreise zieht man den Durchmesser DE senkrecht zu BC; beschreibt man ferner um C als Mittelpunkt mit $\frac{1}{2} BC$ als Radius einen Kreis, welcher CE in N trifft, und zieht man durch N eine Parallele NM zu CA, welche AE in M schneidet, so ist $AM = \frac{1}{2}(AC + AB)$.

(29_2) Nouv. Ann. XI, 110.

132. Gegeben $\triangle ABC$, M Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, D Mitte des Bogens BC, $ME \perp AB$, $MF \perp AC$; über CD als Durchmesser wird ein Kreis beschrieben, welcher von einer auf AC in C errichteten Senkrechten in G getroffen wird, so ist $ME + MF = CG$.

Beweis: (G.).

(39_1) u. (*100*) Nouv. Ann. X, 115 u. XIII, 126. XIII, 126.

133. Wenn ein Durchmesser FG des einem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises auf AB senkrecht steht, so schneidet er BC in D und AC in E so, dafs die Abschnitte BD und AE

von jedem Punkte P der Kreisperipherie unter gleichen Winkeln gesehen werden.*)

Beweis: (H. B.).

(187) Stammer XII, 432. XIII, 277.

134. a) Errichtet man auf den Seiten eines Dreiecks ABC in den Punkten X, Y, Z, in denen dieselben von einer Transversale geschnitten werden, Lote, so schliefsen diese ein Dreieck $A'B'C'$ ein, welches dem Dreieck ABC ähnlich ist. Beide Dreiecke liegen collinear und zwar fällt das Collineationscentrum mit einem der beiden Punkte zusammen, in denen die den beiden Dreiecken umgeschriebenen Kreise K und K' einander schneiden.

Beweis: (G. 2).

b) Der andere Durchschnittspunkt der Kreise sei D'; dann bestimmen $D'A$, $D'B$, $D'C$ auf K' ein Dreieck $A''B''C''$, dessen Seiten auf den Seiten von ABC ebenfalls senkrecht stehen.

Beweis: (G.).

c) Die Kreise K und K' schneiden sich rechtwinklig.

Beweis: (G.).

(203—205) Hetzer XIII, 33. XIII, 360—362.

135. Die drei Seiten BC, AC, AB eines Dreiecks werden durch eine Gerade resp. in den Punkten L, M, N geschnitten; durch A, B, C zieht man zu LMN die Parallelen AP, BQ, CR bis zum Durchschnitt mit dem um ABC beschriebenen Kreise; dann schneiden LP, MQ, NR den Kreis in demselben Punkte.

Beweis: (G.).

(*271*) Educ. Times. XVI, 505.

136. a) Der Kreis, welcher durch zwei Ecken des Dreiecks ABC und den Schnittpunkt der Höhen gelegt wird, ist gleich dem Umkreis von ABC.

Beweis: (G.).

(298a) Glaser XIV, 270. XV, 32.

b) Ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC und beschreibt man um die Dreiecke BHC, CHA, AHB Kreise, mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, so schneiden sich AM_1, BM_2, CM_3 in einem Punkte und dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises, sowohl für das Dreieck ABC wie für $M_1M_2M_3$.

Beweis: (G.); (H. B.); (P. L.).

(298b, c) Glaser XIV, 270; (834a) Stoll XX, 33. XV, 32.

---

*) Liegt P im Bogen ABC, so ergänzen sich die betreffenden Winkel zu 180^0. Nur wenn P nicht auf diesem Bogen liegt, trifft der Satz in der obigen Fassung zu.

137. (Andere Form von Nr. 136.) Wenn vier Punkte in der Ebene so liegen, dafs jeder der Höhenpunkt des von den drei anderen gebildeten Dreiecks ist, so haben auch die Mittelpunkte der durch je drei derselben gelegten Kreise Höhenpunktlage; die Mittelpunkte der durch je drei dieser vier Punkte gelegten Kreise sind die ersten vier Punkte. Beide Figuren sind kongruent und gelangen durch eine halbe Umdrehung um den Mittelpunkt des beiden gemeinsamen Feuerbachschen Kreises zur Deckung.

Beweis: (P. L.).

(967) Kober XXI, 354. XXII, 103.

138. Ist O der Mittelpunkt des Umkreises und beschreibt man um die Dreiecke BOC, COA, AOB Kreise mit den Mittelpunkten m_1, m_2, m_3, so schneiden sich Am_1, Bm_2, Cm_3 im Winkelgegenpunkt des Mittelpunktes des Feuerbachschen Kreises.

Beweis: (H. B.); (G. T.); (G. 2); (T. R.); auch durch Äquipollenzen und (K. M.) ausführbar.

(834 b) Stoll XX, 33. XX, 430.

139. Durch den Umkreismittelpunkt O des gegebenen Dreiecks ABC werde eine beliebige Gerade gezogen, welche BC, CA, AB resp. in M, N und P schneidet. Werden nun die symmetrischen Punkte dieser drei Punkte in Bezug auf O mit Strichen versehen, so schneiden sich AM', BN', CP' in einem Punkte des Umkreises.*)

Beweis: (G.).

(*385*) Journ. élém. XX, 36.

140. In einem Dreieck ABC seien A_1, B_1, C_1 die Mittelpunkte der zu den Seiten gehörenden Bogen des umgeschriebenen Kreises, A_2, B_2, C_2 die Spiegelpunkte von A_1, B_1, C_1 in bezug auf die Seiten, so ist $\triangle A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$ und der um $A_2B_2C_2$ beschriebene Kreis geht durch den Höhenschnittpunkt H und den Schnittpunkt T der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der entsprechenden Ankreise.

Beweis: (G. 2); (T. R.). Vergl. E. § 6 Nr. 30.

(379) Fuhrmann XV, 194. XV, 519.

141. Verlängert man in einem Dreieck ABC die Mittellinien AD, BE und CF bis sie den umgeschriebenen Kreis in G, H und I treffen und trägt die Verlängerungen rückwärts auf den Mittellinien bis G', H' und I' ab, so sind die Seiten des Dreiecks $G'H'I'$ proportional AD, BE, CF. Der um $G'H'I'$

*) Statt des Umkreises kann ein um das Dreieck beschriebener Kegelschnitt genommen werden. Man kann mit Hülfe dieses Satzes einfach einen Kegelschnitt konstruieren, von welchem der Mittelpunkt und drei Punkte gegeben sind.

beschriebene Kreis geht durch den Höhenschnittpunkt H und den Schwerpunkt S.

Beweis: (G.). Vergl. Nr. 140 und E. § 6 Nr. 30 und § 8 Nr. 20, 21 und 34; 36. (G' ist identisch mit A_3.)

(380) Fuhrmann XV, 195. XV, 520.

142. Der Umkreis eines Dreiecks, der Feuerbach'sche Kreis und der über der Strecke zwischen Schwerpunkt und Höhendurchschnittspunkt als Durchmesser beschriebene Kreis haben dieselbe Potenzlinie.

Beweis: (H. B.); (G. R.); (R. K.).

(577) Stoll XVII, 111. XVII, 519.

143. a) Der Kreis um das Dreieck ABC habe O zum Mittelpunkt und r zum Radius, ferner sei A' der Durchschnitt von BC mit der Halbierungslinie des Winkels A; werden nun um die Teildreiecke $AA'C$ und $AA'B$ Kreise beschrieben, deren Mittelpunkte P_a und Q_a heifsen mögen, so bilden die Punkte O, P_a, Q_a ein gleichschenkliges Dreieck, und zwar ist

$$OP_a = OQ_a = \frac{ar}{b+c}.$$

b) Die Mittelpunkte der Umkreisbogen BC, CA, AB seien resp. A'', B'', C''; $A''O$ treffe die Sehne $B''C''$ in D, so ist $OD = OP = OQ$.

Beweis: a) (G. 2); b) (G.); (G. T.).

(585 a, b) Schlömilch XVII, 200. XVII, 585.

144. A', B', C' seien die symmetrischen Punkte der Eckpunkte des Dreiecks ABC in Bezug auf den Mittelpunkt des Umkreises; sind ferner S_a, S_b, S_c die Seitenmitten von $\triangle ABC$, so sind die beiden Dreiecke $A'B'C'$ und $S_aS_bS_c$ perspektivisch; das Projektionscentrum ist der Höhenschnittpunkt von ABC, die Projektionsachse ist die unendlich ferne Gerade.

Beweis: (P. L. 2).

(683) Bücking XVIII, 277. XIX, 26.

145. Liegen zwei Dreiecke in einem Kreise symmetrisch, so gehen die drei Sehnen, welche durch die Ecken des einen Dreiecks parallel zu den den entsprechenden Ecken gegenüberliegenden Seiten des anderen Dreiecks gezogen sind, durch einen Punkt dieses Kreises.

Beweis: (G.).

(737) Kober XIX, 32. XIX, 421.

146. In den Mittelpunkten A_0, B_0, C_0 der Seiten eines Dreiecks ABC errichte man Lote, und zwar schneide das Lot in A_0 die Seite CA in B_2 und AB in C_3, das in B_0 schneide AB in C_2, BC in A_3 und das in C_0 schneide BC in A_2 und CA in

104883

B_3; dann schneiden die Umkreise $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ den Umkreis von ABC in denselben zwei Punkten. (Vergl. § 1 Nr. 122.)

Beweis: (H. B.), (G.); (K. M.).

(756) Fuhrmann XIX, 98. XIX, 505.

147. Gegeben ist $\triangle ABC$, O sei der Mittelpunkt seines Umkreises. Über AC als Sehne ist ein Kreis konstruiert, der AB in A berührt, ebenso über AB ein Kreis, der AC in A berührt. Schneidet die Mittellinie AD diese Kreise in H und L, so ist $OH = OL$ und $BL = CH$.

Beweis: (G.).

(*548*) Educ. Times. XXIII, 513.

ι. Die Kreise, welche die Seiten eines Dreiecks berühren.*) Punkte und Strecken, die mit diesen Kreisen in Beziehung stehen.

148. a) Von den Mittelpunkten der 4 Kreise M, welche die Seiten eines Dreiecks berühren, liegen 4 mal je drei auf einem Kreise K. Diese Kreise sind alle einander gleich und ihre Mittelpunkte liegen selbst wieder zu viermal je dreien auf Kreisen K', welche unter sich und jenen Kreisen K gleich sind. Die Mittelpunkte dieser Kreise fallen beziehlich mit den Mittelpunkten der Kreise M zusammen. Die Mittelpunkte der Kreise K und K' sind beziehlich zu zweien einander zugeordnet und zwar so, dafs der Kreis K durch den Mittelpunkt des Kreises K' nicht geht und umgekehrt K' nicht durch den Mittelpunkt des Kreises K. Die Centrallinie zweier solcher Kreise K und K' geht durch den Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises und wird in diesem Punkte halbiert.

b) Bestimmt man auf dem Umfange irgend eines Kreises vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4, so bestimmen je drei dieser Punkte ein Dreieck und wir haben so die Dreiecke d_1, d_2, d_3, d_4, wo $d_1 \equiv p_2p_3p_4$ etc. ist. Fällt man von dem Punkte p_x auf die Seiten d_x die Normalen, so liegen die Fufspunkte in der Geraden g_x. Diese so erhaltenen Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 gehen durch denselben Punkt p. Bezeichnen wir die Höhenpunkte der Dreiecke mit h_1, h_2, h_3, h_4, so gehen die Geraden p_xh_x durch den Punkt p und werden in diesem Punkte halbiert.

Nimmt man die zwei Sätze hinzu:

c) Die Kreise, welche den vier durch je drei von vier Geraden gebildeten Dreiecken umgeschrieben sind, gehen durch denselben Punkt, und

d) die Höhen dieser vier Dreiecke liegen auf einer Geraden,

*) Vergl. Schlegel: Über die Berührungskreise des Dreiecks XXV 177—180.

so kann man folgende Fragen stellen: In welchem innern Zusammenhang stehen diese vier Sätze, und wie leiten sich die Eigenschaften jeder Figur aus denen der andern ab?

Beweise: (G.); nur kurz angedeutet.

(13a—d) Affolter. V, 368. VI, 295—297.

149. Der Chordalpunkt (das Radikalcentrum) der drei Kreise, die einem Dreieck angeschrieben sind, ist der Schwerpunkt vom Umfange des Dreiecks. Zusatz: Denkt man sich eine Seite negativ belastet, so ist der Schwerpunkt von diesem Umfange der Chordalpunkt der Kreise, die zu den anderen Seiten als angeschriebene gehören und dem eingeschriebenen Kreise.

Beweis: (G. 2); (G. T.).

(312) Fuhrmann XIV, 357. XV, 119.

150. m und m''' seien die Mittelpunkte des Inkreises und des Ankreises an AB im $\triangle ABC$; sie berühren AB resp. in F und F'''; dann geht der über FF''' als Durchmesser beschriebene Kreis durch die Punkte A' und B', die Projektionen von A und B auf der Halbierungslinie des Winkels γ.*)

Beweis: (G. 2).

(*272*) Mathesis. XVI, 505.

151. Im $\triangle ABC$ sei $CP \perp AB$, m der Mittelpunkt des Inkreises, m''' der des Ankreises zu AB; dann wird $\sphericalangle mPm'''$ durch AB halbiert.

Beweis: (G.).

(509) Stade XVI, 275. XVI, 275.

152. Jeder Kreis, den man bei einem Dreieck über der Centrale eines Ankreises und des Inkreises als Durchmesser schlägt, schneidet auf den Seiten a, b, c die Strecken a, b, c ab (von den Ecken aus gemessen) und zwar jede zweimal.

Beweis: (G. 3); (G. T.).

(642) Weber XVII, 597. XVIII, 352.

153. Die Fufspunkte der Lote, welche von zwei Ecken A und B eines Dreiecks ABC auf die Halbierungslinien ihrer Winkel gefällt sind, liegen in der der dritten Ecke C entsprechenden Berührungssehne FG des eingeschriebenen Kreises. (F auf AC; G auf BC.)**)

Beweis: (G. 3); (T. R.); (K. M.); (P. G.).

(656) Kober XVIII, 37. XVIII, 444.

---

*) Der Kreis über FF''' berührt die über AO und BC als Durchmesser beschriebenen Kreise und zwar den einen von innen, den andern von aufsen.

**) Fällt man von den Ecken eines Dreiecks auf die Halbierungslinien der Innen- und Aufsenwinkel die Senkrechten, so liegen von den 12 Punkten viermal je sechs auf einem Kreise; nämlich auf dem Orthogonalkreise zu je drei der vier Berührungskreise.

154. Von einem beliebigen Punkte P einer Dreieckseite ausgehend stumpfe man die drei Ecken des Dreiecks durch die gebrochene Linie $PQRS$ gleichschenklig ab (P und S auf BC, Q auf AB, R auf AC).

a) P, Q, R, S liegen auf einem Kreise, der mit dem Inkreis koncentrisch ist.

b) Setzt man die Konstruktion von S aus in derselben Richtung fort, so liegen auch die weiteren Punkte T und U auf demselben Kreise.

c) $PS = QT = RU$

d) PS, QT, RU werden durch die Berührungspunkte des Inkreises des gegebenen Dreiecks halbiert.

Beweis: (G.).

(674a—d) Simon XVIII, 198. XVIII, 597.

155. Sind O und O_1 die Mittelpunkte des Inkreises von $\triangle ABC$ und des Ankreises an a, so geht der Kreis BCO auch durch O_1. Die Tangenten am Kreise $BOCO$, a) in B und C, b) in O und O_1, c) in den Schnittpunkten C' und B' des Kreises mit AC und BC gehen durch je einen Punkt der Halbierungslinie des Aufsenwinkels bei A.*)

Beweis: (G.); (H. B.).

(942) Bücking XXI, 195. XXI, 585.

156. a) Zieht man durch die Mittelpunkte O, O_a, O_b, O_c des Inkreises und der Ankreise des Dreiecks ABC Parallelen zur Seite BC, welche AB bzw. D, D', D'', D''' und AC bzw in E, E', E'', E''' schneiden, so gehen die Geraden DE', $D'E$, $D''E'''$, $D'''E''$ durch die Mitte von BC.

b) DE' geht durch O_c, $D'E$ durch O_b, $D''E'''$ durch O_a, $D'''E''$ durch O.

c) Berührt BC die Kreise O, O_a, O_b, O_c bzw. in I, L, N, P, so ist $DE' \parallel AN$, $D'E \parallel AP$, $D''E''' \parallel AJ$, $D'''E'' \parallel AL$.

Beweis: a) (G.); (H. B.); (G. R.); (K. M.). b) (H. B.); (G. T.). c) (G.); (K. M.).

(1040) Ritgen XXII, 274. XXIII, 45.

---

*) In einem Sechseck (hier $OBB'O_1CC'$), welches in einen Kreis beschrieben ist und durch eine Gerade OO_1 symmetrisch halbiert wird, schneiden sich die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche auf einer Senkrechten zur Symmetrieachse liegen, während die drei Hauptdiagonalen sich in dem Pol D dieser Geraden schneiden. — Legt man an den Kreis in O, B, B', O_1, C, C' Tangenten, so entsteht ein Sechseck, dessen gegenüberliegende Seiten sich in drei Punkten schneiden, die auf derselben Geraden liegen und dessen Hauptdiagonalen auch durch den Pol D dieser Geraden gehen. Penseler.

157. Zieht man durch die Mittelpunkte O_a, O_b, O_c der Ankreise des Dreiecks ABC Parallelen zu den Seiten und zwar $B'C' \parallel BC$ durch O_a, $C'A' \parallel CA$ durch O_b, $A'B' \parallel AB$ durch O_c, so wird a) BC durch $A'O_a$ halbiert, ebenso CA durch $B'O_b$, AB durch $C'O_c$, und es ist b) $\triangle ABC.\ A'B'C' = r^2(a+b+c)^2$, wenn r der Radius des Umkreises ist.

Beweis: a) (G. 2); (P. L.); (H. B.); (G. R.). b) (G. R. 2); (T. R.). Auch mit Hilfe von (K. M.) sind beide Sätze zu beweisen.

(1121a, b) Ritgen XXIII, 271. XXIV, 18.

158. Der Inkreis I des Dreiecks ABC $(a > b)$ berühre AB in D; CI treffe AB in O; man fälle AE und $BF \perp CO$ und konstruiere die Parallelogramme $DEAG$ und $DFBH$, so ist zu beweisen, daſs a) A, B, G, H auf einem Kreise liegen; b) der Mittelpunkt N dieses Kreises und I von AB gleichweit entfernt sind.

Beweis: (G.).

(*556*) Mathesis. XXIV, 23.

159. O sei der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$; m, m', m'', m''' seien die Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise. Auf BA und CA trägt man von B und C aus nach A zu $BC = BB' = CC'$ ab und ebenso nach der entgegengesetzten Seite $BB'' = CC'' = BC$. Dann sind

a) $B'C'$, $B''C''$, $B'C''$, $B''C'$ bezw. senkrecht zu Om, Om', Om'', Om'''.

b) Die Radien der Umkreise der Dreiecke $AB'C'$, $AB''C''$, $AB'C''$, $AB''C'$ sind bezw. $= Om$, Om', Om'', Om'''.

Beweis: (G. R.); (G.).

(*557*) Mathesis. XXIV, 24.

160. Zieht man vom Inkreismittelpunkt O eines Dreiecks Gerade nach den Endpunkten und verlängert diese um ihre eigene Länge, so liegen die Endpunkte der Verlängerungen auf dem durch die drei Mittelpunkte O_a, O_b, O_c der Ankreise bestimmten Kreise.

Beweis: (G.).

(1249) Vollhering XXV, 49. XXV, 427.

161. Sind m, m', m'', m''' die Mittelpunkte der Berührungskreise des Dreiecks ABC und wird AB von den Kreisen bez. in F, F', F'', F''' berührt, so schneiden sich mF''', $m'F''$, $m''F'$, $m'''F$ im Mittelpunkt der Höhe von C auf AB.

Beweis: (H. B.); (G. T.).

(1312) Hülsen XXV, 431. XXVI, 184.

$\varkappa$. Kreise um die Eckpunkte eines Dreiecks.

162. Beschreibt man in dem beliebigen Dreieck ABC mit einem beliebigen Radius um B einen Kreis, welcher AB in D und BC in E trifft, dann mit CE um C einen Kreis und in gleicher Weise so fort, dann trifft der sechste Kreisbogen mit dem ersten in D zusammen.*)

Beweis: (G.); (G. R.).

(1164) Höttermann XXIII, 592. XXIV. 444.

163. Die Winkel eines Dreiecks ABC mögen α, β, γ heifsen, d bezeichne den Durchmesser des Umkreises von ABC; werden nun die Kreise beschrieben: aus A mit dem Radius $d \cos \alpha$, aus B mit $d \cos \beta$ und aus C mit $d \cos \gamma$, so gehen diese Kreise durch einen Punkt O. — Dieser Satz soll bewiesen und aufserdem erörtert werden, mit welchem der ausgezeichneten Punkte des Dreiecks der Punkt O zusammenfällt.**)

Beweis: (G. T. 2). O ist der Höhenschnittpunkt.

(1239) Schlömilch XXIV, 608. XXV, 347.

λ. Figuren über den Seiten eines Dreiecks.***)

164. Über der Basis AB sind zwei Dreiecke ABC und ABD konstruiert; auf AC oder deren Verlängerung ist der Punkt E, ebenso auf BD der Punkt F willkürlich gewählt; zieht man nun von einem beliebigen Punkte P der Geraden AB aus die Gerade PE, welche BC in Q schneidet, und analog PF, welche AD in R trifft, so liegt der Durchschnitt von ER und FQ auf CD.

Beweis: (P. L.); (P. G.); (G.); (K. M.).

(145) Schlömilch XII, 110. XII, 428.

165. Über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC zeichnet man nach beiden Ebenenteilen gleichseitige Dreiecke (über

---

*) Folgerungen: 1) Sind die Schnittpunkte der Reihe nach D, E, F, G, H, I, so ist $\triangle DFH \cong EGI$. 2) Die sechs Punkte liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt des Inkreises ist. Bücking.

Der Satz gilt auch für ein n Eck mit ungerader Seitenzahl. (Beseke, Emmerich.)

**) Es giebt unendlich viele Kreistripel, deren Mittelpunkte auf einem Kreise liegen, die durch einen festen Punkt gehen und von welchem die zweiten Schnittpunkte je zweier Kreise auf dem gegebenen Kreise liegen. Die Verbindungslinien je dreier zugehöriger zweiten Schnittpunkte umhüllen einen Kreis, dessen Mittelpunkt der feste Punkt ist. Bökle.

***) Vergl. Simon: Über gewisse Dreiecks-Transversalen. XVII, 410—421.

$BC:BCA'$ und BCA'' u. s. w.) und verbindet die Ecken des gegebenen Dreiecks entsprechend mit den neu erhaltenen Ecken.

1) AA', BB', CC' schneiden sich in einem Punkte P; AA'', BB'', CC'' in Q.

Beweis, (G. 2); (P. G. 2); (G. T.); (K. M.).

2) $AA' = BB' = CC' = f$; $AA'' = BB'' = CC'' = g$.

Beweis: (G.).

3) $f^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \vartheta)$;

$g^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}(1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \vartheta)$;

$fg = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\sqrt{1 - 3 \operatorname{tg} \vartheta^2}$, wo ϑ der bekannte Winkel ist, welcher zur Bestimmung der Segmentärpunkte benutzt wird.

Beweis: (G. T. 2). Vergl. E. § 9 Nr. 4.

(250) FUHRMANN XIII, 364. XIV, 263—266.

166. Konstruiert man über den Seiten eines Dreiecks ABC gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke, so daſs die Seiten des Dreiecks die Hypotenusen werden und bezeichnet die neuen Ecken resp. mit $A'B'C'$, so ergeben sich folgende Sätze:

a) AA', BB' CC' schneiden sich in einem Punkte.

Beweis (G. T.).

b) $AA' = B'C'$, $BB' = C'A'$, $CC' = A'B'$.

Beweis: (T. R. 2); (G. R.); (G.)

c) Die betreffenden Geraden, also z. B. AA' und $B'C'$ stehen senkrecht auf einander. Der Schnittpunkt der Geraden AA', BB', CC' ist also der Höhenschnittpunkt von $A'B'C'$.

Beweis: (G. 2); (G. T.); (T. R.).

d) Verbindet man die Schnittpunkte von AA' und $B'C'$ u. s. w. mit den resp. Mittelpunkten der Seiten des Dreiecks, so schliessen die Verbindungslinien einen rechten Winkel ein.

Beweis: (G. 2).

e) Diese Geraden bilden resp. gleiche Winkel mit den Seiten des Höhenfuſspunktdreieckes von $A'B'C'$, und zwar so, daſs die gleichen Winkel immer an den Ecken des genannten Dreiecks liegen.

Beweis: (G.).

(251—255) FUHRMANN XIII, 364 u. 365. XIV, 266—268.

167. (Im Anschluſs an den vorigen Satz.) Bezeichnen $\triangle$, $\triangle'$, die Flächen ω, ω' die Brocardschen Winkel der Dreiecke ABC, $A'B'C'$, so hat man $\triangle' = \triangle\left(1 + \frac{1}{2}\cot\omega\right)$ und $\frac{1}{4}\triangle = \triangle'\left(1 - \frac{1}{2}\cot\omega'\right)$.

Beweis: (G. T.).

(1304) EMMERICH XXV, 351. XXVI, 178.

168. Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks ABC die gleichseitigen Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1, deren Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 sind, so ist $\triangle M_1M_2M_3$ gleichseitig.*)

Beweis: (G. 2).

(904) VOLLHERING XX, 593. XXI, 345.

169. In einem Dreieck, dessen Fläche gleich $\varDelta$ ist, hat man die Höhen AD, BE, CF verlängert, bis sie die über BC, CA, AB konstruierten Halbkreise in den Punkten G, H, I schneiden, wobei $DG = a_1$, $EH = b_1$, $FI = c_1$ sein möge; werden nun über den Dreiecksseiten nach aufsen hin die gleichschenkligen Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1 mit den Höhen $\frac{\varDelta}{a_1}$, $\frac{\varDelta}{b_1}$, $\frac{\varDelta}{c_1}$ konstruiert, so gehen die Transversalen AA_1, BB_1, CC_1 durch einen Punkt O.**)

Beweis: (G. R.); (K. M.).

(703) SCHLÖMILCH XVIII, 445. XIX, 180 u. 345.

---

§ 2. Das Parallelogramm und das Trapez.

a. Das Rechteck.

1. Sind irgend zwei aufeinander senkrecht stehende Strecken AC und BD gegeben und konstruieren wir ein Rechteck $XYZU$ so, dafs das eine Parallelenpaar XY und UZ durch resp. A und C, das andere YZ und XU durch resp. B und D geht, so hat

---

*) Zusätze: 1) Der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC ist Mittelpunkt des Dreiecks $M_1M_2M_3$.

Beweis: (G.).

DUDA. XXI, 345.

2) Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks ABC nach aufsen die untereinander ähnlichen Dreiecke A_1BC, AB_1C, ABC_1, so bilden deren Umkreismittelpunkte ein ihnen ähnliches Dreieck. Oder auch: Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks Kreisbogen, die sich in einem Punkte O innerhalb des Dreiecks schneiden, so bilden die Mittelpunkte, um welche diese Bogen beschrieben sind, ein Dreieck, dessen Winkel supplementär zu den Winkeln sind, welche die von O nach den Dreiecksecken gezogenen Strahlen mit einander bilden.

DUDA. FINSTERBUSCH. FRANZ.

3) Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks nach aufsen gleichschenklige Dreiecke, deren Winkel an der Spitze zusammen 360° betragen und beschreibt um jede dieser Spitzen einen Kreis, der die zugehörige Dreiecksseite als Sehne fafst, so schneiden sich die drei Kreise in einem Punkte. FRANZ.

**) 1) Die Entfernungen des Punktes A_1 von den Seiten verhalten sich wie $\frac{1}{\sqrt{\sin 2\alpha}} : \frac{1}{\sqrt{\sin 2\beta}} : \frac{1}{\sqrt{\sin 2\gamma}}$.

2) $\triangle BOC : COA : AOB = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} : \sqrt{\operatorname{tg}\beta} : \sqrt{\operatorname{tg}\gamma} = \triangle BGC : CHA : AIB$. STEGEMANN.

das Rechteck eine feste Form, indem sich dessen Seiten wie $AC:BD$ verhalten, seine Mittelpunkte auf einem Kreise liegen und seine Diagonalen durch zwei feste Punkte P und Q dieses Kreises gehen. Sind E und F Halbierungspunkte von AC und BD, so ist FE Durchmesser dieses Kreises und $PQ \perp FE$. — Ist insbesondere D Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, so wird der Kreis zum Feuerbachschen Kreise des Dreiecks und die Umkreise der Rechtecke gehen durch den Schnittpunkt O von AC und BD und die Punkte P und Q werden zu Höhenfufspunkten.

Beweis: (G. 2).

(654) Sporer XVIII, 37. XVIII, 441.

2. In ein gegebenes Parallelogramm $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt O ($AB > AD$, $\sphericalangle BAD < 90^0$) soll ein Rechteck $MNPQ$ konstruiert werden, das einem gegebenen Rechteck ähnlich ist, in dem also $\sphericalangle NMP = \delta$ ist. — Konstr. An BC lege man von B nach AD hin die Strecke $BE = BC$ so, dafs $\sphericalangle CBE = 2\delta$ ist und ziehe durch O zu AE eine Parallele, welche AB in M und CD in P schneidet. — Ein Beweis dieser Konstruktion und folgender Sätze wird verlangt:

a) Die Punkte M, N, P, Q liegen auf den Seiten des Parallelogramms, wenn $o < \delta < OBA$ ist.

b) M und P liegen auf AB und CD, dagegen N und Q auf den Verlängerungen von BC und DA, wenn $\sphericalangle OBA < \delta < 90^0 - OCB$ ist.

c) M, N, P, Q liegen auf den Verlängerungen der Parallelogrammseiten, wenn $\delta > 90^0 - OCP$ ist.

Beweis: (G. T.).

(906) Schlömilch XX, 593. XXI, 347.

3. Trifft im Rechteck $ABCD$, dessen Mittelpunkt O sei, das Lot CH von C auf BD, die Halbierungslinie des Winkels BAD in P, so ist $PC = AC$.

Beweis: (G.).

(*546*) Educ. Times. XXIII, 513.

b. Das allgemeine Parallelogramm.

4. Die Summe der Quadrate über den Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen.

Beweis: (G.).

Duda II, 214; Brockmann IV, 39. II, 214; IV, 39.

5. Zieht man durch jede Ecke eines Dreiecks ABC je zwei Parallelen zu zwei gegebenen Geraden, so erhält man drei Parallelogramme $BA'CA''$, $CB'AB''$, $AC'BC''$, deren Diagonalen die

Dreiecksseiten sind. Zu beweisen, dafs sich die anderen Diagonalen dieser Parallelogramme in einem Punkte schneiden.

Beweis: (G.).

(*101*) Journ. élém. XIII, 126.

6. Zu beweisen, dafs, wenn man durch zwei Gegenecken A, C eines Parallelogramms ($ABCD$) die sich in O schneidenden Geraden AO, CO so zieht, dafs sie mit den anstossenden Seiten die gleichen Winkel BAO, BCO bilden, auch $\sphericalangle ODA = OBA$ ist.

Beweis: (G.); (T. R.).

(190) Bermann XII, 432. XIII, 279.

7. Gegeben ist ein Parallelogramm $CEDF$; die Parallele durch D zu EF treffe CE in A und CF in B, und ein durch C gehender beweglicher Strahl treffe ED in M und FD in N; dann ist $AM \parallel BN$. Zieht man $CX \parallel AM$, so ist $C(BAMX)$ harmonisch.

Beweis: (G.).

(666) Kober XVIII, 133. XVIII, 590.

8. Zieht man durch den Mittelpunkt M eines Parallelogramms $ABCD$ einen Strahl, der CD in X und die Verlängerung von BC in Y schneidet, und bringt BX zum Schnitt mit DY in Z, so ist $AZ \parallel MY$.

Beweis: (G. 3); (P. G.), auch durch (K. M.) ausführbar.

(1166) Rulf XXIV, 23. XXIV, 445.

9. Verbindet man die Seitenmittelpunkte eines Vierecks der Reihe nach, so erhält man bekanntlich ein Parallelogramm. Wiederholt man diese Konstruktion, so werden einerseits das 1., 3., 5., . . . andererseits das 2., 4., 6., . . . Parallelogramm ähnlich. Alle Parallelogramme sind einander ähnlich, wenn beim ersten Parallelogramm eine Diagonale das $\sqrt{2}$fache einer Seite ist, oder wenn beim ursprünglichen Viereck eine Diagonale das $\sqrt{2}$fache der Verbindungslinie der Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten ist.

Beweis: (G.).

(1331) Sievers XXV, 514. XXVI, 346.

c. Das Trapez.*)

10. a) Auf der durch den Diagonalenschnittpunkt eines Trapezes zu den Grundlinien a und c gezogenen Parallelen be-

*) Vergl. Erler: Das Antiparallelogramm, dem ein Kreis eingeschrieben werden kann. V, 432—455.

grenzen die Schenkel das harmonische Mittel der Grundlinien; d. h. es ist die Strecke $x = \frac{2ac}{a+c}$.

b) Auf der entsprechenden Parallelen durch den Schnittpunkt der verlängerten nicht parallelen Seiten begrenzen die verlängerten Diagonalen die Strecke $y = \frac{2ac}{a-c}$.

Beweis: (G. R. 4).

(1311) Hülsen XXV, 431. XXVI, 182, 280 Druckfehler-Verzeichnis XXVII, 265.

---

§ 3. Das Viereck.*)

a. Das beliebige Viereck.

1. In jedem Viereck $ABCD$ liegt der Schwerpunkt S, der Schnittpunkt O der Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten und der Schnittpunkt E der Diagonalen in gerader Linie; und es verhält sich $SO : OE = 1 : 3$.

Beweis: (G. 3); (P. L.).

(167) Stoll XII, 266. XIII, 119.

2. M und N seien die Mitten der Diagonalen AC und BD eines Vierecks; G sei die Mitte von MN, S der Durchschnittspunkt der Mittelsenkrechten der Diagonalen; endlich sei O der Mittelpunkt der Diagonalen des Parallelogramms, welches man erhält, wenn man von A und C Senkrechte auf BD, und von B und D Senkrechte auf AC fällt. Zu beweisen, daſs SOG eine gerade Linie ist.

Beweis: (G.).

(*279*) Mathesis. XVII, 34.

3. Im Viereck $ABCD$ seien die Winkel β und δ rechte; von C fällt man auf die beiden Halbierungslinien des Winkels α die Senkrechten CC' und CC''. Dann geht $C'C''$ durch den Mittelpunkt BD.

Beweis: (G.).

(*390*) Educ. Times. XX, 198.

4. In jedem Viereck sind die Winkel der Symetrieachsen der Gegenseiten die arithmetischen Mittel der Gegenwinkel.

Beweis: (G.).

(837) Kober XX, 33. XX, 433.

---

*) Vergl. Schlömilch: Über rationale Dreiecke und Vierecke. XXIV, 401—409.

5. Zieht man durch die Seitenmittelpunkte E, F, G, H eines Vierecks $ABCD$ Parallelen zu den bezüglichen Gegenseiten, so entsteht ein neues Viereck $A'B'C'D'$ (die Parallelen durch F und G treffen sich in A', die durch G und H in B' u. s. w.), das dem gegebenen kongruent ist.

Beweis: (G. 2); (P. L.).

(839) Glaser XX, 115. XX, 503.

6. Zieht man in einem beliebigen Viereck $ABCD$ durch einen Punkt P auf der Seite AB oder ihrer Verlängerung die Parallele PQ zu einer Diagonale AC bis zur folgenden Seite BC, durch Q die Parallele QR zur zweiten Diagonale BD bis zur dritten Seite CD, dann entsprechend $RS \parallel AC$ bis AD, endlich durch S die Parallele zu BD, so trifft diese vierte Parallele wieder in P ein.*)

Beweis: (G.).

(859b) Pappit XX, 274. XXI, 23.

7. a) Die Fufspunkte der Lote, welche von jeder Ecke eines Vierecks auf die Seiten des durch die drei übrigen Ecken bestimmten Dreiecks gefällt sind, sind die Ecken von vier ähnlichen Dreiecken. b) Die Umkreise derselben schneiden sich in einem bestimmten Punkte und c) die Umkreishalbmesser verhalten sich wie die Umkreishalbmesser der vier Dreiecke des Vierecks.**)

Beweis: a) (G.). b) (G. R.); (G. T.). c) (G. 2).

(1099) Kücker XXIII, 125. XXIII, 505.

8. Aus den Radien der vier Kreise, welche die Seiten eines Dreiecks berühren, läfst sich ein Sehnenviereck (oder allgemein Viereck, da das Sehnenviereck keine besonderen Anforderungen an die Seiten stellt) bilden, wenn $a^2 + b^2 > c^2$ ist, d. h. jedem spitzwinkligen Dreieck entspricht ein reelles Sehnenviereck, bei einem rechtwinkligen Dreieck geht es in eine gerade Linie über; für ein stumpfwinkliges Dreieck ist das Viereck unmöglich.

Beweis: (G. R.); (G. T.).

(1251.) Schlömilch XXV, 49. XXV, 427.

---

9. Um die Ecken eines Quadrats $ABCD$ beschreibt man Kreisquadranten, welche die gegenüberliegenden Diagonalen zu Sehnen haben. Die Fläche des so gebildeten krummlinigen Vier-

*) Geht man von einem Punkte P der Seite AE eines Fünfecks $ABCDE$ aus und zieht entsprechende Parallelen zu den Seiten AB, CD, EA, BC, DE, AB u. s. w., so trifft die zehnte Parallele wieder in C ein.

**) b) folgt auch aus dem Satze: Der Umkreis des Fufspunktdreiecks eines Punktes A bezüglich eines Dreiecks BCD geht durch den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel $ABCD$. (Neuberg: *Sur les quadrangles complets* (Mathesis 1891).

ecks $MNPQ$ (M über AB, N über BC, P über CD, Q über AD) beträgt $a^2\left(1+\frac{1}{8}\pi-\sqrt{3}\right)$.

Beweis: (G. R.); (G. T.).

(*247*) Mathesis. XVI, 206.

b. **Das Sehnenviereck.***)

10. Das Sehnenviereck heifse $ABA'B'$. BA und $A'B'$ schneiden sich in D; $A'B$ und $B'A$ schneiden sich in D'; die Halbierungslinie von $\sphericalangle BDA'$ treffe AB' in Z_b und BA' in $Z_{b'}$; ferner treffe die Halbierungslinie von $\sphericalangle B'D'A'$ AB in Z_a und $B'A'$ in $Z_{a'}$. Es sind nun folgende Sätze zu beweisen:

a. Die Halbierungsgerade eines jeden der beiden durch Verlängerung zweier gegenüberliegenden Seiten eines Sehnenvierecks gebildeten Winkel schneidet jede der beiden anderen Seiten desselben in dem Verhältnis der beiden inneren Diagonalen, welche an diese Segmente stofsen $(AZ_b : B'Z_b = A'Z_{b'} : BZ_{b'} = AZ_a : BZ_a = A'Z_{a'} : B'Z_{a'} = AA' : BB')$.

Beweis: (G.).

(93) Consentius X, 421. XII, 32.

b. Bei verschiedenen Sehnenvierecken, die gleichwinklig, aber nicht ähnlich sind, sind alle umgeschriebenen und eingeschriebenen Vierecke derselben unter einander ähnlich. (Das umgeschriebene Viereck eines Sehnenvierecks ist dasjenige Viereck, dessen Seiten die Aufsenwinkel der Winkel des Sehnenvierecks halbieren; das eingeschriebene Viereck ist dasjenige, dessen Seiten in ihren Verlängerungen die Winkel des Sehnenvierecks halbieren. Ist das Sehnenviereck zugleich auch ein Tangentenviereck, so fallen die vier Ecken des eingeschriebenen Vierecks in einen Punkt.)

Beweis: (G.).

(94) Consentius X, 421. XII, 33.

c. In jedem Sehnenviereck ist die Differenz zweier gegenüberliegenden Seiten gleich der Summe der Tangentendifferenzen in den beiden anderen Seiten. (Jede Ecke des umgeschriebenen Vierecks ist der Mittelpunkt eines äufseren Berührungskreises, der eine Seite des Hauptvierecks und die Verlängerungen der an diese Seite stofsenden Seiten berührt. Die Differenz der Segmente der ersten Seite, durch den Berührungspunkt dieses Kreises gebildet, ist die Tangentendifferenz in dieser Seite.)

Beweis: (G.).

(95) Consentius X, 421. XII, 33.

d. Das Produkt der Radien zweier inneren Berührungskreise an zwei gegenüberliegende Seiten eines Sehnenvierecks ist gleich dem Produkte der Radien der äufseren Berührungskreise an die-

*) Vergl. § 3 Nr. 3.

selben Seiten. (Jede Ecke des eingeschriebenen Vierecks ist der Mittelpunkt eines inneren Berührungskreises, der drei Seiten des Vierecks berührt. Benannt wird dieser Kreis nach der mittleren Seite, wie in der oben beschriebenen Figur die verschiedenen Z durch die Seite, in welcher sie liegen, bezeichnet werden. Die Radien der inneren werden durch r, die der äufseren Berührungskreise durch ϱ bezeichnet. Also $r_a r_{a'} = \varrho_a \varrho_{a'}$ und $r_b r_{b'} = \varrho_b \varrho_{b'}$. Ist das Sehnenviereck zugleich Tangentenviereck, so ist $r^4 = \varrho_a \varrho_{a'} \varrho_b \varrho_{b'}$.)

Beweis: (G. R. 3).

(100) Consentius XI, 33. XII, 33.

e. Die Gerade, welche die Berührungspunkte der beiden Tangenten von dem einen Ende der dritten Diagonale (DD') an den umgeschriebenen Kreis ihres Sehnenvierecks verbindet, geht durch den Durchschnittspunkt seiner inneren Diagonalen, und ihre Verlängerung durch den anderen Endpunkt der dritten Diagonale.

Beweis (G.).

(101) Consentius XI, 34. XII, 34.

f. Bei jedem Sehnenviereck ist das Quadrat der dritten Diagonale (DD') gleich der Summe der Quadrate je einer Tangente von den beiden Endpunkten der dritten Diagonale an seinen umgeschriebenen Kreis.

Beweis: (G. 2).

(102) Consentius XI, 34. XII, 34.

g. Der umgeschriebene Kreis des eingeschriebenen Vierecks mit dem Mittelpunkte M', der umgeschriebene Kreis des Hauptsehnenvierecks mit dem Mittelpunkte M'' und der umgeschriebene Kreis des umgeschriebenen Vierecks mit dem Mittelpunkte M''' haben eine Centrale, es ist $M'M'' = M''M'''$; in der Verlängerung der Centrale über M' hinaus liegt der Durchschnittspunkt der inneren Diagonalen, wie auch die Durchschnittspunkte der drei Kreise, des ersten mit dem Mittelpunkte des einen Endes der dritten Diagonale (D) und dem Radius gleich der Tangente (t_D) von D an den Kreis M'', der zweite mit dem Mittelpunkte des anderen Endes der dritten Diagonale (D') und dem Radius gleich der Tangente ($t_{D'}$) von D' an den Kreis M'', und der dritte mit dem Durchmesser der dritten Diagonale. Die Centrale steht in P' senkrecht auf der dritten Diagonale, und es verhält sich $P'D : P'D' = t_D^2 : t_{D'}^2$. Ist das Hauptsehnenviereck zugleich auch ein Tangentenviereck, so fällt, aber nur in diesem Falle, der Diagonalendurchschnittspunkt des umgeschriebenen Vierecks auch in diese Centrale und zwar in den Punkt M', welcher dann der Mittelpunkt des für alle Seiten des Hauptsehnenvierecks gemeinschaftlichen inneren Berührungskreises ist.

Beweis: (G.).

(108) Consentius XI, 108. XII, 34.

h. Die dritte Diagonale eines Sehnenvierecks ist die Potenzlinie der Kreise M', M'' und M''', wobei es gleichgültig ist, ob der Radius des Kreises M' gleich Null ist oder nicht.

Beweis: (G.).

(109) Consentius XI, 108. XII, 34.

i. Haben verschiedene Sehnenvierecke in demselben Kreise die Eigenschaft, dafs ihre gröfsere innere Diagonale (d_1) ein Durchmesser desselben ist, und ihre kleinere Diagonale (d_2), wie ihre Lage auch wechselt, doch gleichweit vom Mittelpunkte des Kreises entfernt bleibt, so ist die dritte Diagonale (d_3) metrisch unabhängig von der Verschiedenheit aller dieser Sehnenvierecke, und ihre konstante Gröfse wird ausgedrückt durch $d_3 = \frac{d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 - d_2^2}}$. Ist aber bei diesen sonst sich gleich bleibenden Bestimmungen die gröfsere innere Diagonale d_1 der verschiedenen Sehnenvierecke nicht ein Durchmesser, ist sie aber in jedem gleichweit vom Mittelpunkte entfernt, so sind die dritten Diagonalen dieser Sehnenvierecke ungleich, und es läfst sich ihr Maximum und Minimum dadurch bestimmen, dafs man bei einem beliebigen dieser Vierecke im Scheitel seines gröfsten Winkels A, in welchem das eine Ende von d_1 liegt, eine Tangente nach beiden Seiten an den umgeschriebenen Kreis des Sehnenvierecks legt, dann den gegenüberliegenden kleinsten Winkel A' in seinem Scheitel auf beiden Seiten von d_1 anträgt, diese beiden neuen Schenkel bis an die Tangente verlängert, den Durchschnittspunkt der Tangente und desjenigen Schenkels, der durch den durch die Diagonale d_1 gebildeten gröfseren Kreisabschnitt geht, X, und den anderen Durchschnittspunkt Y nennt; so ist AX das Maximum und AY das Minimum der metrischen Länge der dritten Diagonale aller dieser Vierecke.

Beweis: (G.); (G. T.).

(110) Consentius XI, 199. XII, 35 und 427.

k. Der Flächeninhalt eines Vierecks, das Sehnen- und Tangentenviereck ist, ist gleich der Wurzel aus dem Produkte seiner vier Seiten. ($J = \sqrt{a b a_1 b_1}$).

Beweis nicht gegeben, da Satz bekannt.

(111) Consentius XI, 200. —

11. Zieht man durch den Durchschnittspunkt E der Diagonalen eines Sehnenvierecks $ABCD$ die kleinste Sehne $FKLG$ (K auf AD, L auf BC), so wird das innerhalb des Vierecks liegende Stück KL derselben durch E halbiert.

Beweis: (G.).

(*278*) Math. Magazine. XVII, 34.

12. Auf dem um ein Sehnenviereck beschriebenen Kreise nimmt man einen beliebigen Punkt M an und fällt von M auf die

Seiten Senkrechte ($MS \perp AB$, $MQ \perp BC$, $MR \perp CD$, $MP \perp AD$); dann sind die Produkte der auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Senkrechten einander gleich.

Beweis: (G. 2).

(*102*) Journ. élém. XIII, 126.

13. Kreuzen sich in einem Sehnenviereck $ABCD$ die Diagonalen senkrecht, so liegen die Halbierungspunkte E, F, G, H der Seiten AB, BC, CD, DA und die Fufspunkte E', F', G', H' der von dem Diagonalenschnitt O auf die Seiten gefällten Lote auf einem Kreise*)

Beweis: (G. 3); (P. L.), auch durch (K. M.) ausführbar.

(706) Sporer XVIII, 446. XIX, 182.

14. In jedem Sehnenviereck ist die Halbierungslinie des von zwei gegenüberliegenden Seiten gebildeten Winkels parallel der Halbierungslinie des Diagonalenwinkels.

Beweis: (G.)

(*391*) Mathesis. XX, 198.

15. Wenn sich ein Sehnenviereck um den Mittelpunkt dreht, so sind die Durchschnittspunkte seiner Seiten mit den entsprechenden in einer neuen Lage die Ecken eines Parallelogramms.**)

Beweis: (G. 3); (T. R.)

(882) Beyens XX, 434. XXI, 185 (Anmerkung).

16. In den Kreis um O sei das Sehnenviereck $ABCD$ gezeichnet; AD und BC schneiden sich in E, AB und DC in F und die Diagonalen in S. Sind nun M und N die Mittelpunkte von AD und BC, so ist FS Tangente am Kreise MSN.

Beweis: (H. B.)

(*543*) Educ. Times. XXIII, 512.

17. Wenn man in ein Sehnenviereck unendlich viele Vierecke beschreibt, deren Umfang ein Minimum ist, so ist dieses Minimum vierte Proportionale zu dem Radius r des Umkreises und den Diagonalen BD und AC.

Beweis: (G.).

(*544*) Journ. élém. XXIII, 512.

---

*) $E'F'G'H'$ ist ein Tangentenviereck und O Mittelpunkt des Inkreises. Auch wenn $ABCD$ kein Sehnenviereck ist, liegen die Punkte, in denen $E'O$, $F'O$ u. s. w. die gegenüberliegenden Seiten treffen, auf dem Kreise $E'F'G'H'$. Thieme.

**) Besondere Fälle: 1) Schneiden sich die Diagonalen des Sehnenvierecks rechtwinklig, so ist das Parallelogramm ein Rechteck. 2) Ist das Sehnenviereck ein Trapez, so ist das Parallelogramm ein Rhombus. Der Satz kann auf ein Sehnenvieleck ausgedehnt werden.

18. Die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Sehnenvierecks $ABCD$ seien bezeichnet mit a, a'; b, b'; c, c' ($AB = a$, $AC = c'$, $AD = b'$); die Schnittpunkte der bez. Gegenseiten mit E_a, E_b, E_c.

a) Die Umkreise der Dreiecke aE_c, $a'E_c$, cE_a, $c'E_a$ schneiden sich in dem auf E_aE_c gelegenen Höhenfufspunkt des Dreiecks $E_aE_bE_c$.

b) Die Centralen der Umkreise von aE_c und $a'E_c$, sowie von cE_a und $c'E_a$ stehen senkrecht auf E_aE_c; die Centralen der Umkreise von aE_c und $a'E_c$, sowie von aE_b und $a'E_b$ halbieren E_bE_c.

c) Die Verbindungslinie des Umkreismittelpunktes M von $ABCD$ mit dem Umkreismittelpunkt eines der obigen Dreiecke (z. B. aE_c) ist gleich dem Umkreisradius des bezüglichen Gegendreiecks ($a'E_c$).

Beweis: *a*) (H. B. 3). b) (G.). c) (G.).

(1123) Glaser XXIII, 351. XXIV, 21.

19. (Im Anschlufs an Nr. 18.) a) Bezeichnet man den Mittelpunkt des Umkreises von aE_c mit (aE_c), so bilden die Punkte (aE_c), ($a'E_c$), (cE_a), ($c'E_a$) ein gleichschenkliges Trapez, dessen Höhe $\frac{1}{2}E_aE_c$ ist.

b) Die Umkreise der bezüglichen drei Trapeze haben zwei gemeinschaftliche Punkte. Der eine dieser Punkte ist M.

Beweis: a und b (G. 2.)

(1238) Glaser XXIV, 608. XXV, 346.

c. Das Tangentenviereck.

20. In einem Tangentenviereck $ABCD$ sind die Höhenschnittpunkte A', B', C', D' der vier Dreiecke, von denen jedes durch zwei benachbarte Seiten und die betreffende Berührungssehne gebildet wird, die Ecken eines Parallelogrammes.

Beweis: (G.)

(*545*) Educ. Times. XXIII, 513.

21. Aus den vier Radien der Berührungskreise eines Dreiecks läfst sich ein Tangentenviereck bilden unter der Bedingung, dafs $70^0 20' 30'' \leqq \gamma < 90^0$ ist.

Beweis: (T. R.)

(1342) Franz XXV, 589. XXVI, 425.

---

*) Die Mitten von ME_c, (aE_c) ($a'E_c$), (bE_c) ($b'E_c$) fallen in einen Punkt zusammen; ebenso die von ME_b, (aE_b) ($a'E_b$), (cE_b) ($c'E_b$) etc. Glaser.

d. Das Sehnen-Tangentenviereck.

22. In einem Sehnen-Tangentenviereck ist das Produkt der Diagonalen $= \frac{8r^2\varrho^2}{r^2 - d^2}$ (r Radius des umgeschriebenen Kreises, ϱ der des eingeschriebenen, d Entfernung der Mittelpunkte M und O beider Kreise).

Beweis: (T. R.)

(*103*) Nouv. Ann. XIII, 127.

23. Im bicentrischen Viereck ist die in Bezug auf den Diagonalschnittpunkt konstruierte Polare identisch dieselbe, mag der Punkt dem ein- oder umgeschriebenen Kreise angehören.

Beweis: Auf Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Physik XXIX, p. 102 verwiesen.

(785) Schuhmacher XIX, 346. —

24. Bezeichnen u, v, w die Zahlenwerte der Seiten eines Dreiecks, ist ferner s der halbe Umfang und $\varDelta$ die Fläche des Dreiecks, so geben die Ausdrücke $a = us$, $b = (v + w)(s - v)$, $c = u(s - u)$, $d = (v + w)(s - w)$ die Zahlenwerte von den Seiten eines Vierecks, das in einen Kreis und zugleich um einen anderen Kreis beschrieben ist. Die Fläche dieses doppelt-centrischen Vierecks beträgt $F = u(v + w)\varDelta$. Sind u, v, w rationale Zahlen von der Beschaffenheit, dafs $\varDelta$ rational ist, so werden a, b, c, d, F gleichfalls Rationalzahlen; die obigen Formeln liefern demnach ein Mittel, um aus jedem rationalen Dreieck ein rationales doppelt-centrisches Viereck abzuleiten. Z. B. $u = 13$, $v = 14$, $w = 15$.

Beweis: (G. R.)

(973) Schlömilch XXI, 428. XXII, 191.

25. Es sei $ABCD$ ein Viereck; E sei der Durchschnitt von AC und BD, F der von AB und CD, G der von BC und AD; ist nun $ABCD$ sowohl ein Sehnen- wie ein Tangentenviereck, so lassen sich bekanntlich unendlich viele Vierecke konstruieren wie z. B. $abcd$, welche in den Umkreis des ersten und um den Inkreis des ersten Vierecks beschrieben sind, wobei der Punkt a willkürlich auf dem Umkreise gewählt werden kann. Es gilt dann der Satz: Der Durchschnitt von ac und bd fällt mit E zusammen, die Durchschnitte f und g der Gegenseiten ab, cd und bc, ad liegen auf der Geraden FG; diese ist in Beziehung auf beide Kreise die Polare von E als Pol.*)

---

*) Besonderer Fall eines für alle Vielecke gerader Seitenzahl in der Ebene und auf der Kugel gültigen Satzes. Vergl. Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXIX, p. 92. Stoll.

Beweis: (H. B.)
(1269) Schlömilch XXV, 116. XXV, 585.
Weitere Eigenschaften des Sehnentangentenvierecks siehe in Nr. 10.

e. Das vollständige Viereck.

26. Ein Dreieck-Dreiseit bestimmt mit einem vierten Punkte und einem vierten Strahle der Ebene ein vollständiges Viereck und ein vollständiges Vierseit, deren Diagonaldreieck-Dreiseite perspektivisch liegen.
Beweis: (P. G.); (K. M.)
(777) Kober XIX, 273. XX, 109.

27. a) Ist $ABCD$ ein vollständiges Viereck, so bilden die sechs Mittelsenkrechten die Seiten eines zweiten vollständigen Vierecks. Die drei Diagonalpunkte des letzteren sind die Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten auf den Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten des ersten Vierecks senkrecht stehen.
b) Die Seiten des Dreiecks bilden den Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von zwei Ecken des (ersten) Vierecks gleich der Summe der Quadrate der Entfernungen von den beiden anderen ist.
Beweis: Vergl. Glaser: Über einige merkwürdige Punkte des Vierecks. § 3 u. 4.
(878 a b) Thieme XX, 350. XXI, 113.

28. Nach einer Bemerkung von Gaufs liegen die Mittelpunkte der drei Diagonalen jedes vollständigen Vierseits in einer Geraden. Weniger bekannt scheint folgender besonderer Fall dieses Satzes zu sein: Wenn das Vierseit um einen Kreis beschrieben ist, so geht die Gaufssche Gerade durch den Mittelpunkt des Inkreises.*)
Beweis: (G. 2.) Vergl. Glaser: Progr. d. Realgymn. i. Homburg v. d. Höhe 1887, § 20.
(939) Schlömilch XXI, 116. XXI, 583.

29. Aus dem Viereck $ABCD$ ist ein vollständiges Vierseit mit den Diagonalen AC, BD, EF gebildet, deren Mittelpunkte L, M, N auf der Gaufsschen Geraden liegen. Wie mufs nun das usprüngliche Viereck konstruiert werden, wenn das Verhältnis $LN:LM$ einen gegebenen Wert x haben soll?
Beweis: (K. M.)
(940) Schlömilch XXI, 116. XXI, 584.

---

*) Der Satz ist ein specieller Fall von dem Newtonschen Satze: Die Mittelpunkte aller einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte liegen auf der Geraden, welche die Mitten der Diagonalen enthält. **Newton:** Philos. nat. Princip. math. Lib. I, Lemma 25. Zusatz 3. Vergl. **Fuhrmann:** Synthetische Beweise.

§ 4. Das Vieleck.

a. Das regelmäſsige Vieleck.

1. Sind ϱ und r die Radien eines regulären n-Ecks, ϱ_1 und r_1 die Radien des ihm isoperimetrischen $2n$-Ecks, so ist

$$\varrho_1 = \tfrac{1}{2}(\varrho + r) \quad \text{und} \quad r_1 = \sqrt{r\varrho_1}.$$

Zerlang II, 339. II, 339.

2. Im Innern eines regelmäſsigen n-Ecks ist eine Linie so gezogen, daſs sie alle Flächenpunkte, welche dem Mittelpunkt näher liegen als dem Umfang, von den übrigen trennt. Das Verhältnis der beiden Flächenstücke, in welche dadurch das n-Eck geteilt wird, ist $(3 - 2\,\mathrm{tg}\,\omega^2 - \mathrm{tg}\,\omega^4) : (9 + 2\,\mathrm{tg}\,\omega^2 + \mathrm{tg}\,\omega^4)$ und das Verhältnis der Länge der Teilungslinie zum Vielecksumfang ist

$$\left(\frac{\sin\omega}{\cos\omega^2} + l\left(\frac{1+\sin\omega}{\cos\omega}\right)\right) : 2\,\mathrm{tg}\,2\,\omega,$$

wo $\omega = \dfrac{360^0}{4n}$ ist.

Beweis: (T. R.)

(216) Weinmeister XIII, 125. XIV, 32.

3. Sind n und p die Anzahlen der Seiten zweier regulären Vielecke in demselben Kreise und ist $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{6}$, so ist $a_n = \varrho_p - \frac{1}{2} a_p \sqrt{3}$ und ebenso $a_p = \varrho_n - \frac{1}{2} a_n \sqrt{3}$, wo a die Seite und ϱ den kleinen Radius eines regulären Vielecks bedeutet.*)

Beweis: (G. R. 2); (T. R. 3.)

(288) Hülsen XIV, 191. XIV, 588—590.

4. Sind n und p die Anzahlen der Seiten zweier regulären Vielecke in demselben Kreise und ist $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{6}$, so ist $a_n = \frac{1}{2} a_p \sqrt{3} + \varrho_p$ und $a_p = \frac{1}{2} a_n \sqrt{3} - \varrho_n$.**)

Beweis wie Nr. 3.

(289) Hülsen XIV, 191. XIV, 588—590.

5. Wenn die Geraden, welche die Ecken eines regulären n-Ecks $ABC \cdots N$ mit einem Punkt P verbinden, den Umkreis

---

*) Die Bedingung $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} = \frac{1}{6}$ kann nur durch folgende reguläre Vielecke erfüllt werden: 7-Eck und 42-Eck; 8-Eck und 24-Eck; 9-Eck und 18-Eck; 10-Eck und 15-Eck; 12-Eck und 12-Eck.

**) Der Satz gilt für folgende reguläre Vielecke: 5-Eck und 30-Eck; 4-Eck und 12-Eck; 3-Eck und 6-Eck. Hülsen.

in A_1, B_1, $C_1 \cdots N_1$ schneiden, so ist $S = AP \cdot AA_1 + BP \cdot BB_1 + \cdots + NP \cdot NN_1 = 2nr^2$.

Beweis: (G.) Vergl. C. § 3, Nr. 11 b.

(1254) Steckelberg XXV, 49. XXV, 504.

6. Sind A_1, A_2, $\cdots A_n$ die Ecken eines regulären Polygons, ist ferner r der Radius des Umkreises und P irgend ein Punkt innerhalb des Polygons, so ist stets $PA_1 + PA_2 + \cdots PA_n > nr$.

Beweis: (G.)

(663) Sporer XVIII, 132. XVIII, 502.

7. Im regelmäſsigen n-Eck ist

a) die Summe der Quadrate über sämtlichen Seiten und Diagonalen gleich n^2r^2 und

b) das Produkt sämtlicher Seiten und Diagonalen gleich $(nr^{n-1})^{\frac{n}{2}}$, wo mit r der Radius des Umkreises bezeichnet wird.

Beweis: (T. R.); (R.)

(717) Zimmermann XVIII, 504. XIX, 266.

8. In einen mit dem Radius 1 konstruierten Kreis sei ein regelmäſsiges Sehnenvieleck von n Seiten beschrieben, um denselben Kreis das regelmäſsige Tangentenvieleck von gleicher Seitenzahl; werden die Flächen dieser Vielecke mit S_n und T_n bezeichnet, so ist schon bei mäſsigen n sehr nahe $\pi = \frac{1}{3}(4S_{2n} - S_n) = \frac{1}{3}(4T_{2n} - T_n)$. Läſst sich dieser Satz elementar-geometrisch beweisen?

Beweis: (G. T.); (G. R. 2.) Vergl. Newton: Phil. nat. Princ. math. 3. Buch. Lemma 5 und Baltzer: El. d. Math.

(866) Schlömilch XX, 274. XXI, 28.

9. Die umgeschriebene regelmäſsige Fünfeckseite ist gleich der doppelten eingeschriebenen regelmäſsigen Zehneckseite eines Kreises, welcher die dem ersten Kreise eingeschriebene regelmäſsige Fünfeckseite zum Radius hat.

(163) Hoch XII, 265. —

Über das regelmäſsige Vieleck vergl. auch C. § 3, Nr. 10 u. 11.

b. Sehnen- und Tangenten-Vieleck.

10. Ist eine beliebige Anzahl Strecken gegeben und hat man aus ihnen als Seiten in willkürlicher Reihenfolge ein Kreisvieleck gebildet, so ist der Flächeninhalt desselben durch die gegebenen Strecken eindeutig bestimmt.

Beweis: (G.) Vergl. Edler: Über Max. u. Minim. b. eben. Fig. X, 245.

(621) Weinmeister XVII, 446. XVIII, 193.

11. Zeichnet man über den Seiten $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ eines Vielecks, welches dem Kreise mit dem Durchmesser d eingeschrieben ist, nach aufsen die Halbkreise, so ist die Summe der entstehenden Monde gleich der Polygonfläche, wenn $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = 2d^2$. Wie beweifst man diesen Satz und wie findet man derartige Sehnenvierecke?

Beweis: (R.) Auflösung (G. T.)

(1253) v. SCHÄWEN XXV, 49. XXV, 430.

12. Gehen n Kreise durch einen Punkt, so giebt es eine Schar von vollständigen n-Ecken, deren Seiten durch die übrigen Schnittpunkte der Kreise gehen und deren Ecken auf den Kreisen liegen; diese n-Ecke sind untereinander ähnlich.

Beweis: (G.)

(721) BÜCKING XVIII, 505. XIX, 269.

13. Im Sehnenvieleck von gerader Seitenzahl ist die Summe der Winkel an gerader Stelle gleich der Summe der Winkel an ungerader Stelle. Im Tangentenvieleck mit gerader Seitenzahl ist die Summe der Tangenten an gerader Stelle gleich der Summe der Tangenten an ungerader Stelle.

Ist die Seitenzahl ungerade, so mache man beim Sehnenviereck die Zahl der Winkel dadurch gerade, dafs man nach einer Ecke zwei Radien zieht, beim Tangentenvieleck betrachte man einen Berührungspunkt als Ecke.

Beweis: (G.)

(732) SCHUHMACHER XVIII, 602. XIX, 343.

14. Wenn drei sich in einem Punkt halbierende Strecken den Höhen eines Dreiecks gleich und parallel sind, so sind ihre Endpunkte die Endpunkte eines Tangentensechsecks.

Beweis: (G. T.); (T. R.)

(1145) KÜCKER XXIII, 431. XXIV, 263.

c. Sechseck und n-Eck der μten Art.

15. Verbindet man die Mitten der ersten, dritten und fünften Seite eines Sechsecks unter einander, dann die Mitten der zweiten, vierten, sechsten Seite, so schneiden sich die sechs Mittellinien der beiden entstehenden Dreiecke in einem Punkte.

Beweis: (G.); (K. M.) und durch physikalische Beziehungen.

(76) v. SCHÄWEN X, 197. X, 348 u. XI, 32.

16. Ein Polygon mit lauter hohlen Winkeln werde n-Eck der ersten Art genannt; dann entsteht ein n-Eck der μten Art, wenn man die 1te und $\mu + 1$te, die 2te und $\mu + 2$te, zuletzt die $n$te und μte Seite bis zu ihrem Durchschnitt verlängert. Die

Winkelsumme $W\mu$ in einem n-Eck der μten Art beträgt $2(n-2\mu)R$. NB. Es ist $\mu < \frac{1}{2}n$ und relativ prim zu n.

Beweis: (G.)

(151) Schmitz XII, 111. XII, 431.

§ 5. Der Kreis.

a. Lehrsätze, welche sich beweisen lassen, ohne die Proportionalität von Strecken zu benutzen.

1. Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkte C, dem Durchmesser XY und auf letzterem Punkt A (zwischen C und X); ferner sei Z ein Punkt der Peripherie. Dreht sich nun AZ aus der Lage AX in die Lage AY und ist hierbei Arc. ZZ_1 = Arc. Z_1Z_2, so ist $\sphericalangle ZAZ_1 > Z_1AZ_2$.

Beweis: (G. 5); davon 2 mit Proportionen.

(390) Schmitz XV, 290. XV, 606.

2. In einem Kreise (Mittelpunkt M und Radius r) ist eine Sehne AB gezogen, zu welcher der Centriwinkel 2ϑ gehört; in das gröfsere der hierdurch entstandenen Segmente ist ein Kreis (Mittelpunkt O, Radius ϱ) geschrieben, welcher die Sehne und den Bogen berührt; der Berührungspunkt C teilt die Sehne AB in die Segmente $AC = p$ und $BC = q$. Zu beweisen, dafs $\varrho = \frac{pq}{p+q}\cos\frac{1}{2}\vartheta$ ist.

Beweis: (T. R.)

(*255*) Educ. Times. XVI, 358.

3. Gegeben sind zwei konzentrische Kreise $ABCP$ und $DEFQ$ mit dem Mittelpunkte O und den Radien R und r; in jeden dieser Kreise ist ein gleichseitiges Dreieck in beliebiger Lage konstruiert; nimmt man auf jedem dieser Kreise resp. die Punkte P und Q beliebig an, so ist

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 = PD^2 + PE^2 + PF^2 = 3(R^2 + r^2).^{*)}$$

Beweis: (G. R.)

(*392*) Journ. élém. XX, 198.

4. AB sei Durchmesser, C die Mitte eines Halbkreisbogens, D die Mitte der Sehne BC; schneidet AD den Kreis in E und ist $EF \perp BC$, so ist $CF = 3EF$.

Beweis: (T. R.)

(*559*) Educ. Times. XXIV, 25.

---

*) Ersetzt man die gleichseitigen Dreiecke durch zwei reguläre n Ecke, so ist $PD^2 + PE^2 + PF^2 = QA^2 + QB^2 + QC^2 = n(R^2 + r^2)$.

5. Die Endpunkte dreier paralleler Kreissehnen Aa, Bb, Cc sind die Ecken von acht Dreiecken ABC, abc, ABc, abC, ACb, acB, BCa, bcA, deren Höhenschnittpunkte in einer Parallele zu den Sehnen liegen.

Beweis: (G. 2.)

(1133) Kücker XXIII, 352. XXIV, 183.

6. An einen Kreis mit dem Mittelpunkt C ist von einem Punkte A eine Tangente AB gezogen und in A auf AC das Lot DAD' errichtet. BC trifft die Halbierungslinie von BAD und BAD' in E und E'; dann ist $AC = EC = E'C$, und mithin, wenn F und G die Schnittpunkte der Peripherie mit AC und CE' sind, $AF = EB = GE'$.

Beweis: (G.) Vergl. Nr. 15—17.

(142) Bauer XII, 37. XII, 361.

7. Auf zwei Parallelen, deren Entfernung AB gegeben ist, sind auf derselben Seite der letzteren die Strecken AA' und BB' so angenommen, dafs $AA' \cdot BB' = AB^2$; AB' und BA' schneiden sich in M; $MP \perp AB$; MP über M verlängert trifft $A'B'$ in Q; AB und $A'B'$ treffen einander in C; dann ist M die Mitte von PQ und CM Tangente an den Kreis um AB als Durchmesser.

Beweis: (G.)

(*155 b, c*) Nouv. Ann. XIV, 359.

8. Gegeben Kreis M mit dem Radius r; an denselben legt man in P die Tangente $PP_1 = t$ und schlägt mit MP_1 um M einen Kreis; legt man auch in Q nach derselben Seite eine Tangente, welche den zweiten Kreis in Q_1 trifft, so ist $QQ_1 = t$. Verlängert man nun P_1P über P beliebig bis O, fällt von O die Senkrechte ON auf MQ und zieht QR parallel und gleich PP_1, so ist Sekt. OP_1Q_1 — Sekt. $OPQ = \triangle NQQ_1 +$ Sekt. Q_1QR.

Beweis: (R.)

(410) Schlömilch XV, 360. XVI, 20.

9. Werden zwei Kreise K und K' von der Centrale der Reihe nach in A, B, C, D geschnitten, und ist t_a die gemeinschaftliche äufsere, t_i die gemeinschaftliche innere Tangente, so ist

$$\text{a) } AC : t_a = t_a : BD; \text{ b) } AD : t_i = t_i : BC.$$

Beweis: (R.)

(510) Stade XVI, 275. XVI, 275.

10. Das gemeinschaftliche Stück F zweier gleichen Kreise K und K' mit dem Radius r ist, wenn die Centrale gleich r ist,

$$\frac{r^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Beweis: (R.)

(*246*) Journ. élém. XVI, 206.

b. **Lehrsätze, welche mit Hilfe der Proportionalität von Strecken bewiesen sind.**

α. Über Sehnen und Tangenten.

11. Auf dem Durchmesser AB eines Halbkreises ist der Punkt P gegeben, welcher mit einem beliebigen Punkte Q der Peripherie verbunden wird; wenn eine auf PQ in Q errichtete Senkrechte die Tangenten in A und B resp. in M und N trifft, so bleibt $AM \cdot BN$ konstant, wenn sich PQ um P dreht.

Beweis: (G.)

(*277*) Journ. élém. XVI, 507.

12. Konstruiert man in den beiden Endpunkten A und B einer Kreissehne AB Tangenten, die sich in M schneiden mögen, macht dann im gröfseren Segment Sehne $BC = \frac{1}{2} AB$; dann halbiert die Verbindungslinie MC den Bogen ABC.*)

Beweis: (G. 2); (G. T.)

(611) Ackermann XVII, 366. XVIII, 128.

13. Gegeben ist ein Kreis, eine feste Gerade LL', welche den Kreis schneidet, und zwei feste Punkte A und A' auf dem Kreise; man verbindet irgend einen Punkt M des Kreises mit den beiden Punkten A und A', die Geraden MA, MA' treffen die feste Linie LL' in zwei veränderlichen Punkten P und P'; nun ist zu beweisen, dafs es auf der Geraden LL' zwei feste Punkte J und J' giebt, so dafs das Produkt $JP \cdot J'P'$ konstant bleibt, wenn sich der Punkt M auf dem Umfange bewegt; die Lage der beiden Punkte J und J' zu bestimmen.**)

Beweis: Spezieller Fall eines bekannten Satzes über projektivische Punktreihen.

(5_2) Nouv. Ann. X, 353. —

14. Folgende Konstruktion einer bekannten Aufgabe zu beweisen. Gegeben Kreis K und aufserhalb die Punkte A und B. Zieht man die Tangenten AC und BD, schneidet ferner CD die AB in E und verbindet man E mit einem Endpunkt des auf AB senkrechten Kreisdurchmessers FF', so berührt, wenn diese Verbindungslinie den Kreis zum zweiten Male in G trifft, der durch A, B und G gehende Kreis den Kreis K.

(38) Binder VI, 299. —

15. An einen Kreis C sind die Tangenten AB und AB_1 gezogen; eine dritte Tangente schneidet AB in D, AB_1 in E und

---

*) Der Satz ist auch richtig, wenn BC in dem kleineren Segment liegt und gleich $\frac{1}{2} AB$ gemacht ist.

**) Die Bedingung, dafs LL' den Kreis schneiden soll, ist überflüssig.

berührt den kleineren Bogen BB_1 in F; eine Gerade durch C und $\perp AC$ trifft AB, AB_1, DE resp. in G, G_1, H; $DJ \perp GG_1$, $EK \perp GG_1$. Zu beweisen:

1. $DC^2 = DE \cdot DG$; 3. $GC^2 = DG \cdot EG_1$; 5. $HC^2 = HD \cdot HE$;
2. $EC^2 = ED \cdot EG_1$; 4. $BC^2 = DJ \cdot JK$; 6. $HF^2 = HJ \cdot HK$;

Beweis: (G.)
(138) Bauer XII, 36. XII, 360.

16. Ohne Einführung goniometrischer Funktionen zu beweisen, dafs die begrenzte Tangente DE ihren Minimalwert besitzt, wenn sie in F halbiert ist. — Unter der gleichen Bedingung wird auch $DG + EG_1$ ein Minimum, und $AD + AE$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem F in dem kleineren oder gröfseren Bogen BB_1 liegt. Vergl. Nr. 15.
Beweis: (G.)
(139) Bauer XII, 36. XII, 360.

17. Wenn $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$ ist, so ist $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma) = \sec\alpha^2$. Anwendung: Es ist $DG \cdot EG_1 = (BG + DF)(B_1G + FE) = r^2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma_1)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma_2)$, wobei $\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 = 90^0$; folglich $DG \cdot EG_1 = (r \sec\alpha)^2 = GC^2$, was mit Nr. 15, 3 übereinstimmt. Vergl. Nr. 15.
Beweis: (T. R.)
(140) Bauer XII, 36. XII, 360.

18. Wenn $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$, so wird

$$1)\quad \operatorname{tg}\gamma_1 + \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{2\sin\gamma}{\cos\gamma + \cos(\gamma_1 - \gamma_2)};$$

$$2)\quad \operatorname{tg}\gamma_1 + \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)^2} = \frac{\sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2}.$$

Ist daher γ konstant, so erlangt $\operatorname{tg}\gamma_1 + \operatorname{tg}\gamma_2$ den Minimalwert $2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$, wenn $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}\gamma$. Anwendung: $DE = DF + FE = r(\operatorname{tg}\gamma_1 + \operatorname{tg}\gamma_2)$ erhält den kleinsten Wert, wenn $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma = DCE = \frac{1}{2}BCB_1$, ist von der Lage von DE unabhängig. Vergl. Nr. 15.
Beweis: (T. R.)
(141) Bauer XII, 36—37. XII, 361.

19. Gegeben ein Kreis (Mittelpunkt O), welcher einen gegebenen Halbkreis (Mittelpunkt M) in F und seinen Durchmesser AB in G berührt; von A und B sind an den Kreis O Tangenten gezogen, welche sich in C schneiden; ferner noch $CD \perp AB$. Zu beweisen, dafs $AC \pm BC = AB \pm CD$, je nachdem der Kreis O

den Halbkreis von innen oder aufsen und resp. den Durchmesser selber oder seine Verlängerung berührt.

Beweis: (G.); (G. T.); (T. R.)

(*104*) Educ. Times. XIII, 127.

20. An einen Kreis K sind in den beiden Endpunkten des Durchmessers AB Tangenten a und b gelegt. Die Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitelpunkt A ist, schneiden b in C und D; von C und D sind an K zwei Tangenten gelegt, welche sich in P und a in F und H schneiden. 1) Die Diagonalen des Trapezes $CDHF$ schneiden einander in einem Punkte M von AB so, dafs $AM = \frac{1}{5} AB$ ist.

Beweis: (G.)

(*152*$_1$) Journ. élém. XIV, 358.

21. Gegeben ist ein Kreis O mit dem Durchmesser $AB = 2r$ und auf letzterem der Punkt C; an den Kreis sind in A und B die Tangenten AP und BQ und eine dritte bewegliche Tangente PQ gelegt. Fällt man nun $OD \perp PC$ und $OE \perp QC$ und schneiden sich AB und DE in F, so ist 1) der Punkt F fest und 2) ist GF Gegenmittellinie im $\triangle CGO$, wo G der Punkt ist, in welchem die auf AB in C errichtete Senkrechte den Kreis trifft.

Beweis: (G.)

(*383*) Journ. élém. XX, 35.

β. Über Kreise, welche einander schneiden oder berühren.

22. Gegeben sind zwei einander rechtwinklig schneidende Kreise O und O'. Ein Radius in O schneide die gemeinsame Sehne in I und den Kreis O' in D und C (D zwischen O und I), so ist, wenn AB eine beliebige durch I gehende Sehne des Kreises O ist, CI Gegenmittellinie des Dreiecks ABC.

Beweis: (G.)

(*550*) Educ. Times. XXIII, 514.

23. Gegeben zwei Kreise K und K', welche einander in C und D schneiden. Zieht man in dem einen Kreis K' die Sehne CB beliebig, schneidet BD den Kreis K zum zweiten Male in A und zieht man in Kreis K die Sehne AE parallel BC, so ist EC Tangente an Kreis K'.

(22) Binder VI, 62. —

24. Um einen Punkt O auf einem Kreise mit dem Durchmesser OE beschreibt man einen Kreis, welcher den ersteren in den Punkten A und B trifft; dann verbindet man irgend einen Punkt C des zweiten Kreises mit den Punkten A, B, E durch

Gerade, welche den ersten in den Punkten F, D, G schneiden. 1) Die Geraden EF, ED sind bezüglich parallel mit CB, CA. 2) Die Gerade CE bildet mit den Seiten des Dreiecks CAB dieselben Winkel wie die durch die Ecke C gehende Mittellinie. 3) Die Gerade CG ist mittlere Proportionale zwischen GA und GB.

(8_1) Nouv. Ann. X, 15. —

25. (Im Anschlufs an G. III, Nr. 21.) Teilt M die Strecke P_1P_2, welche die beiden sich in A und B schneidenden Kreise K_1 und K_2 auf einer durch A gehenden Geraden bestimmen, in dem konstanten Verhältnis $MP_1 : MP_2 = p_1 : p_2$, so liegen die Teilpunkte M aller durch A gehenden Geraden auf einem Kreise, welcher durch A und B geht und dessen Mittelpunkt O die Centrale K_1K_2 im Verhältnis $OK_1 : OK_2 = p_1 : p_2$ teilt.

Beweis: (G.); (K. M.)

(1029) Geiger XXII, 198. XXII, 591.

26. Wenn drei durch einen Punkt gehende Kreise so gelagert sind, dafs ihre drei weiteren Schnittpunkte auf einer Geraden liegen, so mufs der gemeinschaftliche Schnittpunkt der drei Kreise auf dem durch ihre Mittelpunkte gehenden Kreise liegen.

Beweis: (R. K.); (G. R.); (P. G.); (G. 2.)

(1252) Bücking XXV, 49. XXV, 428.

27. Ein System von Kreisen berühre sich in einem Punkte und durch diesen Punkt sei noch ein weiterer Kreis gelegt. Verbindet man nun irgend einen Punkt dieses letzteren Kreises mit den Schnittpunkten dieses Kreises mit den Kreisen des Systems, so liegen die zweiten Schnittpunkte dieser Linien mit den Kreisen des Systems auf einer geraden Linie durch den Berührungspunkt der Kreise.

Beweis: (G. 2); (G. T.) auch durch (P. G.) leicht ausführbar.

(581) Sporer XVII, 111. XVII, 521.

28. Nimmt man in dem Trapez $ABCD$, dessen Diagonalen sich rechtwinklig in P schneiden den Punkt P' symmetrisch zu P in Bezug auf die Mittellinie MN (Verbindungslinie der Mittelpunkte der nichtparallelen Seiten AD und BC und zwar M auf AD), so berühren sich die Kreise $P'CD$ und $P'AB$ mit den Mittelpunkten O und O' in P'.

Beweis: (P. L.)

(*389*) Journ. élém. XX, 197.

γ. Harmonische Verhältnisse am Kreise.

29. Zieht man von zwei Punkten eines Kreisdurchmessers, welche in Bezug auf den Kreis harmonisch zugeordnet sind, zwei Sekanten nach demselben Punkte der Peripherie, so steht die Ver-

bindungslinie der beiden Durchschnittspunkte auf dem Durchmesser senkrecht.

Beweis: (G.) auch durch (H. B.) ausführbar.
(188) Stammer XII, 432. XIII, 278.

30. An den gegebenen Kreis K ist in C eine Tangente gelegt und von K nach derselben eine Gerade KB gezogen, welche den Kreis in A trifft. CK treffe den Kreis noch in E und EA die Tangente in D; errichtet man noch auf CB in D eine Senkrechte, welche KB in F trifft, so sind K, F, A, B harmonische Punkte.

Beweis: (G.)
(*276*) Journ. élém. XVI, 507.

31. OX und OY seien zwei aufeinander senkrechte Radien eines Kreises, ferner OA und OB zwei zur Halbierungslinie des Winkels XOY symmetrisch liegende Radien. Treffen nun die Parallelen durch B zu OX und OY den Radius OA in I und K, so sind I und K Pole des Kreises O.

Beweis: (G.)
(*542*) Educ. Times. XXIII, 512.

32. Legt man an den Umkreis des Dreiecks ABC, dessen Mittelpunkt O sei, in A, B, C Tangenten, so erhält man $\triangle A'B'C'$; AA', BB', CC', welche sich in K schneiden, treffen den Umkreis resp. in A'', B'', C''; ferner seien A''', B''', C''' die Seitenmittelpunkte. Dann schneiden sich die Kreise $AA''A'''$, $BB''B'''$, $CC''C'''$ in zwei Punkten.

Beweis: (H. B.)
(*387*) Mathesis. XX, 197.

33. Konstruiert man über dem Radius ME eines gegebenen Kreises M als Durchmesser einen Kreis und trifft ein beliebiger Durchmesser AB des Kreises M den kleinen Kreis in C und die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise in D, so sind A, B, C, D harmonische Punkte.

Beweis: (H. B.)
(937) Salomon XXI, 116. XXI, 116.

δ. Über Potenzialität und Ähnlichkeit der Kreise.

34. A, B, C seien die Mittelpunkte dreier Kreise, welche sich in $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ schneiden (B und C in A_1 und A_2 u. s. w.). Beschreibt man um den Radikalpunkt der Kreise irgend einen Kreis, welcher BC in α und α_1, AC in β und β_1, AB in γ und γ_1 trifft, so ist stets $A_1\alpha = A_1\alpha_1 = A_2\alpha = A_2\alpha_1 = B_1\beta = B_1\beta_1 = B_2\beta$

$= B_2\beta_1 = C_1\gamma = C_1\gamma_1 = C_2\gamma = C_2\gamma_1$ (einen speziellen Fall gab Steiner Band II, 345, 1).

Beweis: (G. R.)

(537) SPORER XVI, 430. XVII, 199.

35. Zieht man durch einen beliebigen Punkt P in der Ebene eines Dreiecks

a) die Parallelen,

b) die Antiparallelen zu den Seiten,

welche dieselben bezw. in X, X'; Y, Y' und Z, Z' schneiden, so ist $PX \cdot PX' + PY \cdot PY' + PZ \cdot PZ'$ gleich der Potenz des Punktes P in Bezug auf den Umkreis.

Beweis: a) (G. T. 2); (G. R. 2) und mit Benutzung physik. Beziehungen. b) (Folgerung aus a) und (G.)

(1098) FUHRMANN XXIII, 125. XXIII, 504.

36. Fällt man von einem beliebigen Punkt P in der Ebene eines Dreiecks ABC die Lote PD, PE, PF bezw. auf BC, CA, AB, so verhält sich $\triangle DEF$ zu $\triangle ABC$ wie die Potenz p^2 des Punktes P in Beziehung auf den Umkreis (M, r) von ABC zum Quadrat des Kreisdurchmessers. — Bekannter Spezialfall: P auf dem Kreisumfange.

Beweis: (G. T. 5.)

(1048) WEINMEISTER XXII, 351. XXIII, 119.

37. Der reciproke Wert der gemeinschaftlichen Potenz dreier einander rechtwinklig schneidender Kreise ist (absolut genommen) gleich der Quadratsumme der reziproken Radien:

$$\left(\frac{1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_3}\right)^2 = \frac{1}{q^2}.$$

Beweis: (G. R. 3.)

(753) KOBER XIX, 98. XIX, 503.

38. Die Summe der reciproken Potenzen von vier gegebenen Punkten je in Bezug auf den Kreis, der durch die drei übrigen geht, ist Null.

Beweis: (G. R.); (K. M.)

(818) STOLL XIX, 589. XX, 342.

39. Wenn zwei Kreise mit den Mittelpunkten A und B einander von aufsen in C, und eine gerade Linie in den Punkten D und E berühren; wenn man ferner durch C eine beliebige Gerade zieht, welche die Kreise zum zweiten Mal in F und G schneidet, so werden sich FD und GE in H rechtwinklig, und zwar so schneiden, dafs FH gleich der Tangente von F an Kreis B, GH gleich der Tangente von G an Kreis A ist.

Beweis nur angedeutet.

(10) BINDER V, 287. V, 471.

40. Beschreibt man über den Diagonalen eines Trapezes als Durchmessern zwei Kreise, so geht ihre Potenzlinie durch den Schnittpunkt der nicht parallelen Seiten.*)

Beweis: (G.); (G. T.). Folgerung aus dem Bodenmillerschen Satz.

(610) Kober XVII, 366. XVIII, 127.

41. Wenn man über jeder Diagonale eines Trapezes $ABCD$ als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so steht die Potenzlinie derselben senkrecht auf den parallelen Seiten und geht durch den Schnittpunkt E der nicht parallelen Seiten AD und BC.

Beweis (G.)

(*388*) Educ. Times. XX, 197.

42. Durch die Diagonale AD ist das Fünfeck $ABCDE$ in das Viereck $ABCD$ und das Dreieck DCA zerlegt worden; von dem Vierecke mögen sich die Gegenseiten AB und CD in F, sowie BC und DA in G schneiden, aufserdem sind die Geraden EA, EB, EC, ED gezogen, welche die Gerade FG in den Punkten A', B', C', D' treffen; es gilt dann der bemerkenswerte Satz, dafs die drei Kreise über den Durchmessern $A'C'$, $B'D'$, FG sich in nur zwei Punkten schneiden, also eine gemeinschaftliche Potenzlinie haben.

Beweis: (P. G.).

(1341) Schlömilch XXV, 589. XXVI, 425.

II. Aufgaben.**)

§ 6. Über die geometrischen Proportionen zwischen den gegenseitigen Abständen von 4 auf einer Geraden liegenden Punkten.

1. Wenn 4 Punkte A, B, C, D in der alphabetischen Reihenfolge auf einer Geraden liegen; wieviel gegenseitige Abstände (Strecken) erhält man? — 6. Warum und wie heifsen dieselben?

2. Wieviel Paare ohne Wiederholung lassen sich aus diesen Strecken bilden? — 15. Warum und welche sind es?

*) Beschreibt man über den nicht parallelen Trapezseiten als Durchmessern Kreise, so geht ihre Potenzlinie durch den Schnittpunkt der Diagonalen. v. Jettmar.

**) Vergl. Zerlang: Über eine besondere Art planimetrischer Aufgaben II, 338. Simon: Vereinfachtes Verfahren, flächengleiche Figuren in eine möglichst kleine Zahl paarweise kongruenter Teile zu zerlegen. XIX, 401—408; Simon: Geometrische Konstruktionen ohne Zirkel XXII, 81—90.

3. Wenn von diesen 15 Paaren je zwei (ohne Wiederholung) gleichgesetzt werden; wieviel Fälle erhält man dann? — 45. Warum und wie lauten dieselben?

4. Wenn man diese 45 gleichgesetzten Paare als geometrische Produkte, also als Rechtecke, nimmt; welche Fälle sind unmöglich, oder unbestimmt und warum? Wieviel Fälle bleiben noch übrig (—29—) und welche sind es?

5. Da es keinen Unterschied im absoluten Werte der Strecken macht, wenn man dieselben in der Richtung von A nach D, oder in der von D nach A hin nimmt, so werden von den 29 Fällen sich 28 auf 14 reduzieren. Denn AB und CD können als Endstrecken, AC und BD als Doppelstrecken vertauscht werden, während BC jedenfalls die Mittelstrecke und AD die ganze Strecke bleibt.

Die hiernach zusammengehörigen Fälle sollen zusammengestellt werden. Es bleibt $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ übrig, also die sogenannte harmonische Proportion $AB : BC = AD : CD$, welche schon hierdurch sich als einen charakterischen Fall kenntlich macht.

6. Bildet man aus den bis jetzt noch übrig gebliebenen geometrischen Produkten die geometrischen Proportionen, so lassen sich durch gehörige Umformung aus der harmonischen Proportion 2 und aus jeder der anderen 14 je drei stetige Proportionen ableiten. — Die Ableitung dieser stetigen Proportion soll ausgeführt werden.

7. Hierbei wird sich ergeben, daſs in 2 Fällen übereinstimmende Resultate erhalten werden und ein Paar in einer bloſsen Vertauschung der Endstrecken besteht. — Welche Fälle sind dies?

8. Es werden also mit Einschluſs des harmonischen nur noch 12 Fälle übrig bleiben.

Es sollen diese so geordnet und in Worte eingekleidet werden, daſs 1) die Mittelstrecke, 2) die ganze Strecke, 3) die Endstrecke und 4) die Doppelstrecke als mittlere Proportionale aus den betreffenden Strecken angegeben wird. Die harmonische Proportion soll den Schluſs bilden.

9. Wenn von den 4 Punkten 3 gegeben sind und der vierte durch Konstruktion gefunden werden soll; in welchen Fällen — die harmonische Proportion soll zunächst unberücksichtigt bleiben — läſst sich dieser Punkt einfach durch Konstruktion der vierten, oder dritten, oder mittleren Proportionale finden? Die Konstruktionen sollen ausgeführt werden.

10. In den übrigen Fällen läſst sich die Konstruktion unter Anwendung des Tangenten- und Secanten-Satzes leicht finden. — Diese (17) Fälle sollen ausgeführt und die Richtigkeit der Kon-

struktion unter Anwendung des Tangenten- und Secanten-Satzes bewiesen werden.

11. In einigen Fällen erhält man für den gesuchten Punkt 2 Stellen. — Welche Fälle sind dies?

12. Wie läfst sich ohne harmonische Strahlen zu drei gegebenen Punkten der vierte harmonische finden?

Anhang: 1) Wie findet man B, wenn $AC = CD$ ist und $AB \cdot BD = 2\,AD \cdot BC$ sein soll? 2) Desgleichen C, wenn $BD^2 = AB \cdot AD$ ist und $AB \cdot AC = AD \cdot BC$ sein soll? 3) Desgleichen A, wenn $BC = CD$ ist und $AB \cdot AD = 2\,BC \cdot BD$ sein soll?

(52) Emsmann IX, 201—202. (Sem.-Arbeit f. Primaner.) —

---

§ 7. Konstruktion von Punkten, die auf einer oder mehreren Geraden liegen.

1. Auf einer Geraden sind vier Punkte gegeben; einen fünften Punkt auf derselben so zu bestimmen, dafs das Produkt seiner Abstände von zwei derselben zum Produkt seiner Abstände von den beiden andern sich verhalte, wie der Abstand zwischen den ersten Punkten zum Abstand zwischen den andern.

(37) Stammer VI, 299. —

2. Eine Strecke a in 3, 4, 5, ... n Teile zu teilen, so dafs jeder Teil die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem folgenden und der Summe des Teiles und folgenden Teiles ist. (Erweiterung des goldenen Schnittes.)

Lösung: (G.); (R.).

(662) Szimanyi XVIII, 132. XVIII, 501.

3. Gegeben die Strecken AB, A_1B_1, A_2B_2. Die Punkte X, X_1, X_2 so zu bestimmen, dafs sie auf einer Geraden liegen, dafs $XX_1 = X_1X_2$ und dafs $\triangle XAB \sim X_1A_1B_1 \sim X_2A_2B_2$.

Auflösung: (G.).

(*223*) Tidsskrift. XV, 526.

4. Gegeben sind zwei Punkte A und B, und eine Gerade L; man soll auf L einen Punkt P so bestimmen, dafs die Halbierungslinie des Winkels APB eine gegebene Richtung hat.

Lösung: (G.).

(*303*) Tidsskrift. XVII, 527.

5. Gegeben ist ein Punkt A und $\sphericalangle XDY$; man soll auf den Schenkeln DX und DY die Punkte B und C so bestimmen, dafs $AB = AC$ und $\sphericalangle BAC = \alpha$ ist.

Lösung: (G.).

(*635*) Mathesis. XXV, 52.

6. Zwei Punkte A und B, sowie eine Gerade AX sind gegeben. Man soll auf AX einen Punkt C so bestimmen, daſs das Produkt aus den Projektionen CA_1 und CB_1 von CA und CB auf die Halbierungslinie des Winkels $ACB = \gamma$ gleich k^2 ist.

Lösung: (R.).

(*655*) Educ. Times. XXV, 198.

7. Durch A und B gehen die Geraden a und b. Man soll auf b die Punkte X und Y so wählen, daſs $BX = BY$ ist und $\sphericalangle XAY$ durch a halbiert wird.

Lösung: (G. 2); (R.).

(1277) Bücking XXV, 192. XXVI, 19.

---

§ 8. Konstruktion von Geraden, die durch einen gegebenen Punkt gehen.

1. Gegeben sind vier von einem Punkte O ausgehende Strahlen und ein Punkt P. Es soll durch P eine Gerade, welche die vier Strahlen nach einander in A, B, C, D schneidet, so gezogen werden, daſs von ihren drei zwischen den Strahlen liegenden Abschnitten die beiden äuſseren einander gleich werden (also $AB = CD$).

Lösung: (G. 3); (P. G.).

(88) v. Lühmann X, 352. XI, 198; XII, 262.

2. Eine Gerade zu ziehen, welche vier gegebene von einem Punkte ausgehende Strahlen so schneidet, daſs von ihren drei zwischen den Schenkeln liegenden Abschnitten die beiden äuſseren zwei gegebenen Strecken bezüglich gleich sind.

Lösung: (G.); (P. G.).

(89) v. Lühmann X, 352. XI, 269.

3. Im $\triangle ABC$ ist $\sphericalangle ACB$ durch CD und CE in drei gleiche Teile geteilt, so daſs auf AB die Abschnitte AD, DE und EB entstehen. $\sphericalangle ACB$, sowie AD und EB sind der Gröſse nach gegeben. Das Dreieck ist zu konstruieren.

Lösung: (G.). Besonderer Fall von Nr. 2.

(*147*) Journ. élém. XIV, 103.

4. Durch einen gegebenen Punkt O drei Gerade von gegebener Länge so zu ziehen, daſs ihre Endpunkte die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Lösung: (G.).

(*96*) Journ. élém. XIII, 36.

5. Gegeben sind eine Gerade L und drei Punkte A, B, C. Man soll von C aus nach L zwei gerade Linien CM und CN,

welche einen gegebenen Winkel einschliefsen, so ziehen, dafs AM und BN denselben Winkel einschliefsen.

Lösung: (P. G.).

(*231*) Tidsskrift. XV, 528.

§ 9. Aufgaben über Dreiecke, Punkte und Strecken im Dreieck.

a. Das rechtwinklige Dreieck.

α. Berechnungen.

1. Wie müssen sich in einem rechtwinkligen Dreieck die Seiten x, y und $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ zu einander verhalten, wenn y das harmonische Mittel zwischen x und z sein soll?*)

Lösung: (R.). Gleichung vierten Grades.

(480) Schlömilch XVI, 124. XVI, 426.

2. Das Verhältnis der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen, wenn der Schwerpunkt auf dem Inkreise liegt.

Lösung: (R.).

(*687*) Mathesis. XXV, 517.

3. Es soll die Form desjenigen rechtwinkligen Dreiecks bestimmt werden, bei welchem sich die Hülfslinien des Euklidischen Beweises des Pythagoreischen Lehrsatzes wie $\lambda : 1$ verhalten.

Lösung: (R.) $\sqrt{2} > \lambda > \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(1120) Emmerich XXIII, 271. XXIV, 17.

4. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC zu berechnen, wenn man die Summe p der beiden Katheten kennt und die Summe m der beiden Geraden, welche von dem Scheitelpunkt A des rechten Winkels ausgehend, die Hypotenuse in drei gleiche Teile teilen.

Lösung: (R.).

(*688*) Mathesis. XXV, 518.

5. Es sei ABC ein Dreieck, in welchem $\sphericalangle A$ ein rechter ist, und $\sphericalangle B$ doppelt so grofs wie $\sphericalangle C$. Man konstruiert aufserhalb des Dreiecks ABC 1) über der Hypotenuse BC das Quadrat $BCDE$; 2) über der Seite AB das gleichseitige Dreieck ABF; 3) über der Seite AC das gleichseitige Dreieck ACG. Man verbindet F mit G und F mit E. Die Hypotenuse BC sei $= a$ und man soll berechnen 1) die Seiten AB, AC des Dreiecks ABC;

*) Geometrisch lautet die Aufgabe folgendermafsen: Aus dem Mittelpunkt M eines Kreisquadranten AMB einen Strahl $MXZY$ (X liege auf dem Bogen AB, Z auf der Tangente in B und Y auf der Tangente in A) so zu ziehen, dafs $XY = 2\,XZ$ ist. Artzt.

2) die Entfernung des Punktes G von der Geraden AF; 3) die Fläche des Vierecks $EFGD$. — In den gefundenen Formeln soll die Hypotenuse $a = 5$ m gesetzt werden.

(5_1) Nouv. Ann. X, 14. —

6. Die drei Seiten a, b, c ($a > b > c$) eines Dreiecks sind gegeben; die Gröfse x zu bestimmen, welche man von jeder Seite abschneiden mufs, damit das Dreieck, welches $a - x$, $b - x$, $c - x$ zu Seiten haben würde, rechtwinklig ist.

(3_2) Nouv. Ann. X, 353. —

β. Konstruktionen.

7. Ein rechtwinkliges Dreieck (Katheten a und b, $a > b$, Hypotenuse c) zu konstruieren, dessen Inhalt sich nicht ändert, wenn man a und b durch ihre Summe und ihre Differenz ersetzt und wenn aufserdem

a) die Höhe h,
b) c,
c) b,
d) ein Hypotenusenabschnitt gegeben ist.

Lösung: (R); (G.).

(363) Harmuth XV, 125. XV, 433.

8. Ein rechtwinkliges Dreieck (Katheten a und b, $a > b$, Hypotenuse c, p und q, $p > q$, die von der Höhe auf der Hypotenuse gebildeten Abschnitte) zu konstruieren, dessen Inhalt sich nicht ändert, wenn man p und q durch ihre Summe und ihre Differenz ersetzt, und wenn aufserdem

a) die Höhe h,
b) c,
c) a,
d) p gegeben ist.

Lösung: (R. 2).

(364) Harmuth XV, 125. XV, 434.

9. Drei durch einen Punkt O gehende Geraden A, B und C sind gegeben; man lege einen rechten Winkel so, dafs sein Scheitel auf einer der Geraden z. B. B liegt und seine Schenkel bis zu den beiden anderen Geraden gleiche Länge besitzen.

Lösung: (G. 2); (T. R.).

(1247) Rulf XXV, 48. XXV, 425.

10. Gegeben Kreis K und innerhalb Punkt C; man soll ein rechtwinkliges Dreieck ABC so konstruieren, dafs der Scheitel des rechten Winkels auf den Punkt C fällt und die Punkte A und B auf die Peripherie fallen, wenn gegeben

a) die Hypotenuse c [Lösung: (G.)],
b) die Höhe h [Lösung: (G. 3); (R.)],
c) das Verhältnis der Katheten oder ein spitzer Winkel β. [Lösung: (G. 3)].
Vergl. Nr. 65, a—c.
(392—394) v. Fischer-Benzon XV, 290. XV, 608—609.

11. Ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC zu konstruieren, wenn gegeben die Höhe $CD = h$ und das Stück $CA' = d$, welches durch die Halbierungslinie AA' des Winkels α auf BC abgeschnitten wird.
Lösung: (G. 5); (R.).
(*634*) Mathesis. XXV, 51.

12. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Hypotenuse gegeben ist und die Differenz der Quadrate der Katheten dem Quadrate der doppelten Höhe gleich sein soll.
Lösung: (G. 2).
(71) Emsmann X, 119. X, 269.

13. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC ($\gamma = 90^0$) zu konstruieren, wenn die gröfsere Kathete (b) gegeben ist und die Summe aus den Quadraten der kleineren Kathete und dem an ihr liegenden Höhenabschnitt gleich dem halben Quadrat über der Hypotenuse werden soll $\left(a^2 + BD^2 = \frac{1}{2} c^2\right)$.
Lösung: (R. 2); (G. 2).
(272) Emsmann XIV, 33. XIV, 354

14. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem die Seiten e und f der beiden eingeschriebenen Quadrate gegeben sind (e Seite des Quadrats über der Hypotenuse).
Lösung: (G. 3); (P. G.), auch durch (R.) ausführbar.
(*193*) Journ. élém. XII, 433. XIII, 281.

b. Das gleichseitige und gleichschenklige Dreieck.

α. Berechnung.

15. In einen Kreis ist ein gleichseitiges Dreieck ABC gezeichnet. Eine Sehne $CD = b$ teilt AB in zwei Abschnitte, welche sich wie 3 : 2 verhalten. Man soll den Radius r des Kreises durch b ausdrücken.
Lösung: (R.).
(*682*) Nyt Tidsskrift. XXV, 516.

β. Konstruktionen.

16. In welcher Stellung zur Projektionsachse mufs ein gleichseitiges Dreieck orthogonal projiziert werden, damit ein Dreieck

$A_1B_1C_1$ entsteht, dessen Schwerliniendreieck $A_2B_2C_2$ ihm ähnlich wird?

Lösung: (R.). Vergl. B § 1 Nr. 99 und E § 4 Nr. 5 und 8.
(830_a) ARTZT XX, 32. XX, 426.

17. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus der Grundlinie $AB = c$ und der Halbierungslinie w_a eines Winkels an der Grundlinie.

Lösung: (R.).
(*652*) Mathesis. XXV, 198.

18. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen aus der Basis c und der Halbierungslinie m des Basiswinkels.

Lösung: (G. 2); (T. R.).
(1292) KRÜGER XXV, 279. XXVI, 105.

19. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC zu konstruieren aus einem Schenkel $CA = CB = a$ und der Summe s aus der Basis c und ihrer Projektion p auf einen Schenkel.

Lösung: (R.).
(*653*) Educ. Times. XXV, 198.

20. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen aus dem Umfange u und der Mittellinie t zum Schenkel.

Lösung: (G.); (R.); (G. T. 2).
(1278) EMMERICH XXV, 192. XXVI, 19.

21. In den gegebenen Kreis (O, r) ein gleichschenkliges Dreieck ABC so zu zeichnen, dafs die Summe der Entfernungen des Mittelpunktes O von den drei Seiten gleich s ist.

Lösung: (R.).
(*684*) Mathesis. XXV, 516.

22. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus der Höhe h_a auf einen Schenkel und der Summe $\varrho_c + \varrho$ der Radien des Ankreises zur Grundseite und des Inkreises.*)

Lösung: (G. 5); (T. R.).
(459) † XVI, 25. XVI, 348.

23. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus der Differenz $a - c$ des Schenkels und der Basis, und der Summe $\varrho_a + \varrho$ der Radien des Ankreises zum Schenkel und des Inkreises.

Lösung beruht auf Dreiteilung des Winkels.
(498) EMMERICH XVI, 273. XVI, 588.

---

*) Ähnlich sind die Aufgaben: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus h_a, ϱ und h_a, ϱ_c. XVI, 348 m. Lösung. HÜLSEN.

24. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC (Spitze A) zu konstruieren, dessen Höhenschnittpunkt H in der Mitte der Höhe AD liegt, wenn der Radius a) des Inkreises, b) des Ankreises an BC gegeben ist.

Lösung: (G. 4); (R.).

(905) Salomon XX, 593. XXI, 346.

25. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC ($AC = BC$) zu konstruieren, von welchem der Radius des um dasselbe beschriebenen Kreises gegeben ist, wenn an der Basis AB ein Dreieck ABD (D auf AC) so abgeschnitten werden soll, dass der von der Höhe CG des gleichschenkligen Dreiecks übrig bleibende Teil CF

a) der gegebenen Höhe DE des abgeschnittenen Dreiecks gleich,

b) gleich der Hälfte dieser Höhe,

c) gleich $\frac{1}{n}$ dieser Höhe sein soll.

Lösung: (G. 2); (R.).

(236) Emsmann XIII, 283. XIV, 183.

26. Dieselbe Aufgabe wie No. 25 mit dem Unterschiede, dass ABD an AB angelegt werden soll. (D auf der Verlängerung von CB.)

Lösung: (R.).

(237) Emsmann XIII, 283. XIV, 184.

27. Ein gleichschenkliges Dreieck von gegebener Höhe zu konstruieren, dessen Grundlinie auf einer gegebenen Geraden liegt und dessen Schenkel durch zwei gegebene Punkte gehen.

Lösung: (G. 2).

(*221*) Tidsskrift. XV, 525; 614 Berichtigung.

28. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis AB zu zeichnen, wenn gegeben die beiden Brocard'schen Punkte Ω, Ω' und auf dem Mittellot von $\Omega\Omega'$

a) der Schwerpunkt G,

b) der Grebe'sche Punkt K.

Lösung: a) (G. 2); b) (G.); (G. T.).

(1004) Emmerich XXII, 25. XXII, 429.

c. Das ungleichseitige Dreieck.

α. Strecken oder Winkel sind der Gröfse nach gegeben.

29. Ein Dreieck ABC zu konstruieren, von welchem man die beiden Seiten AB und AC kennt und die Halbierungslinie AD des Winkels A.

(6_2) Nouv. Ann. X, 353. —

30. Ein Dreieck zu zeichnen aus den beiden Seiten a und b; die dritte Seite c soll gleich der zugehörigen Höhe h_c sein.
Lösung: (G. 2); (T. R. 2).
(*93*) Journ. élém. XIII, 35.

31. Ein Dreieck, in welchem $\alpha = 2\beta$ ist, zu konstruieren aus c und h_c.
Lösung: (G.).
(*144*) Journ. élém. XIV, 102.

32. Ein Dreieck zu konstruieren aus c, α, $a + h_c$.
Lösung: (G.).
(*145*) Journ. élém. XIV, 102.

33. Ein Dreieck geometrisch zu konstruieren aus zwei Seiten a und b und der Linie $CO = m$, welche die beiden Seiten gemeinschaftliche Ecke C mit dem Mittelpunkt O des eingeschriebenen Kreises verbindet.
Lösung: (G. T.).
(240) Journ. élém. XIII, 283. XIV, 185.

34. Zur Konstruktion eines Dreiecks ABC ist gegeben AB, die Transversale $CD = w_c$, welche $\sphericalangle \gamma$ halbiert; fällt man ferner $AF \perp CD$ und $BE \perp AF$, so soll

1) $BE = CD$,
2) $BE = \frac{1}{2} CD$,
3) $BE = 2\, CD$,
4) $BE = nCD$

sein.
Lösung: (G. 3); (R. 2).
(238 und 239) Emsmann XIII, 283. XIV, 184.

35. Ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite c und den Projektionen p und q der beiden anderen Seiten bezüglich aufeinander.
Lösung: (G.); (P. G.); (R.); (G. T.).
(1039) Krüger XXII, 274. XXIII, 44.

36. Ein Dreieck ABC aus c und h_c zu konstruieren, wenn $(3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^2 = 3 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2$ werden soll und 1) die Höhe h_c in das Dreieck fällt, 2) aufserhalb desselben liegt.
Lösung: (G. T. 2).
(533) Emsmann XVI, 430. XVII, 197, 195.*)

*) Vergl. XVII, 278 Kopf d. Aufg.-Repert.

37. Ein Dreieck zu konstruieren aus $b + c$, $a + h_a$, $\sphericalangle \alpha$.
Lösung: (G. 2).
(26) BINDER VI, 159. (Aus Diesterweg: Geom. Aufgaben.)
VIII, 216.

38. Ein Dreieck zu konstruieren aus $a + b + c = 2s$, $\sphericalangle \alpha$ und der Mittellinie t_a.
Lösung (G. T. 2).
(633) END XVII, 525. XVIII, 272.

39. Ein Dreieck zu konstruieren aus t_c, ab, $\sphericalangle(\alpha - \beta)$.
Lösung: (G.).
(17) FUHRMANN VI, 62. VI, 297.

40. Ein Dreieck zu konstruieren aus t_c, w_c, ab.
Lösung: (G.).
(18) FUHRMANN IV, 62. VI, 297.

41. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Mittellinie zu derselben und der Entfernung des Pols der gegebenen Seite in Bezug auf den umbeschriebenen Kreis von der der Seite gegenüberliegenden Ecke.
Lösung: (G.).
(19) FUHRMANN VI, 62. VI, 297.

42. Ein Dreieck zu konstruieren aus c, ab, $\sphericalangle(\alpha - \beta)$.
Lösung: (G.).
(20) BINDER VI, 62. VI, 298.

43. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite c, der Differenz $\alpha - \beta$ der anliegenden Winkel und dem Produkt ab der beiden anderen Seiten.
Lösung: (G. 2); (G. T.); (T. R. 2).
(1030) FUHRMANN XXII, 198. XXII, 592.

44. Ein Dreieck zu konstruieren aus seinen Mittellinien.
HELLMANN II, 211 und BROCKMANN IV, 38. II, 211; IV, 38.

45. Ein Dreieck zu zeichnen aus einem Winkel γ, der Halbierungslinie w_c desselben und der nach der Gegenseite gezogenen Mittellinie t_c.
Lösung: (G.).
(*29*) Journ. élém. und (*435*) Mathesis.
XIII, 35 und XXI, 196.

46. Die Aufgabe: „Ein Dreieck zu zeichnen aus h_c, t_c, r" kann zwei Lösungen ergeben; es sind die Bedingungen hierfür aufzustellen.
Lösung: (R.).
(532) HÜLSEN XVI, 430. XVII, 197.

47. Ein Dreieck zu konstruieren aus

$a:b$, w_c, h_c. Lösung: (G.).

$a:b=m:n$, w_c, h_b. Lösung: (G.).

$a:b=m:n$, w_c, t_c. Lösung: (G.).

$a:b=m:n$, w_c, t_a. Lösung: (G.).

(*431—434*) Journ. élém. XXI, 195—196.

48. Ein Dreieck zu konstruieren aus $h_c = CD$, $t_c = CE$ und $a - b:c = m:n$.

Lösung: (G. 2).

(*310*) Mathesis. XVIII, 38.

49. Ein Dreieck zu konstruieren aus

$$\left.\begin{array}{lll} a+u, & b+v, & w_c. \\ a-u, & b-v, & w_c. \\ a+u, & b+v, & \sphericalangle(\alpha-\beta). \\ a-u, & b-v, & \sphericalangle(\alpha-\beta). \\ a+u, & b+v, & \sphericalangle\gamma. \\ a-u, & b-v, & \sphericalangle\gamma. \end{array}\right\} \text{Lösung (G.).}$$

(*425—430*) Mathesis. XXI, 43.

50. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel γ, der von seinem Scheitel ausgehenden Mittellinie t_c und dem Radius ϱ des Inkreises.

Lösung: (R.); (G.). Vergl. F. § 1 Nr. 42.

(860) Ritsert XX, 274. XXI, 24.

51. Ein Dreieck aus dem Winkel γ, dessen Halbierungslinien gleich sind, und einer diesem Winkel anliegenden Seite a zu konstruieren.

Lösung: (G.).

(*45*) Journ. élém. XI, 368.

52. Ein Dreieck, in welchem die Halbierungslinien des Winkels γ gleich sind, aus einer diesem Winkel anliegenden Seite a und dem Fufspunkte F der zugehörigen Höhe zu konstruieren.

Lösung: (G.).

(*46*) Journ. élém. XI, 368.

53. Ein Dreieck zu konstruieren aus $\alpha - \beta = \delta$ und den Teilen DE und $D'E'$ der inneren und äusseren Halbierungslinien des Winkels γ, welche zwischen h_a und h_b liegen. (D und D' auf h_a, E und E' auf h_b.)

Lösung: (G. T.).

(*220*) Journ. élém. XV, 525.

54. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Umfange $a + b + c$, der Halbierungslinie w_c des Winkels γ und dem Verhältnis $a : b$ der einschliefsenden Seiten.

Lösung: (G.).

(40) Lieber und v. Lühmann VII, 49. XIV, 596.

55. Im $\triangle ABC$ sei CD die Halbierungslinie des Winkels ACB, CE Mittellinie und ferner sei durch E eine Parallele zu DC gezogen, welche BC in F und AC in G trifft. Das Dreieck ist zu konstruieren aus DE, $\sphericalangle DCE = \varphi$ und $CD : FG = m : n$.

Lösung: (G. 2); (R.).

(391) Emsmann XV, 290. XV, 607.

56. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, wenn gegeben die Halbierungslinie w des Winkels A und die Abschnitte $AD = q$ und $BD = p$, in welche die Höhe CD die Seite $AB = c = p + q$ zerlegt.

Lösung: (R.); (G. T.).

(684) Emmerich XVIII, 277. XIX, 27.

57. Ein Dreieck ABC zu konstruieren aus der Winkelhalbierenden w_a und ihren Abständen m und n von den Ecken B und C.

Lösung: (G. 3); (G. T.).

(738) Weidenmüller XIX, 32. XIX, 422.

58. Ein Dreieck zu konstruieren aus der Höhe $CD = h_c$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ und der Summe der von D auf BC und AC gefällten Senkrechten $DE + DF = s$.

Lösung: (G. 2).

(*151*) Journ. élém. XIV, 104.

59. Im Dreiecke ABC ist AD normal zu BC. Man soll das Dreieck konstruieren aus $AD + BD = s$, $AD + DC = s'$ und dem Winkel BAC.*)

Lösung: (G.).

(41) Binder VII, 49. XIV, 597.

60. $\triangle ABC$ zu konstruieren aus $\sphericalangle \gamma$ und den beiden Strecken $CD = d$ und $CE = e$, welche von C ausgehend AB im Verhältnis $m : n : p$ teilen.

Lösung: (G. 2).

(*309*) Mathesis. XVIII, 38.

---

*) Ähnlich ist die Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren aus $h_c + p$, $h_c + q$, $\sphericalangle (\alpha - \beta)$.

61. Im $\triangle ABC$ sei CD eine Höhe. Das Dreieck soll nun konstruiert werden aus a, α und $BD \cdot BA = q^2$.

Lösung: (G.).

(*440*) Journ. élém. XXI, 355.

62. $\triangle ABC$ zu konstruieren aus $\alpha - \beta = \delta$ und den beiden Abschnitten CH und HD, in welche $CD = h_c$ durch den Höhenschnittpunkt H geteilt wird.

Lösung: (G. 2).

(*632*) Nyt Tidsskrift. XXV, 50.

63. Ein Dreieck zu konstruieren aus c, $\sphericalangle \gamma$ und dem Produkt q^2 der Projektionen von b und c auf a.

Lösung: (G.).

(*637*) Nyt Tidsskrift. XXV, 52.

64. Von einem Dreieck kennt man die Basis c, die zugehörige Höhe h_c, und der Höhenschnittpunkt soll von der Basis $\frac{1}{n} h_c$ entfernt sein. Man soll das Dreieck zeichnen.

Lösung: (G. R. 5).

(801) Rulf XIX, 430. XX, 267 (807 statt 801).

65. (Im Anschluſs an Nr. 10a—c). Gegeben Kreis K und in der Ebene desselben Punkt C; man soll $\triangle ABC$ konstruieren, dessen Ecken A und B auf die Peripherie von K fallen, wenn gegeben der Winkel γ bei C und

a) Seite c Lösung: (G. 3).
b) Winkel bei $A = \alpha$ Lösung: (G. 3).
c) die Höhe h von C. (Lösung: (G.).

(447—449) Emmerich XV, 613. XVI, 269—270.

66. Der Inkreis (m, ϱ) des Dreiecks ABC berühre AB in D; die Mittelpunkte der Inkreise von ACD und BCD seien m' und m'' und ihre Radien ϱ' und ϱ''. Das Dreieck soll aus ϱ, ϱ', ϱ'' konstruiert werden.

Lösung: (G.).

(*436*) Mathesis. XXI, 196.

67. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben zwei Seiten $AB = c$, $AC = b$ und zwei zum Winkel A gehörende Gegentransversalen $AD = p$, $AE = q$.

Lösung: (G. 3).

(841) Emmerich XX, 115. XX, 505.

68. Ein Dreieck ABC zu zeichnen aus der Gegenmittellinie $AG = g_a$ und deren Abständen m und n von den Punkten B und C.*)

Lösung: (G. R.); (G. T.).

(842) Emmerich XX, 115. XX, 505.

69. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn der Radius r des Umkreises, eine Seite a und der Brocard'sche Winkel ϑ gegeben sind.

Lösung: (G.); (T. R.).

(861) Stegemann XX, 274. XXI, 24.

70. Ein Dreieck zu zeichnen aus zwei Seiten $AC = b$, $AB = c$ und dem Brocard'schen Winkel ω.

Lösung: (G.); (T. R.).

(930) Emmerich XXI, 115. XXI, 515.

71. Ein Dreieck zu zeichnen aus der Grundlinie c, dem Brocard'schen Winkel w und dem Winkel ε, unter welchem die Grundlinie vom Schwerpunkte G aus erscheint.

Lösung: (G.); (G. T.).

(931) Emmerich XXI, 115. XXI, 515.

72. Gesucht werden die Seiten eines Dreiecks, wenn der Umfang $2s$, der Inhalt $\triangle$ und der Brocard'sche Winkel w gegeben sind.

Lösung: (G. T.). Kubische Gleichung.

(938) Emmerich XXI, 116. XXI, 583.

β. Die gegebenen Strecken sollen bestimmte Bedingungen erfüllen.**)

73. Zwei Dreiecke OAB und Oab mit gemeinschaftlicher Ecke O sind nach Gestalt und Grösse, OAB aufserdem der Lage nach gegeben. Man soll Oab durch Drehnug um O in eine solche Lage bringen, dafs Aa und Bb einen gegebenen Winkel bilden.

Lösung: (G.).

(*11*) Nouv. Ann. V, 368. VI, 294—295.

74. $\triangle ABC$ zu konstruieren aus a und γ, so dafs $a^2 : u^2 = c : v$ wird, wenn u und v die Strecken sind, in welche c durch die γ

---

*) Ein Dreieck zu konstruieren aus $AG = g_a$ und den von G auf AB und AC gefällten Senkrechten $GP = m$ und $GQ = n$ ist ähnlich zu lösen. Emmerich.

**) Vgl. Schlömilch: Lehrsätze, betreffend die Abstände eines Punktes von drei Geraden. XVII, 255—256.

halbierende Transversale geteilt wird und zwar u an β und v an α liegt.

Lösung: (R. 3); (G. T.).

(153) Emsmann XII, 201. XIII, 26.

75. $\triangle ABC$ zu konstruieren aus c und w_c, wenn $u^2 + [n^2 - (n+1)]\, v^2 = (3n+1) \cdot (2rh_c - w_c^2)$ werden soll. $u > v$, z. B. $n = 1$, $= \frac{1}{2}$, $= 2$ u. s. w.

Lösung: (R. 2).

(154) Emsmann XII, 201. XIII, 27.

76. $\triangle ABC$ zu konstruieren aus c und der Halbierungslinie w_c des Aufsenwinkels vom Winkel γ, wenn $v^2 + [n^2 + (n-1)]\, u^2 = (3n - 1)(2rh_c + w_c^2)$ werden soll. $u > v$ z. B. $n = 1$; $= \frac{1}{2}$; $= 2$; $= \frac{1}{4}$ u. s. w. Wie ist es, wenn $n = \frac{1}{3}$?

Lösung: (R. 2).

(155) Emsmann XII, 201. XIII. 27.

77. Gegeben ist $\triangle ABC$; man soll ein anderes gegebenes $\triangle A'B'C$ so mit seinem Eckpunkt C auf den Eckpunkt C des ersten Dreiecks legen, dafs sich $\triangle CAA' : CBB' = m : n$ verhält.

Lösung: (G.).

(*311*) Tidsskrift. XVIII, 38.

78. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, in welchem die Höhen AE und BF den durch den Radius r gegebenen Umkreis berühren.

Lösung: (G. 3).

(812) Artzt XIX, 509. XX, 271.

79. $\triangle ABC$ zu konstruieren aus a, α und der Bedingung, dafs sich w_a, t_b, h_c in einem Punkte schneiden.

Lösung: (G.).

(*437*) Mathesis. XXI, 197.

80. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn der Lage nach gegeben ist die Seite AB und wenn der dritte Eckpunkt C auf einer Geraden MN so liegen soll, dafs $\sphericalangle ACM - BCN = \delta$ ist.

Lösung: (G.).

(*633*) Nyt Tidsskrift. XXV, 51.

81.*) Gegeben sind zwei Punkte A und B und $\triangle CDE$, dessen Ecke C fest liegt; man soll $\triangle DCE$ um den Punkt C so drehen, dafs die Geraden DA und EB einen gegebenen Winkel γ bilden.

Lösung: (G.).

(*641*) Journ. élém. XXV, 194.

---

*) Vergl. § 11 Nr. 5.

82. Fällt man im Dreieck ABC von A und B auf die Halbierungslinie des Winkels γ die Senkrechten AP und BQ, so soll das Dreieck konstruiert werden aus c, α und $CP \cdot CQ = k^2$.

Lösung: (G. T.).

(*654*) Educ. Times. XXV, 198.

83. Ein Dreieck ABC zu konstruieren, wenn gegeben $\alpha - \beta = \delta$; ferner der Lage nach $AB = c$ und eine Gerade als Ort für C.*)

Lösung: (G. 2); (P. G.); (R. K. 2).

(1167) Kücker XXIV, 23. XXIV, 446.

γ. Bestimmte Punkte sind gegeben.**)

84. Ein Dreieck ABC zu konstruieren, von welchem man die der Lage nach gegebene Grundseite AB kennt, den Winkel C an der Spitze und einen Punkt P, welcher auf der Halbierungslinie des bei C durch die Seite AC und die Verlängerung von BC gebildeten Winkels genommen ist.

(8_2) Nouv. Ann. X, 353. —

85. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Mitten der Bogen des umgeschriebenen Kreises, welche über den Seiten des Dreiecks liegen, gegeben sind.

Lösung: (G. 2).

(*89*) Journ. élém. XIII, 34.

86. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die drei Punkte gegeben sind, in welchen die Höhen des Dreiecks den umgeschriebenen Kreis treffen.

Lösung: (G.).

(*90*) Journ. élém. XIII, 35.

87. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die drei Punkte D, E und F gegeben sind, in welchen die von demselben Eckpunkt ausgehende Höhe, Winkelhalbierende und Mittellinie den um das Dreieck beschriebenen Kreis treffen.

Lösung: (G.).

(*91*) Journ. élém. XIII, 35.

88. Ein Dreieck zu konstruieren aus c, α und dem Punkt D von AB, durch welchen der von C gezogene Durchmesser des umgeschriebenen Kreises geht.

Lösung: (G.).

(*143*) Journ. élém. XIV, 102.

---

*) Ist CD die gegebene Gerade und $\sphericalangle CDA = \varphi$, so geht die Aufgabe für $\sphericalangle \varphi = 0$ über in: Ein Dreieck zu konstruieren aus c, $\sphericalangle (\alpha - \beta)$ und h_c.

**) Vergl. Schlömilch: Drei Aufgaben über ausgezeichnete Punkte des Dreiecks XXIV, 161—167.

89. Dreieck ABC zu konstruieren aus dem Radius des umgeschriebenen Kreises, den Punkten D und E, in welchen die Winkelhalbierende w_c und die Mittellinie t_c den Kreis treffen und dem Abschnitt GH von AB, welcher zwischen w_c und t_c liegt.
Lösung: (G.).
(*219*) Tidsskrift. XV, 525; 614 Berichtigung.

90. $\triangle ABC$ zu konstruieren aus $AB = c$ und den Punkten D und E, in denen dieselbe von den Geraden getroffen wird, welche Winkel γ in drei gleiche Theile teilen.
Lösung: (G.).
(*308*) Mathesis. XVII, 528.

91. $\triangle ABC$ zu konstruieren aus c und dem Fufspunkt F von h_c, wenn die beiden Halbierungslinien AD und AE des Winkels α gleich sind (AE halbiere den Nebenwinkel).
Lösung: (G.).
(*439*) Educ. Times. XXI, 197.

92. $\triangle ABC$ zu konstruieren, wenn der Mittelpunkt m des Inkreises, der Mittelpunkt L von AB und der Fufspunkt P von h_c gegeben sind.
Lösung: (G. 2).
(*438*) Educ. Times. XXI, 197.

93. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, wenn gegeben ist, eine Ecke C, der Mittelpunkt O_c des gegenüberliegenden Ankreises und der Berührungspunkt F des Inkreises mit der Seite AB.
Lösung: (G. 3).
(1097) Ritgen XIII, 125. XXIII, 503.

94. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem zwei Ecken A und B auf zwei Gegenseiten MQ und NP eines Quadrates $MNPQ$ gegeben sind, während die dritte Ecke C auf PQ und der Höhenschnittpunkt D auf MN liegen.
Lösung: (G. 2); (P. G.); auch durch (K. M.) und (R.) ausführbar.
(685) Sporer XVIII, 277. XIX, 27.

95. Ein Dreieck ABC zu konstruieren, wenn gegeben zwei Ecken A und B und einer der Punkte L, welche die Eigenschaft haben, dafs die Fufspunkte der von ihm auf die Seiten gefällten Senkrechten Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind. (Vergl. E. § 8 Nr. 1a.)
Lösung: (G. 3).
(810) Emmerich XIX, 509. XX, 270.

96. Zieht man durch einen der in der vorigen Aufgabe erwähnten Punkte die Ecktransversalen, welche den Umkreis in A', B', C' treffen, so ist $\triangle A'B'C'$ gleichseitig.

Beweis: (G. 3). (Vgl. Nr. 95.)

(811) v. Lühmann XIX, 509. XX, 271.

97. Von dem zu suchenden Dreieck ABC kennt man die Ecken A_1, B_1, C_1 der über resp. BC, CA, AB nach aufsen beschriebenen gleichseitigen Dreiecke.

Lösung: (G. 4); (G. T.).

(586) Adami XVII, 200. XVII, 588.

98. Über den Seiten eines Dreiecks ABC konstruiert man die Quadrate $ABED$, $ACGF$, $BCHJ$; ED und GF schneiden sich in A', DE und HJ in B', FG und JH in C'. Nun ist $\triangle ABC$ zu zeichnen, wenn A' B' C' gegeben sind.

Lösung: (G.).

(*94*) Journ. élém. XIII, 36.

99. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, wenn die Mittelpunkte A', B', C' der über seinen Seiten nach aufsen errichteten Quadrate gegeben sind.

Lösung: (R.); (G. 3).

(1303) Emmerich XXV, 351. XXVI, 176; 280 Druckfehlerverzeichnis.

100. Ein Dreieck zu konstruieren aus 3 Punkten, die auf den oberen Abschnitten der Schwerpunkts-Transversalen liegen und dieselben nach gegebenen Verhältnissen teilen. (Für nichteuklidische Geometrie.)

Lösung: (G. 2).

(224) Böklen XIII, 206. XIV, 91.

101. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben eine Ecke A, der Grebe'sche Punkt K und

a) der Mittelpunkt H des Umkreises,

b) der Schwerpunkt E.

Lösung: Progr. d. Realgymn. i. Mülheim a. d. Ruhr 1887.

(676) Emmerich XVIII, 198. XVIII, 598.

102. Zu jedem Dreieck ABC gehört ein Brocard'sches Dreieck $A_1B_1C_1$, welches mit Zuhilfenahme des Grebe'schen Punktes des Dreiecks ABC leicht zu konstruieren ist. Man sucht die Lösung der umgekehrten Aufgabe, die Konstruktion des Dreiecks ABC, wenn $\triangle A_1B_1C_1$ gegeben ist.*)

Lösung: (G. 2); (G. T.).

(698) Emmerich XVIII, 357. XIX, 94.

*) Die Potenz eines Brocard'schen Punktes bezüglich des Umkreises ist gleich dem Quadrat über der Sehne, welche zum Peripheriewinkel ϑ gehört. Emmerich XIX, 95.

103. Von einer Ecke eines Dreiecks gehen sechs Transversalen aus; vier von denselben bilden zwei Paare von Seitengegentransversalen, die übrigen zwei dagegen ein Paar Gegentransversalen. Das Dreieck soll konstruiert werden, wenn die sechs Punkte gegeben sind, in welchen der Umkreis von jenen Transversalen geschnitten wird.

Lösung: (G.).

(836) Glaser XX, 33. XX, 433.

104. Dreieck ABC zu zeichnen, wenn gegeben der Schwerpunkt E, der Grebe'sche Punkt K und

a) die Mitte T der Höhe AL;

b) Ein Höhenfufspunkt L.

Lösung: (G.). Besonderer Fall: E, K, T liegen in gerader Linie.

(850) Emmerich XX, 195. XX, 585.

105. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben die Fufspunkte K_a, O_c, O_b' der Ecktransversalen AK, CO, BO'. (K Grebescher Punkt, O und O' Brocard'sche Punkte).

Lösung: (G.).

(862) Emmerich XX, 274. XXI, 25.

106. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben $\sphericalangle A$ der Lage nach und

a) der Grebe'sche Punkt K;

b) der erste Brocard'sche Punkt Ω.

Lösung: a) (G. 2); b) (G.).

(917) Emmerich XX, 31. XXI, 421.

107. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben eine Ecke A, der Schwerpunkt G und der isogonische Punkt M, von dem aus die drei Seiten unter gleichen Winkeln erscheinen.

Lösung: (G. 2).

(1018) Emmerich XXII, 106. XXII, 507.

108. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Lage der Grundlinie (aber nicht die der Endpunkte), sowie die Brocard'schen Punkte gegeben sind.

Lösung: (G. T. 2).

(1038) Fuhrmann XXII, 274. XXIII, 43.

109. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, wenn das Mittelpunktsdreieck seiner M' Cay'schen Kreise gegeben ist.

Lösung: (G.). Vgl. Nr. 71.

(1101) Emmerich XXIII, 125. XXIII, 508.

δ. Das Dreieck soll einem gegebenen Dreieck ähnlich sein.

110. (Synthetisch zu lösen.) Über drei der Lage und Gröſse nach gegebenen Strecken AB, A_1B_1, A_2B_2 drei unter sich ähnliche Dreiecke ABX, $A_1B_1X_1$, $A_2B_2X_2$ so zu konstruieren, daſs $\triangle XX_1X_2$ einem gegebenen Dreieck ähnlich wird.
Lösung: (G. 2).
(265) Petersen XIV, 33. XIV, 349.

111. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu konstruieren, welches dem gegebenen Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ähnlich ist und mit dem in denselben Kreis beschriebenen Dreieck $A'B'C'$ perspektivisch ist.
Lösung: (G.).
(*312*) Mathesis. XVIII, 39.

112. $ABC \sim \alpha\beta\gamma$ so zu konstruieren, daſs AB und AC zwei gegebene Kreise K_1 und K_2 bez. in B und C berühren. Wieviel Auflösungen giebt es, wenn von den Kreisen K_1 und K_2 der eine auſserhalb des andern liegt?
Lösung: (G.).
(*644*) Nyt Tidsskrift. XXV, 195.

ε. Zerlegung eines Dreiecks in Teile, die bestimmte Bedingungen erfüllen.

113. Gegeben ein gleichseitiges Dreieck ABC; durch die Mitte O von BC eine Linie, welche AB in M und die Verlängerung von AC in N trifft, so zu ziehen, daſs die Summe der Flächen der Dreiecke OMB und ONC gleich ist der Fläche des Dreiecks ABC. (Stetige Teilung.)
(4_2) Nouv. Ann. X, 353. —

114. Ein gegebenes Dreieck soll durch eine Transversale dergestalt in ein Dreieck und ein Viereck zerlegt werden, daſs letzteres sowohl ein Sehnen- als ein Tangentenviereck ist.*)
Lösung: (G.).
(55) Schlömilch IX, 203. IX, 203.

115. Bekanntlich lassen sich zwei symmetrische ungleichseitige Dreiecke durch Bewegung in ihrer Ebene nicht zur Deckung bringen. Es soll nun das eine Dreieck in drei Teile zerschnitten

---

*) Von einem Kreise sind drei Punkte gegeben; man sucht einen vierten Peripheriepunkt, welcher mit jenen zusammen ein Tangentenviereck bildet.

Von einem Kreise sind drei Tangenten gegeben; man sucht eine vierte Tangente, welche mit jenen zusammen ein Sehnenviereck bildet.
Schlömilch IX, 204.

werden und mit diesen das andere Dreieck durch Bewegung in derselben Ebene gedeckt werden.

Lösung: (G.).

(1199) STEINERT XXIV, 271. XXV, 46.

ζ. Punkte zu bestimmen, die bestimmte Bedingungen erfüllen.

116. Innerhalb eines gegebenen Dreiecks ABC soll der Punkt O so bestimmt werden, daſs die Ecke A gleich weit entfernt ist von den Transversalen BO und CO, ebenso B von CO und AO, endlich C von AO und BO.*)

Lösung: (G.).

(313) SCHLÖMILCH XIV, 357. XV, 120.

117. In der Ebene zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einen Punkt T zu finden, welcher beide Dreiecke in demselben Verhältnis, d. h. so teilt, daſs $TAB : TA'B' = TBC : TB'C' = TCA : TC'A'$ und daſs je zwei entsprechende Teildreiecke zu den Grunddreiecken dieselbe (positive oder negative) Lage in Bezug auf die gemeinschaftliche Dreiecksseite haben.

Lösung: (G.).

(755) KIEHL XIX, 98. XIX, 505

118. Im Innern eines gegebenen Dreiecks ABC soll der Punkt O so bestimmt werden, daſs die Winkel BOC, COA, AOB mit den Supplementen der Dreieckswinkel übereinstimmen. Hierbei sind die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

$$\sphericalangle BOC = 180^0 - \alpha, \quad \sphericalangle COA = 180^0 - \beta, \quad \sphericalangle AOB = 180^0 - \gamma,$$
$$\text{„} \quad = 180^0 - \beta, \quad \text{„} \quad = 180^0 - \gamma, \quad \text{„} \quad = 180^0 - \alpha,$$
$$\text{„} \quad = 180^0 - \gamma, \quad \text{„} \quad = 180^0 - \alpha, \quad \text{„} \quad = 180^0 - \beta.$$

Lösung: Vergl. E. § 4 Nr. 1 und Artzt: Progr. Recklinghausen 1886, p. 19.

(624) SCHLÖMILCH XVII, 447. XVIII, 195 u. XIX, 31.

119. In einer Ebene befinden sich drei unbegrenzte feste Gerade, deren Durchschnitte das Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c bilden; in derselben Ebene liegt ein unbestimmter Punkt P, dessen Abstände von jenen Geraden x, y, z heiſsen mögen; wie muſs nun P gewählt werden, wenn das aus x, y, z konstruierte Dreieck dem Dreieck ABC ähnlich sein soll?

Lösung: (G. R.).

(634) SCHLÖMILCH XVII, 525. XVIII, 273.

---

*) O hat die Eigenschaft, daſs $AO + BO + CO$ ein Minimum ist.

120. Auf der Seite AB eines Dreiecks ABC einen Punkt D so zu bestimmen, dafs $CD^2 = \frac{m}{n} AD \cdot BD$ ist.

Lösung: (G.).
(*636*) Mathesis. XXV, 52.

121. Die Seite AB eines Dreiecks ABC im Verhältnis der Kuben der Quadratwurzeln der anliegenden Seiten zu teilen.

Lösung: (G. 3); (R.). Vergl. E. § 56 Nr. 25.
(832) Emmerich XX, 33. XX, 428.

122. Die Seite AB eines Dreiecks ABC im Verhältnis a) der $m$ten Potenzen der Quadratwurzeln, b) der $m$ten Potenzen der $n$ten Wurzeln der anliegenden Seiten zu teilen; m und n ganz und positiv und $n = 2^k$ vorausgesetzt.

Lösung: (G.).
(943) Ivanov XXI, 195. XXI, 586.

123. Auf dem Umkreise des gegebenen Dreiecks ABC einen Punkt M so zu bestimmen, dafs seine Simsonsche Gerade der Geraden L parallel ist.

Lösung: (G.).
(*646*) Mathesis. XXIV, 196.

η. Gerade zu ziehen, welche bestimmte Eigenschaften haben.

124. Gegeben ein rechtwinkliges Dreieck ABC und auf der Höhe CD Punkt P; durch P eine Gerade so zu ziehen, dafs der zwischen den Katheten liegende Teil derselben durch die Hypotenuse halbiert wird.

Lösung: (G. 2).
(*146*) Journ. élém. XIV, 102.

125. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC soll zu AB eine Antiparallele XY (X auf AC, Y auf BC) so gezogen werden, dafs XY gleich der Summe der von X und Y auf AB gefällten Senkrechten XD und YE ist.

Lösung: (G.).
(*304*) Journ. élém. XVII, 527.

126. Gegeben $\triangle ABC$ und auf AC Punkt D; man soll durch D eine Gerade, welche BC in E trifft, so ziehen, dafs DE gleich der Summe der von D und E auf AB gefällten Senkrechten $DF + EG$ ist.

Lösung: (G.).
(*305*) Journ. élém. XVII, 527.

127. Im $\triangle ABC$ eine Transversale DEF, welche AC, BC und AB resp. in D, E, F schneidet, so zu ziehen, daſs $AD:DE = m:n$ und $BE:EF = p:q$ ist.

Lösung: (G.).

(*306*) Educ. Times. XVII, 527.

128. In dem gegebenen Dreieck ABC trifft die Höhe CD den Umkreis in E; von E ist eine Gerade, welche AB in X, AC in Y und den Kreis in Z trifft, so zu ziehen, daſs $XY = YZ$ ist.

Lösung: (G. T.).

(*307*) Journ. élém. XVII, 528.

129. Die Grundlinie eines Dreiecks im Verhältnis der Quadratwurzeln der anliegenden Seiten zu teilen, durch eine Gerade, welche mit letzteren gleiche Winkel bildet.

Lösung: (G. R.).*)

(579) EMMERICH XVII, 111. XVII, 520.

130. Diejenigen durch einen festen Punkt in der Dreiecksebene gezogenen Transversalen zu bestimmen, auf denen durch die Schnittpunkte mit den Seiten gleiche Abschnitte gebildet werden, wenn der Punkt

a) auf einer Seite,

b) innerhalb,

c) auſserhalb des Dreiecks liegt.

Lösung: (G.); (K. M.).

(1138) STECKELBERG XXIII, 430. XXIV, 186.

131. Zeichne diejenige Fuſspunktlinie f, welche zu einer gegebenen Geraden g

a) senkrecht,

b) parallel ist.

Lösung: (R. K.); (G.). Vergl. Nr. 123; ferner E. § 7 Nr. 16 und 17.

(1332) BÜCKING XXV, 514. XXVI, 346.

132. Zeichne die drei durch einen Punkt G des Feuerbachschen Kreises F des $\triangle ABC$ gehenden Fuſspunktlinien.

133. Ziehe die durch den gegebenen Punkt P des Feuerbach'schen Kreises möglichen Fuſspunktlinien des $\triangle ABC$.

Lösung: (R. K.); (G.).

(1333—1334) BÜCKING XXV, 514. XXVI, 347.

---

*) In der angegebenen Analysis muſs es in der vorletzten Zeile $x - b$ statt $b + x$ heiſsen. Die XVIII, 133 angegebene Berichtigung beruht auf einem Miſsverständnis (auf der Annahme, daſs die Transversale die Verlängerung von AC — statt von CA — treffe). EMMERICH.

§ 10. Das Parallelogramm und das Trapez, sowie bestimmte Gerade in demselben.

a. Das Quadrat.

1. Ein Reckteck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln ohne Anwendung der Lehrsätze über Proportionalität der Linien.

(164) Hoch XII, 266. XII, 266.

2. Ein Punkt P ist mit den drei Eckpunkten eines Quadrates $ABCD$ verbunden; man soll das Quadrat der Gröfse nach konstruieren, wenn PA, PB, PC gegeben sind.

Lösung: (G. 2); (G. T.).

(644) v. Fischer-Benzon XVII, 598. XVIII, 353.

3. Man soll von der Ecke A des durch die Seite a gegebenen Quadrates $ABCD$ eine Gerade, welche CD in E und die Verlängerung von BC in F trifft, so ziehen, dafs $EF = b$ ist.

Lösung: (R.).

(*645*) Nyt Tidsskrift. XXV, 196.

b. Das Rechteck.

4. Ein Rechteck mit gegebenem Umfang oder gegebener Differenz zweier Seiten, oder mit gegebener Diagonale zu zeichnen

1. in einen gegebenen Kreissektor und zwar
   a) so, dafs zwei Ecken auf dem Bogen,
   b) so, dafs zwei Ecken auf einem Halbmesser liegen.
2. in ein gegebenes Kreissegment.

Lösung: (G.).

(1—9) Binder V, 287. V, 470—471; VI, 61.

5. Gegeben sind zwei gleiche Rechtecke $ABCD$, $A'B'C'D'$.

1) Geometrisch einen Punkt O so zu bestimmen, dafs, indem das Rechteck $ABCD$ seine Lage beibehält, das Rechteck $A'B'C'D'$ um diesen Punkt so weit gedreht wird, dafs die grofse Seite $A'B'$, welche ursprünglich mit AB zusammenfiel, senkrecht zu AB steht, während sich die Mitte von $A'B'$ im Durchschnittspunkte der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ befindet.

2) Die Entfernungen des Punktes O von beiden Seiten AB und AD zu berechnen, wenn man die Längen der Seiten AB und AD resp. $= 2a$ und $2b$ setzt.

(9_2) Nouv. Ann. X, 354. —

c. Das allgemeine Parallelogramm.

6. Ein Parallelogramm zu zeichnen aus Umfang, Inhalt und Diagonalsumme.

(42) Binder VIII, 219. —

7. Ein Parallelogramm zn zeichnen aus der Summe der Seiten, der Summe der Diagonalen und einem Winkel.

Lösung: (G.).

(27) Binder VI, 159. (Aus Schellbach: Samml. math. Aufg.) VIII, 217.

8. Ein Parallelogramm $ABCD$ zu konstruieren, wenn zwei Ecken gegeben sind und zwei Kreise K und K', auf welchen die beiden andern Ecken liegen.

Lösung: (*G.*).

(*224*) Mathesis. XV, 526.

9. Ein Parallelogramm $ABCD$ zu konstruieren, von welchem man die Entfernungen des innerhalb gelegenen Punktes M von den Ecken kennt und

a) $\sphericalangle AMB + BMC$.

b) $\sphericalangle AMB + BMD$, also $\sphericalangle AMD$.

c) $\sphericalangle AMB + CMD$.

Lösungen: (*G.*).

(*449—451*) Mathesis. XXI, 357.

d. Das Trapez.*)

10. In ein gegebenes Viereck $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez $MNPQ$ zu zeichnen, dessen Ecke M auf AB gegeben ist und dessen beide parallele Seiten MN und PQ parallel AC sind.

Lösung: (G.).

(*95*) Nouv. Ann. XIII, 36.

11. Ein Trapez $ABCD$ durch eine Parallele XY zu den parallelen Seiten AB und CD in zwei ähnliche Trapeze zu teilen.

Lösung: (G.).

(*149*) Journ. élém. XIV, 103.

---

*) Vgl. Niseteo: Bestimmung des Schwerpunktes eines Trapezes. XXIII, 251.

§ 11. Das Viereck und Sechseck.

a. Das beliebige Viereck.

1. Ein Viereck zu zeichnen aus den Seitenwinkeln, dem Diagonalenwinkel und einer Länge (Seite oder Diagonale).
Lösung: (G.).
(28) BINDER VI, 159. VIII, 218.

2. Ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren, wenn die vier Seiten a, b, c, d gegeben sind und die Länge p der Strecke, welche AC und BD im Verhältnis $m:n$ teilt.
Lösung: (G. R.).
(*638*) Journ. élém. XXV, 194.

3. Ein Viereck $ABCD$ aus den vier Seiten zu konstruieren, wenn $\sphericalangle \beta = \delta$ ist.
Lösung: (G.).
(*639*) Journ. élém. XXV, 194.

4. Ein Viereck zu zeichnen
a) aus den Seiten und der Summe zweier gegenüberliegenden Winkel;
b) aus den Winkeln und den Summen der Gegenseiten.
Lösung: (G); (P. G.).
(825) EMMERICH XIX, 590. XX, 347.

5. Ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren, wenn die vier Seiten a, b, c, d gegeben sind und $\sphericalangle \alpha + \gamma = \sigma$.
Lösung: (G.).
(*640*) Journ. élém. XXV, 194.

6. Auf Nr. 4 beruht die Lösung der Aufgabe:
Gegeben sind zwei Punkte A und B und $\triangle CDE$, dessen Ecke C ein fester Punkt ist; man soll $\triangle CDE$ um den Punkt C so drehen, daſs $\frac{DA}{EB} = n$ ist.
Lösung: (G.).
(*642*) Journ. élém. XXV, 195.

7. Ein Viereck zu konstruieren aus drei Seiten a, b, c und der Differenz je zweier Gegenwinkel $\alpha - \gamma$ und $\delta - \beta$.
Lösung: (G.).
(473) ACKERMANN XVI, 124. XVI, 421.

8. Ein Viereck, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, zu zeichnen, wenn man von demselben eine Seite und die Winkel kennt.
Lösung: (G. 2); (T. R. 2).
(1016) RULF XXII, 106. XXII, 504.

9. Ein Viereck zu zeichnen, wenn die beiden Geraden FH und GJ (F auf AB, G auf BC, H auf CD und J auf DA) gegeben sind, welche die Mitten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, der von ihnen gebildete Winkel FEG und

1) zwei benachbarte Winkel α und β,
2) zwei gegenüberliegende Winkel α und γ.

Lösung: (G.).
(*141*) Aufnahmeprüfung i. d. dänische Polytechnikum XIV, 101. XIV, 101.

10. Ein Viereck zu konstruieren, wenn man die Abstände des Durchschnittspunktes der Diagonalen von den vier Seiten und einen Winkel des Vierecks kennt.
Lösung: (G.).
(*229*) Tidsskrift. XV, 528.

11. Innerhalb des Vierecks $ABCD$ ist der Punkt K gegeben; derselbe ist mit den Mittelpunkten M, N, P, Q von bzw. AB, BC, CD, DA verbunden. Man soll die vier Vierecke, aus welchen $ABCD$ besteht, in anderer Weise zusammenlegen, sodaſs wieder ein Viereck entsteht.
Lösung: (G.).
(*447*) Mathesis. XXI, 356.

12. Ein Viereck zu konstruieren aus den Längen der beiden Diagonalen, den Mittelpunkten derselben und dem Schwerpunkt.
Lösung: (G. 4).
(136) Glaser XII, 36. XII, 358.

13. Ein Viereck wird durch jede der Diagonalen in zwei Dreiecke geteilt. Das Viereck soll konstruiert werden, wenn die Lage der Schwerpunkte jener vier Dreiecke gegeben ist.

14. Zieht man in einem Viereck die beiden Diagonalen, so wird es in vier Dreiecke zerlegt. Das Viereck soll konstruiert werden, wenn sein Schwerpunkt und die Schwerpunkte jener vier Dreiecke bekannt sind.

15. Von einem Viereck sind drei Eckpunkte (A, B, C) und der Schwerpunkt gegeben; zugleich ist bekannt, welche der Seiten AB, BC, AC, Diagonale des Vierecks sein soll. Das Viereck zu konstruieren.

16. Ein Viereck zu konstruieren, wenn die vier Seitenmittelpunkte und der Schwerpunkt gegeben sind.

17. Von einem Viereck sind der Schwerpunkt, die Endpunkte einer Seite und der Mittelpunkt der bezüglichen Gegenseite gegeben; das Viereck ist zu konstruieren.
Lösung folgt aus § 3. 1.
(217—221) Glaser XIII, 125. —

18. Ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren aus den Projektionen M, N, P, Q des Diagonalenschnittpunktes E auf die Seiten AB, BC, CD, DA.
Lösung: (G.).
(*313*) Mathesis. XVIII, 39.

19. Ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren, wenn man die Mittelpunkte M, N, P der Seiten AB, BC, CD kennt und die Winkel α und β.
Lösung: (G.).
(*446*) Mathesis. XXI, 356.

20. Ein Viereck mit gleichen Diagonalen zu konstruieren, von dem gegeben ist der Diagonalenschnittpunkt E, die Schnittpunkte F und G der Gegenseiten, endlich die Richtung der durch E und den Schwerpunkt S gehenden Geraden.
Lösung: (G.).
(927) Glaser XXI, 114. XXI, 510.

21. Innerhalb eines Vierecks $ABCD$ einen Punkt O so zu bestimmen, dafs, wenn man ihn mit den Mitten E, F, G, H der Seiten (E auf AB, F auf BC u. s. w.) verbindet, das Viereck in vier gleiche Teile geteilt wird.
Lösung: (G. 3).
(*150*) Math. Visitor. XIV, 103.

22. In dem beliebigen Viereck $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt E soll auf CD ein Punkt N so gefunden werden, dafs AN und BN auf den Diagonalen gleiche Stücke von E aus gerechnet abschneiden.
Lösung: (K. M.); (P. G.).
(920) Rulf XXI, 31. XXI, 424.

23. Besonderer Fall hiervon ist die Aufgabe:
In dem einen Schenkel eines gleichschenkligen Trapezes ist ein Punkt zu finden, sodafs seine Verbindungslinien mit den Enden des zweiten Schenkels die Diagonalen in Punkten treffen, die in einer Senkrechten zu beiden Parallelen liegen.
Lösung: (G.); (P. G.).
(921) Rulf XXI, 31. XXI, 425.

b. Das Sehnenviereck.

24. Gegeben die Geraden L und L' und der Punkt Q. Durch Q zwei Gerade so zu ziehen, dafs die vier Schnittpunkte mit L und L' ein Sehnenviereck bilden, dessen Radius gegeben ist.
Lösung: (G. 2).
(*228*) Tidsskrift. XV, 527.

25. Ein Sehnenviereck zu konstruieren, wenn die Abstände des Durchschnittspunktes der Diagonalen von den Seiten gegeben sind.

Lösung: (G. 2).

(*230*) Tidsskrift. XV, 528.

26. In einen gegebenen Kreis K ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren, wenn gegeben der Schnittpunkt der Diagonalen E und

a) zwei gegenüberliegende Seiten a und c. Lösung: (G. 2).

b) Das Verhältnis zweier gegenüberliegender Seiten $a:c$ und eine andere Seite b. Lösung: (G.).

c) Die Verhältnisse je zweier gegenüberliegender Seiten $a:c$ und $b:d$. Lösung: (G.).

(534—536) Emmerich XVI, 430. XVII, 198—199.

27. Ein Kreisviereck zu konstruieren aus dem Radius des Umkreises, den Winkeln, welche die Gegenseitenpaare bilden, und dem Verhältnis der Längen eines dieser Paare.

Lösung: (G. 2).

(696) Fuhrmann XVIII, 357. XIX, 93.

28. In einen gegebenen Kreis K ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren, dessen eine Diagonale AC ein Durchmesser ist, wenn gegeben das Verhältnis der Summen der Gegenseiten $(AB + CD):(BC + DA) = m:n$ und

a) Seite $AB = a$;

b) die andere Diagonale $BD = f$;

c) der Umfang u.

Lösung: (G. 2); (T. R.); (R.).

(569) Emmerich XVII, 34. XVII, 443.

29. Ein Sehnenviereck $ABCD$ zu konstruieren, in welchem man die vom Mittelpunkt K auf die Seiten gefällten Senkrechten KM, KN, KP, KQ kennt.

Lösung: (G.).

(*448*) Mathesis. XXI, 357.

30. Gegeben ein Kreis und innerhalb desselben zwei Punkte M und N; man soll in den Kreis $\triangle ABC$ so zeichnen, dafs AC durch M, BC durch N geht und $AMNB$ ein Sehnenviereck wird.

Lösung: (G.).

(*643*) Nyt Tidsskrift. XXV, 195.

c. Das Tangentenviereck.*)

31. Ein Tangentenviereck $ABCD$ zu zeichnen aus $a-b$, $\gamma-\alpha$ und den Verhältnissen $MB:MD$ und $MA:MC$ (M Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises).

Lösung: (G.).

(*139*) Aufg. b. d. Aufnahmeprüfung i. d. dänische Polytechn. XIV, 101.

32. Ein Tangentenviereck zu konstruieren, dessen Winkel und zwei Gegenecken gegeben sind.

Lösung: (G. 3).

(739) Wachter XIX, 32. XIX, 422.

33. Ein Tangentenviereck zu zeichnen aus einer Seite $AB=a$, den anliegenden Winkeln $A=\alpha$, $B=\beta$ und

a) dem Diagonalenwinkel ε,
b) dem Inhalt F.

Lösung: a) (G.); (P. G.). b) (G.) auch trigonometrisch lösbar.

(824) Emmerich XIX, 590. XX, 347.

d. Das Sehnen-Tangentenviereck.

34. Aus drei gegebenen Eckpunkten A, B, C eines Sehnen-Tangentenvierecks den vierten Eckpunkt D zu finden oder „Ein Sehnen-Tangentenviereck zu konstruieren, wenn zwei anstofsende Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Lösung: (G. 2).

(48) Schlömilch VIII, 502. IX, 126—127.

35. Es soll ein bicentrisches Viereck $ABCD$ konstruiert werden, wenn gegeben ist**)

a) r, ϱ, $\sphericalangle(r\varrho)$. Lösung: (R.).
b) r, b, $\sphericalangle ABC=\beta$. Lösung: (G.).

(1270) Schlömilch XXV, 116. XXV, 585.

36. Die beiden Kreise eines bicentrischen Viereckskomplexes zu finden, wenn der Umkreismittelpunkt M, der Inkreismittelpunkt O und der Diagonalenschnittpunkt P gegeben sind.

Lösung: (G. 2); (G. T.); (R.).

(1322) Junker XXV, 513. XXVI, 274.

---

*) Vergl. Bosse: Einfache Art, ein Tangentenviereck zu zeichnen. XXV, 578.

**) Diese Aufgabe ist in der Form, wie sie XXV, 116 gestellt ist, unbestimmt.

e. Das Sechseck.

37. In ein Rechteck $ABCD$ ($AB = a$, $AD = b$) ein gleichseitiges Sechseck zu zeichnen und das Verhältnis von a und b zu bestimmen, wenn das Sechseck gleichwinklig sein soll.
Lösung: (G.).
(*314*) Educ. Times. XVIII, 198.

38. Ein Sechseck $ABCDEF$ aus den Seiten zu konstruieren, wenn die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, also $AB \parallel ED$, $BC \parallel FE$, $CD \parallel AF$.
Lösung: (G.).
(*452*) Tidsskrift. XXI, 357.

---

§ 12. Konstruktion von Punkten und Geraden, die zu einem Kreise in irgend welcher Beziehung stehen, und Konstruktion von Kreisen.*)

a. Bestimmung von Punkten.

1. In einer Ebene ist ein Kreis O gegeben, ein Punkt A auf dem Umfange dieses Kreises und eine beliebige Gerade D; auf dieser Geraden einen Punkt so zu bestimmen, dafs, wenn man von diesem Punkte die beiden Tangenten an den Kreis O zieht und die Berührungspunkte mit dem Punkte A verbindet, die Verbindungslinien untereinander einen gegebenen Winkel α bilden.
(*23*$_2$) Nouv. Ann. XI, 209. —

2. Auf der Verlängerung einer Sehne AB einen Punkt P so zu bestimmen, dafs, wenn man die Tangente PE zieht und auf PE die Senkrechten AC und BD fällt, $AC \,.\, BD = q^2$ ist.
Lösung: (G.).
(*148*) Journ. élém. XIV, 103.

3. Gegeben Kreis O, Sehne AB und Mitte C des zugehörigen Bogens. Es ist auf AB Punkt X so zu bestimmen, dafs, wenn die verlängerte CX die Peripherie in Y schneidet, $AC^2 = CY \cdot CX$ ist.
Lösung: (G.).
(377) Ackermann XV, 194. XV, 194.

4. Gegeben sind drei Punkte A, B, C und eine Gerade XY in derselben Ebene. Es sollen die Schnittpunkte F und G

---

*) Vergl. Böttcher: Zwei alte und zwei neue Konstruktionen von π. XVI, 412—416. Beyel: Eine weitere Näherungskonstruktion für die Zahl π. XVII, 95—96. Hermes: Wissenschaftlich praktische Lösung der Winkeldrittelung auf Grund der Kreislehre. XXII, 401—409.

der Geraden mit dem Kreise ABC konstruiert werden, ohne den Kreis zu zeichnen.

Lösung: (G.).

(*650*) Educ. Times. XXV, 197.

5. Gegeben sind zwei Kreise K und K' und auf ihnen die Punkte A und A'. Man soll auf der Potenzlinie L den Punkt M so bestimmen, dafs, wenn man MA und MA', welche die Kreise noch in B und B' treffen, zieht, $BB' \perp L$ ist.

Lösung: (G.).

(*443*) Journ. élém. XXI, 355.

6. Gegeben Kreis K mit dem Durchmesser $AB = 2r$. Auf dem Kreise den Punkt X so zu bestimmen, dafs, wenn man an den Kreis in X eine Tangente legt, welche die Verlängerung von AB in C trifft, $AX = CX$ ist.

Lösung: (G.).

(*98*) Journ. élém. XIII, 36.

7. Auf der Sehne AB des Kreises K (Radius $= r$) ist der Punkt C gegeben. Auf dem Bogen AB soll der Punkt X so bestimmt werden, dafs $AX \cdot BX = CX^2$.

Lösung: (G. 4); (R.); (G. T. 3).

(321) Weidenmüller XIV, 525. XV, 188.

8. Innerhalb oder aufserhalb eines Kreises sind zwei Punkte P und Q gegeben. Es soll auf dem Kreise ein Punkt C so bestimmt werden, dafs $\sphericalangle PCQ$ einen gröfsten oder kleinsten Wert annimmt.

Lösung: (G.).

(675) Sporer XVIII, 198, XVIII, 597.

9. Gegeben sind zwei Punkte A und B auf der Peripherie des Kreises M und Durchmesser CMD. Es soll ein Punkt X auf der Peripherie so bestimmt werden, dafs AX und BX gleiche Strecken auf dem Durchmesser CMD von dessen Endpunkten aus abschneiden.

Lösung: (G. 2); auch durch (P. G.) und (G. T.) ausführbar.

(823) Liebetruth XIX, 590. XX, 346.

10. Innerhalb eines Kreises ist eine Strecke AB gegeben; man bestimme in seinem Umfange einen Punkt P so, dafs dieser mit A und B verbunden einen Peripheriewinkel liefert, dessen Sehne gleich AB ist.

Lösung: (G.); (P. G.).

(982) Rulf XXI, 519. XXII, 265.

b. Gerade Linien zu ziehen, die den Kreis schneiden.

11. Gegeben zwei Kreise K und K', welche sich in C und D schneiden; durch D eine Gerade, welche die beiden Kreise in A und B trifft, so zu ziehen, dafs der Inhalt des Dreiecks ABC ein gegebener werde. Ohne Nebenkonstruktion.

Lösung in § 5 Nr. 23 enthalten.

(21) Lieber und v. Lühmann VI, 62. VI, 298.

12. Gegeben ein Halbkreis über AB und eine auf AB senkrechte Halbsehne CD; in B ist die Tangente BF gezogen. Man soll durch A eine Gerade legen, welche CD in X, BF in Z und den Halbkreis in Y schneide, so dafs irgend zwei der unbekannten Strecken AX, XY, YZ, AY, XZ, XC, BY, BZ, AZ ein gegebenes Verhältnis haben.

Von diesen Aufgaben sind vier unmöglich, die übrigen 32 möglich, und zwar sämtlich mit Kreis und gerader Linie auflösbar.

(43) Badorff VIII, 219. —

13. Gegeben Kreis K und zwei Gerade L und L'; man soll eine Gerade von gegebener Richtung, welche den Kreis in A und B, die Geraden L und L' resp. in A' und B' trifft, so ziehen, dass $AA' = BB'$ ist.

Lösung: (G. 2).

(*142*) Aufg. b. d. Aufnahmeprüf. i. d. dänische Polytechn. XIV, 102, 605.

14. Gegeben Kreis K und die Punkte A und B. In dem Kreise soll eine Sehne CD von gegebener Länge so konstruiert werden, dafs sich DA und CB unter einem gegebenen Winkel schneiden.

Lösung: (G.).

(*226*) Tidsskrift. XV, 527.

15. Gegeben ein Kreis (Mittelpunkt O) und zwei gerade Linien L und L', welche sich in A schneiden; man soll durch O eine Gerade, welche L in X und L' in Y schneidet, so ziehen, dafs der vierte Eckpunkt des durch die drei Eckpunkte A, X und Y bestimmten Parallelogramms auf der Peripherie des Kreises liegt.

Lösung: (G.); (R. K.).

(450) Haag XV, 613. XVI, 270.

16. Gegeben sind drei Kreise K, K', K'', welche durch denselben Punkt O gehen; man soll durch O eine Gerade ziehen, welche die drei Kreise resp. in A, A', A'' trifft, so dafs $AA' : AA'' = p : q$ ist.

Lösung: (G.).

(*315.*) Journ. élém. XVIII, 199.

17. Durch den Endpunkt F eines Kreisdurchmessers FG die Sehne FX so zu ziehen, dafs sie zu ihrem Abstande BL von einem auf FG gelegenen Punkte B im Verhältnis $p:q$ steht.
Lösung: (G. 3); (R.)
(730) WEIDENMÜLLER XVIII, 601. XIX, 342.

18. Auf einem mit dem Radius $CA = CB = r$ beschriebenen Kreisbogen AB ist ein Punkt D gegeben; durch D soll eine Gerade, welche CA in E und CB in F schneidet, so gelegt werden, dafs die Flächen ADE und BDF gleich sind. — Wenn D auf AB fortrückt, so bleibt EF immer Tangente an einer Hyperbel, deren Asymptoten CA und CB sind. Die Halbachsen a und b dieser Hyperbel sind zu bestimmen.
Lösung: (G. T.).
(731) SCHLÖMILCH XVIII, 601. XIX, 342.

19. Gegeben sind zwei Kreise K und K' und Punkt P auf keinem derselben; man soll durch P eine Sekante, welche K in A und K' in A' trifft, so ziehen, dafs $PA \cdot PA' = p^2$ ist.
Lösung: Lieber und v. Lühmann: Geom. Konstr.-Aufg. III. Anh. Nr. 31.
(*441*) Journ. élém. XXI, 355.

20. Gegeben ist ein Kreis K, eine Gerade L und auf K der Punkt P; man soll von P eine Gerade, welche K in B und L in C schneidet, so ziehen, dafs $PB \cdot PC = p^2$ ist.
Lösung: Lieber und v. Lühmann: Geom. Konstr.-Aufg. III. Anh. Nr. 28.
(*442*) Journ. élém. XXI, 355.

21. Auf der Peripherie eines gegebenen Kreises eine Sehne XY von bestimmter Länge so zu verschieben, dafs ihre Endpunkte X und Y bezüglich von zwei gegebenen Punkten A und B Entfernungen mit vorgeschriebenem Verhältnis haben: $AX : BY = m \cdot n$.
Lösung: (G.); (T. R.).
(1063) KRÜGER XXII, 436. XXIII, 191.

22. In einem gegebenen Kreise sind die Sehnen AM und AN gezogen; man soll die mittlere Proportionale AP zwischen AM und AN als eine von A aus gezogene Sehne konstruieren.
Lösung: (G.).
(*647*) Journ. élém. XXV, 196.

c. Tangenten sind zu ziehen.

23. An zwei gegebene Kreise zwei Tangenten zu ziehen, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden, so dafs die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch einen gegebenen Punkt gehe.
Lösung: (G.).
(12) Nouv. Ann. V, 368. VI, 295.

24. An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, die durch den Schnittpunkt zweier gegebenen Geraden L_1 und L_2 geht, wenn dieser Schnittpunkt nicht erreichbar ist.

Lösung: (G.).

(*445*) Educ. Times. **XXI, 356.**

25. Gegeben sind zwei Kreise O und O' ($O < O'$); Kreis O' gehe durch den Mittelpunkt O. Mit dem Lineal allein sind die Mittelpunkte der Kreise, ihre Ähnlichkeitspunkte, die gemeinschaftlichen Tangenten und ihre Berührungspunkte zu konstruieren.*)

Lösung: (G.).

(*651*) Journ. élém. **XXV, 197.**

d. Ein Kreis ist zu zeichnen.

26. Mit gegebenem Radius r einen Kreis zu konstruieren, dessen Peripherie von drei gegebenen Punkten P_1, P_2, P_3 gleich weit entfernt ist, so dafs P_1 innerhalb, P_2 und P_3 aufserhalb liegen, oder umgekehrt.

Lösung: (G. 2).

(137) Bauer XII, 36. **XII, 359.**

27. Gegeben Winkel ACB und auf seinen Schenkeln die Punkte A und B; es sollen zwei gleiche Kreise gezeichnet werden, welche die Schenkel in A und B, und sich gegenseitig berühren.

Lösung: (G.).

(*97*) Journ. élém. **XIII, 36.**

28. In einen Kreissektor ABC (C Mittelpunkt) einen ähnlichen Sektor $A'B'C'$ (A' auf BC, B' auf AC) so einzuschreiben, dafs C' in einen gegebenen Punkt des Bogens AB fällt.

Lösung: (G.).

(*140*) Aufg. b. d. Aufnahmeprüf. i. d. dänische Polytechn. **XIV, 101.**

29. Zwei sich von aufsen berührende Kreise A' und B' zu konstruieren, von denen jeder eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt (A' berühre OA in A, und B' berühre OB in B) und deren Radien sich wie $m : n$ verhalten.

Lösung: (G. 2).

(*225*) Mathesis. **XV, 526.**

---

*) Bei der Konstruktion ist zu benutzen der Lehrsatz: Berühren die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise (O, r) und O', r'), von denen O' durch den Mittelpunkt O geht und $O' > O$ ist, den Kreis O' in A und B, so ist AB Tangente am Kreise O.
Journ. élém. **XXV, 198.**

30. Gegeben die Kreise K und K', ferner A auf K und B auf K'. Durch A und B einen Kreis, welcher K in C und K' in D schneidet, so zu legen, dafs CD durch K' geht.
Lösung: (G.).
(*227*) Tidsskrift. XV, 527.

31. Vier Punkte A, B, C, D sind gegeben. Durch A, B und durch C, D sollen zwei Kreise so gelegt werden, dafs sich dieselben in einem Punkte von BC berühren.
Lösung: (G. 2).
(580) Sporer XVII, 111. XVII, 520.

32. Durch die Punkte B und C einen Kreis M so zu legen, dafs die von A an ihn gezogenen Tangenten AF und AG sich unter dem Winkel φ schneiden.
Lösung: (G. 2).
(472) Weidenmüller XVI, 123. XVI, 421.

33. Man soll einen Kreis zeichnen, der zwei sich schneidende Kreise rechtwinklig schneidet, so dafs die Tangenten von einem gegebenen Punkt einen gegebenen Winkel einschliefsen.
Lösung: (G.).
(570) Fuhrmann XVII, 34. XVII, 444.

34. Gegeben zwei Gerade und ein Punkt; man soll einen Kreis zeichnen, der die beiden Geraden berührt, während der Winkel der Tangenten von dem Punkte an den Kreis ein gegebener ist.
Lösung: (G. T. 2).
(571) Fuhrmann XVII, 34. XVII, 444.

35. Einen Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt geht, während die Tangenten von zwei gegebenen Punkten gegebene Winkel bilden.
Lösung: (G. T.).
(572) Fuhrmann XVII, 34. XVII, 445.

36. Einen Kreis zu konstruieren, so dafs die Tangenten von drei gegebenen Punkten gegebene Winkel bilden.
Lösung: (G. T.). Vergl. Nr. 45.
(573) Fuhrmann XVII, 34. XVII, 445.

37. Gegeben sind zwei sich schneidende Gerade; man soll einen Kreis zeichnen, der von ihnen gleiche gegebene Stücke abschneidet, während die Tangenten vom Schnittpunkte der Geraden aus einen gegebenen Winkel bilden.
Lösung: (G.); (T. R.).
(645) Emmerich XVII, 598. XVIII, 354.

38. Einen Kreis zu zeichnen, so daſs die Tangenten von zwei gegebenen Punkten P und Q ein Viereck $ABCD$ umschlieſsen, dessen Winkel denen eines gegebenen Vierecks $abcd$ gleich sind.

Lösung: (G.); (G. T.).

(657) EMMERICH XVIII, 37. XVIII, 445.

39. Gegeben zwei Punkte P und Q, eine Strecke a und zwei Winkel λ und μ. Man soll einen Kreis zeichnen, der auf PQ die Sehne a abschneidet und der ferner von P aus unter dem $\measuredangle \lambda$ und von Q aus unter dem $\measuredangle \mu$ erscheint.

Lösung: (G. T.).

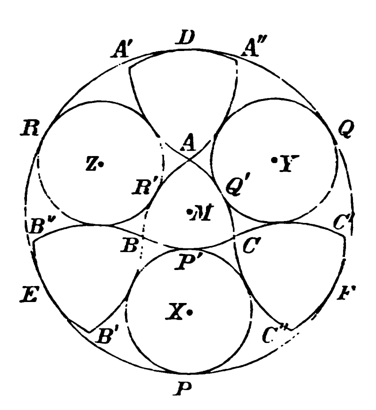
(740) EMMERICH XIX, 32. XIX, 423.

40. Gegeben sind zwei sich in S schneidende Geraden L und L', welche den Winkel 2α bilden; man soll einen Kreis M zeichnen, der von L die Sehne $2a$ und von L' die Sehne $2a'$ abschneidet, während die von S gezogenen Tangenten den Winkel 2β bilden.

Lösung: (G.); (R. K.); (T. R.).

(838) EMMERICH XX, 115. XX, 502.

41. (Rosette am Kölner Dom.) Gegeben ist der gleichseitige Dreibogen ABC, mit dem Mittelpunkt M; man soll an A, B und C je einen neuen Dreibogen $AA'A''$ u. s. w., ferner um X, Y, Z drei gleiche Kreise zeichnen, von welchen z. B. der um X die Bögen BB', BC und CC'' berührt; die Radien der neuen Dreibogen und Kreise sind so zu wählen, daſs sie von einem Kreise um M in den Punkten P, Q, R und D, E, F berührt werden.



Lösung: (R. 3).

(829) N. N. XX, 32 XX, 424.

42. Durch zwei Punkte A und B einen Kreis M, welcher den gegebenen Kreis K in C und D trifft, so zu konstruieren, daſs CD durch den gegebenen Punkt P geht.

Lösung: (G.).

(*444*) Educ. Times. XXI, 356.

43. Gegeben die Strecke AB, auf ihr Punkt C und eine durch C gehende Gerade L. Man soll einen Kreis zeichnen,

welcher durch A und B geht und von L die kleinste Sehne abschneidet.

Lösung: (G.).

(*648*) Nyt Tidsskrift. XXV, 197.

44. Durch zwei Punkte A und B, deren Abstand a ist, einen Kreis zu legen, dessen Durchmesser $GH \parallel AB$ und in welchem $BH = b$ ist.

Lösung: (G.).

(*656*) Educ. Times. XXV, 199.

45. Einen Kreis zu zeichnen, der von drei gegebenen Punkten A, B, C aus bezüglich unter drei gegebenen Winkeln erscheint.

Lösung: (G. T.).

(1240) Krüger XXIV, 609. XXV, 347.

e. Reguläre Vielecke um und in einen Kreis zu zeichnen.*)

46. Beschreibe um einen gegebenen Kreis (M, r) ein gleichseitiges Tangentendreieck, ohne mehr als einen Hülfskreis zu gebrauchen.

Lösung: (G.).

(849) Artzt XX, 195. XX, 585.

47. In einen gegebenen Kreis (M, r) zu zeichnen:

a) die Seite eines regulären 12ecks, 24ecks, 48ecks u. s. w., ohne mehr als einen Hülfskreis zu zeichnen;

b) unter denselben Bedingungen die Seite des regulären 8ecks, 16ecks, 32ecks u. s. w.;

c) Um den gröfseren Teil des nach dem goldenen Schnitt geteilten Radius zu zeichnen, bedarf es aufser eines Hülfskreises, der mit dem Radius r um einen beliebigen Punkt N des gegebenen Kreises (M, r) konstruiert ist, nur noch eines zweiten Hülfskreises.

d) den vierten, achten, sechzehnten u. s. w. Teil eines gegebenen Winkels mit nur zwei, aber nicht konzentrischen Hülfskreisen zu zeichnen.

Lösung: (G.).

(1003) Artzt XXI, 592. XXII, 428.

f. Die Kreisfläche zu teilen.

48. Durch zwei parallele Sehnen ein Stück der Kreisfläche abzuschneiden, welches einem gegebenen Sektor des Kreises gleich ist.

Lösung: (G. 4); (G. T.).

(499) Sievers XVI, 273. XVI, 588.

---

*) Vergl. Tafelmacher: Konstruktion der Seiten eines regulären Fünf- und Zehnecks XXII, 95.

49. Man soll einen Sektor eines Kreises so bestimmen, dafs der Inkreis des zum Sektor gehörenden Dreiecks gleich dem gröfsten Berührungskreise des betreffenden Segmentes wird.
Lösung: (R.); (T. R.).
(1209) FUHRMANN XXIV, 343. XXV, 113.

50. Von der Fläche eines Kreises soll durch einen zweiten Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Peripherie des ersten Kreises liegt, $\frac{1}{n}$ abgeschnitten werden. (Spec.-Fall $n = 2$.)
Lösung: (T. R.).
(1215) STECKELBERG XXIV, 457. XXV, 186.

51. Eine Kreisfläche durch die Peripherie eines zweiten Kreises zu halbieren, dessen Mittelpunkt vom Mittelpunkt des gegebenen Kreises die Entfernung c hat. (Spec.-Fall $c = 2r$.)
Lösung: (T. R.).
(1216) STECKELBERG XXIV, 457. XXV, 186.

---

§ 13. Maxima- und Minima-Aufgaben aus der Planimetrie.*)

1. Punkt O und Gerade XY sind der Lage nach gegeben. Von O wird nach der Geraden gezogen: OA beliebig, OB senkrecht OA, OC als Halbierungslinie des rechten Winkels AOB, OD senkrecht OC. Das Minimum $AB + CD$ der beiden Hypotenusen ist zu bestimmen.
(6_1) Nouv. Ann. X, 15. —

2. Gegeben Punkt A auf einem festen Durchmesser eines Kreises. Welches ist das gröfste gleichschenklige Dreieck, dessen Spitze in A liegt und dessen Basis eine zum Durchmesser senkrechte Sehne ist?
(10_1) Nouv. Ann. X, 15. —

3. Um ein gegebenes ungleichseitiges Dreieck ABC soll das gröfste gleichseitige Dreieck PQR beschrieben werden.
Lösung: (G.).
(44) SCHLÖMILCH VIII, 501. IX, 123, 125, 204 Berichtigung. 370.

In ein gegebenes ungleichseitiges Dreieck ABC soll das kleinste gleichseitige Dreieck beschrieben werden.
Lösung: (G.).
(45) SCHLÖMILCH VIII, 501. IX, 123, 125, 370.

---

*) Vergl. § 5 Nr. 6, 18 und § 12 Nr. 8, sowie Edler: Über Maxima und Minima bei ebenen Figuren. X, 245—259.

4. Auf dem Durchmesser eines Kreises mit dem Mittelpunkt K und Radius r sind zu beiden Seiten des Mittelpunktes zwei Punkte P und P' gegeben, so dafs $KP = KP' = a$. Von P und P' sind bis zum Kreise zwei Parallelen PQ und $P'Q'$ so zu ziehen, dafs das Trapez $PP'Q'Q$ ein Maximum ist.
Lösung: (G.).
(*40*) Journ. élém. XI, 367.

5. Von dem Punkte C sind an den gegebenen Kreis K, dessen Radius r, zwei Tangenten CE und CD gezogen, welche sich unter rechtem Winkel schneiden; man soll eine dritte Tangente, welche CE in A und CD in B trifft, so ziehen, dafs $\triangle ABC$ einen gegebenen Inhalt $\varDelta$ hat. Wann ist $\varDelta$ ein Minimum?
Lösung: (G.); (T. R.).
(*41*) Journ. élém. XI, 367.

6. Gegeben ist $\triangle ABC$ mit der Höhe $AH = h$; man soll von H zwei Gerade HD und HE nach AC und AB so ziehen, dafs $\sphericalangle AHD = AHE = x$ und $\triangle DEH$ ein Maximum ist.
a) Wie grofs wird $\sphericalangle x$ für diesen Fall?
b) Wie grofs ist $\sphericalangle \varphi$, den DE mit CB bildet?
Lösung: (T. R.).
(*458*) Journ. élém. XXI, 523.

7. Von einem Punkt O treten zwei Strecken $OB = g$, $OC = h$ unter einem gegebenen Winkel δ aus. Eine dritte Strecke $OA = f$ ist um O in der Ebene BOC drehbar. Welche Winkel mufs OA mit OB und mit OC einschliefsen, damit die Fläche des Dreiecks ABC ein Maximum erreiche?
Lösung: (G. T. 2).
(559) v. JETTMAR XVI, 594. XVII, 360.

8. Drei Strecken $OA = f$, $OB = OC = g$ sind um eine gemeinschaftliche, durch O gehende Achse drehbar. Welche Winkel müssen die drei Strecken paarweise bilden, damit die Fläche des Dreiecks ABC einen gröfsten Wert erreiche?
Lösung: (G. T.).
(560) v. JETTMAR XVI, 594. XVII, 361.

9. Über den Seiten eines Recktecks, dessen Umfang $= 2s$, konstruiert man nach aufsen gleichseitige Dreiecke. Wie grofs sind die Seiten, wenn die Gesamtfläche ein Maximum sein soll?
Lösung: (R.).
(*188*) Journ. élém. XV, 40.

10. Auf einer Geraden AB rollen zwei gleiche Kreise mit den Mittelpunkten K und K', welche AB resp. in A und B be-

rühren: ein dritter ebensogroßer Kreis mit dem Mittelpunkt O berührt sie fortwährend. Für welche Lage der drei Kreise wird die Fläche des Fünfecks $AKOK'B$ ein Maximum sein?

Lösung: (T. R.)

([illegible]) Journ. élém. XV, 41.

11. Gegeben sind zwei von einem Punkt O ausgehende Strahlen, sowie zwei Längen s und b ($> s$). Man soll eine die Strahlen in U und V treffende krumme Linie von der Länge b so legen, daß sie mit OU und OV eine möglichst große Fläche einschließt, wenn außerdem die gerade Verbindungslinie $UV = s$ ist.

Lösung: (G.)

(764) Weinmeister XIX, 188. XIX, 585.

12. Man soll in ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Höhe CD einen Kreis zeichnen, welcher die Schenkel berührt und die Basis AB schneidet, so daß das im Dreieck liegende Segment ein Maximum ist. ([illegible]Beispiel: Gleichseitiges Dreieck).

Lösung: (T. R.)

(1207) Steckelberg XXIV, 343. XXV, 112.

13. Gegeben ist ein Kreis (O, r) und ein fester Durchmesser AOB desselben. Vom beweglichen Peripheriepunkt P fällt man auf OB eine Senkrechte, welche den Kreis in Q schneidet, und dann wird von Q auf OP die Senkrechte QR gefällt. Bei welcher Lage von P wird $\triangle PQR$ ein Maximum?

Lösung: (T. R.); (G.)

(1042) Köbke XXII, 275. XXIII, 47.

14. Welches unter allen Dreiecken mit denselben Radien des Um- und Inkreises hat den größten, welches den kleinsten Inhalt?

Lösung: Vergl. die folgende Aufgabe.

(1250) Steckelberg XXV, 49. XXV, 427.

15. Aus dem Mittelpunkt M ist ein Kreis mit dem Radius r konstruiert, ebenso aus μ ein zweiter Kreis mit $\varrho < \frac{1}{2} r$, und die Centrale sei $m\mu = e = \sqrt{r(r - 2\varrho)}$; bekanntlich giebt es dann unendlich viel Dreiecke XYZ, welche in den ersten und zugleich um den zweiten Kreis beschrieben sind. (Der Punkt X bleibt hier willkürlieh auf dem Umkreise, und das Dreieck schließt sich von selbst bei dem successiven Ziehen der Tangenten an den Inkreis). Man sucht nun dasjenige der Dreiecke XYZ, von welchem

a) der Umfang,

b) der Inhalt ein Maximum oder Minimum ist; die Beträge der Maxima und Minima sollen durch r und ϱ ausgedrückt werden

Lösung: (T. R.).

(819) Schlömilch XIX, 589. XX, 343.

16. Gegeben $\triangle ABC$ und auf der Verlängerung von AB über B Punkt P; man soll durch P eine gerade Linie, welche BC in D und AC in E schneidet, so ziehen, daſs $CE \cdot BD$ oder $AE \cdot CD$ ein Maximum wird.

Lösung: (R.).

(*187*) Educ. Times. XV, 40.

17. Gegeben ist ein Punkt C, welcher Mittelpunkt eines Kreises mit veränderlichem Radius sein soll und ein Punkt A, von welchem die Tangenten AB und AD an den Kreis gezogen sind. Für welchen Wert des Radius hat die Berührungssehne BD ein Maximum?

Lösung: (G. T.).

(*189*) Journ. élém. XV, 40.

18. Gegeben sind zwei unbegrenzte Gerade AA', BB' und ein fester Punkt C; durch letzteren soll eine Gerade, welche AA' in P und BB' in Q schneidet, so gelegt werden, daſs das geometrische Mittel zwischen CP und CQ seinen Minimalwert erhält. — Unter denselben Voraussetzungen soll das harmonische Mittel zwischen CP und CQ zu einem Minimum werden. (Die naheliegende Aufgabe, das Minimum des arithmetischen Mittels zwischen CP und CQ zu bestimmen, übersteigt die Kräfte der Elementargeometrie.)

Lösung: (T. R.).

(582) Schlömilch XVII, 111. XVII, 521.

19. Ist in dem Dreieck ABC kein Winkel gröſser als 120^0, so ist für einen Punkt P innerhalb des Dreiecks $PA + PB + PC$ ein Minimum, wenn $\sphericalangle APB = APC = BPC = 120^0$ ist.

Lösung: Vergl. Steiners Werke II, 729.

(762) Sporer XIX, 188. XIX, 584.

20. Die Fläche eines gegebenen Dreiecks durch die kürzeste Linie zu halbieren.

Lösung: (G.) für gerade und krumme Linie (Kreisbogen) ausgeführt.

(765) Weinmeister XIX, 188. XIX, 586.

21. Zwei gegebene Kreise K_1 und K_2 schneiden sich in den Punkten A und B; durch A soll eine Gerade, welche den ersten Kreis in P und den zweiten in Q trifft, so gelegt werden, daſs

a) das arithmetische,
b) das geometrische Mittel der Sehnen AP und AQ ein Maximum erreicht.

Lösung: a) (G. 2); (T. R.). b) (G.); (T. R.).

(881) Schlömilch XX, 433. XXI. 184.

22. Gegeben ist die Strecke AB und auf derselben der Punkt C, ferner die Gerade L, welche AB unter $\sphericalangle\, \alpha$ in C schneidet. Man soll einen Kreis konstruieren, welcher durch A und B geht und L unter der kleinsten Sehne schneidet.

Lösung: (G.); (G. T.).

(*459*) Educ. Times. XXII, 27.

23. Durch welchen Punkt müssen die zu den Seiten eines Dreiecks gezogenen Antiparallelen gehen, damit die Summe ihrer Quadrate ein Minimum sei?

Lösung: (K. M.).

(1195) Stoll XXIV, 271. XXV, 43.

24. (Im Anschlusse an § 12 Nr. 49.) Man soll einen Kreissektor so bestimmen, dafs das Verhältnis der beiden Kreise, von denen der eine der die Sehne berührende Ankreis des zugehörigen Dreiecks, der andere der gröfste Berührungskreis des zugehörigen Kreissegmentes ist, ein Minimum sei.

Lösung: (T. R. 2).

(1318) Stoll XXV, 432. XXVI, 271.

25. Im $\triangle ABC$ sei M der Mittelpunkt des Umkreises, S der Schwerpunkt, H der Höhenschnittpunkt. Zu untersuchen ist, ob es ein Minimum der Strecke MSH (Eulersche Gerade) giebt?

Lösung: (R. K.); (T. R.). Vergl. E. § 7 Nr. 2, 3.

(1134) Schlömilch XXIII, 352. XXIV, 183.

C.

Trigonometrie.

I. Goniometrie.

§ 1. Entwicklung goniometrischer Formeln.

a. Formeln zwischen beliebigen Winkeln.

Analogieen zwischen algebraischen und goniometrischen identischen Gleichungen.

1.
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$
$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha^2 - \sin\beta^2.$$

2.
$$a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0;$$
$$\sin\alpha\sin(\beta - \gamma) + \sin\beta\sin(\gamma - \alpha) + \sin\gamma\sin(\alpha - \beta) = 0.$$

3.
$$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$$
$$+ (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a) = 0;$$
$$\Sigma(\sin\alpha^3\sin(\beta - \gamma))$$
$$+ \sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin(\alpha - \beta)\sin(\beta - \gamma)\sin(\gamma - \alpha) = 0.$$

4.
$$2a(b + c)^2 + 2b(c + a)^2 + 2c(a + b)^2 - 8abc$$
$$= 2(a + b)(b + c)(c + a);$$
$$\Sigma(\sin 2\alpha\sin(\beta + \gamma)^2) - \sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$$
$$= 2\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma)\cdot\sin(\gamma + \alpha).$$

5.
$$(a - b)(c - d) + (a - c)(d - b) + (a - d)(b - c) = 0;$$
$$\sin(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \delta) + \sin(\alpha - \gamma)\sin(\delta - \beta)$$
$$+ \sin(\alpha - \delta)\sin(\beta - \gamma) = 0.$$

(*180*) Mathesis XIV, 602. —

6.
$$\Sigma ab(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$$
$$\Sigma\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha - \beta) = -\sin(\alpha - \beta)\sin(\beta - \gamma)\sin(\gamma - \alpha).$$

(*289*) Mathesis. XVII, 203.

7. $$\Sigma (a - b)^3 (a + b - 2c) = 0$$
$$\Sigma \sin(\alpha - \beta)^3 \sin(\alpha + \beta - 2\gamma) = 0.$$
(*290*) Mathesis. XVII, 203.

8. $$\Sigma a^3 (b - c)^3 = 3abc(a - b)(b - c)(c - a)$$
$$\Sigma \sin\alpha^3 \sin(\beta - \gamma)^3 = 3\,\Pi \sin\gamma \sin(\alpha - \beta).$$
(*291*) Mathesis. XVII, 203.

9. $$\Sigma a^5 (b - c) = -\Pi c(a - b) \text{ für } a + b + c = 0$$
$$\Sigma \sin\alpha^5 \sin(\beta - \gamma) = -\Pi \sin\gamma \sin(\alpha - \beta) \text{ für } \alpha + \beta + \gamma = k\pi$$
$$\Sigma \cos\alpha^5 \sin(\beta - \gamma) = -\Pi \cos\gamma \sin(\alpha - \beta)$$
$$\text{für } \alpha + \beta + \gamma = \tfrac{1}{2}(2k + 1)\pi.$$
(*292*) Mathesis. XVII, 204.

Zu beweisen sind folgende Formeln:

10. $$\sin\alpha^3 \sin(\beta - \gamma) + \sin\beta^3 \sin(\gamma - \alpha) + \sin\gamma^3 \sin(\alpha - \beta)$$
$$= \sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin(\alpha - \beta)\sin(\beta - \gamma)\sin(\alpha - \gamma).^{*)}$$
(*178*) Mathesis. XIV, 600.

11. $$\cos 2\alpha \cos(\beta + \gamma)^2 + \cos 2\beta \cos(\gamma + \alpha)^2 + \cos 2\gamma \cos(\alpha + \beta)^2$$
$$= 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\beta + \gamma)\cos(\gamma + \alpha) + \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma.$$

12. $$\sin 2\alpha \sin(\beta + \gamma)^2 + \sin 2\beta \sin(\gamma + \alpha)^2 + \sin 2\gamma \sin(\alpha + \beta)^2$$
$$= 2\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma)\sin(\gamma + \alpha) + \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma.$$
(*179*) Mathesis. XIV, 601—602.

13. a) $$\sin a \sin(b - c)\sin(b + c - a) + \sin b \sin(c - a)\sin(c + a - b)$$
$$+ \sin c \sin(a - b)\sin(a + b - c) = 2\sin(b - c)\sin(c - a)\sin(a - b).$$
b) $$\cos a \sin(b - c)\cos(b + c - a) + \cos b \sin(c - a)\cos(c + a - b)$$
$$+ \cos c \sin(a - b)\cos(a + b - c) = 2\sin(b - c)\sin(c - a)$$
$$\sin(a - b).^{**)}$$
(631 a,b) Emmerich XVII, 525. XVIII, 270.

---

*) Ähnlich wird bewiesen
$$\cos\alpha^3 \sin(\beta - \gamma) + \cos\beta^3 \sin(\gamma - \alpha) + \cos\gamma^3 \sin(\alpha - \beta)$$
$$= \cos(\alpha + \beta + \gamma)\sin(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \alpha)\sin(\beta - \gamma).$$
XIV, 601. Anmerkung zu 178.

**) $$\cos a \sin(b - c)\sin(b + c - a) + \cos b \sin(c - a)\sin(c + a - b)$$
$$+ \cos c \sin(a - b)\sin(a + b - c) = 0,$$
$$\sin a \sin(b - c)\cos(b + c - a) + \sin b \sin(c - a)\cos(c + a - b)$$
$$+ \sin c \sin(a - b)\cos(a + b - c) = 0.$$
Emmerich. XVIII, 271.

14. a) $\cos a^5 \sin(b-c) + \cos b^5 \sin(c-a) + \cos c^5 \sin(a-b)$
$= \sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)[\cos(a+b+c)(\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2)$
$- \cos a \cos b \cos c]$.

b) $[\sin a^5 \sin(b-c) + \cdots] = \sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)$
$\cdot [\sin(a+b+c)(\sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2) + \sin a \sin b \sin c]$.

(994 a, b) FUHRMANN XXI, 591. XXII, 344.

15. a) $1 + \cos a + \cos b + \cos c + \cos(b+c) + \cos(a+c) + \cos(a+b)$
$+ \cos(a+b+c) = 8 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2}(a+b+c)$.

b) $\sin a + \sin b + \sin c + \sin(b+c) + \sin(a+c) + \sin(a+b)$
$+ \sin(a+b+c) = 8 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2}(a+b+c)$.

(955a, b) FUHRMANN XXI, 591. XXII, 345.

16. a) $\sin(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\delta) + \sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\delta)$
$+ \sin(\gamma-\alpha)\cos(\beta-\delta) = 0$,

b) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta) + \sin(\beta-\gamma)\sin(\alpha-\delta)$
$+ \sin(\gamma-\alpha)\sin(\beta-\delta) = 0$.

(894) KRAUSE XX, 511. XXI, 271.

17. $\cos \frac{1}{2} \alpha (2 \cos \alpha - 1)(2 \cos \alpha + \cos 2\alpha)$
$+ \sin \frac{1}{2} \alpha (2 \cos \alpha + 1)(2 \sin \alpha + \sin 2\alpha) = 3 \cos \frac{1}{2} \alpha$.

(*580*) Mathesis. XXIV, 193.

18. $\frac{3 - (2 \cos \alpha - 1)(2 \cos \alpha + \cos 2\alpha)}{(2 \cos \alpha + 1)(2 \sin \alpha + \sin 2\alpha)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$.

(*581*) Mathesis. XXIV, 194.

Für jeden Wert der Winkelsumme $a + b + c = 2s$ ist

19. $$\frac{\sin(b+c)}{\sin a} + \frac{\sin(c+a)}{\sin b} + \frac{\sin(a+b)}{\sin c} - \frac{\sin(b+c)\sin(c+a)\sin(a+b)}{\sin a \sin b \sin c} = -2 \cos 2s$$

20. $$\frac{\sin(b+c)}{\cos a} + \frac{\sin(c+a)}{\cos b} + \frac{\sin(a+b)}{\cos c} - \frac{\sin(b+c)\sin(c+a)\sin(a+b)}{\cos a \cos b \cos c} = +2 \sin 2s$$

21. $$\frac{\sin(b-c)}{\sin a} + \frac{\sin(c-a)}{\sin b} + \frac{\sin(a-b)}{\sin c} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin a \sin b \sin c} = 0$$

22.
$$\frac{\sin(b-c)}{\cos a}+\frac{\sin(c-a)}{\cos b}+\frac{\sin(a-b)}{\cos c}$$
$$+\frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\cos a\cos b\cos c}=0$$

23.
$$\frac{\operatorname{tg}(b-c)}{\operatorname{tg} a}+\frac{\operatorname{tg}(c-a)}{\operatorname{tg} b}+\frac{\operatorname{tg}(a-b)}{\operatorname{tg} c}$$
$$+\frac{\operatorname{tg}(b-c)\operatorname{tg}(c-a)\operatorname{tg}(a-b)}{\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c}=0$$

24.
$$\frac{\operatorname{tg}(b-c)}{\cot a}+\frac{\operatorname{tg}(c-a)}{\cot b}+\frac{\operatorname{tg}(a-b)}{\cot c}$$
$$+\frac{\operatorname{tg}(b-c)\operatorname{tg}(c-a)\operatorname{tg}(a-b)}{\cot a\cot b\cot c}=0.$$

(512—514) Stoll XVI, 356. XVII, 24—27.

25. Zu beweisen, dafs die Determinante
$$\begin{vmatrix}\sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin\beta\cos\beta & \sin\gamma\cos\gamma\end{vmatrix}$$
den Faktor $\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)$ enthält.*)

(856) Fuhrmann XX, 196. XX, 590.

26. Wenn $\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma=c$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma=s$ gesetzt wird, so ist

a) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=8cs$,

b) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=4c^2-(2s+1)^2$.

(291) Fuhrmann XIV_8, 192. XIV, 591.

27. Wird ein Winkel α durch einen Strahl in die Teilwinkel x und $\alpha-x$ zerlegt, so ist stets
$$\cos\alpha^2+\cos x^2+\cos(\alpha-x)^2=1+2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha-x).$$

(1307) Junker XXV, 362. XXVI, 180.

28. Die Formel $\operatorname{cotg} x-\operatorname{tg} x=2\cot 2x$ geometrisch zu beweisen.

(*586*) Mathesis. XXIV, 196.

b. Beziehungen zwischen Winkeln, welche gewisse Bedingungen erfüllen.

α. Die Winkelsumme beträgt 180°.

Für $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ sind folgende Relationen zu beweisen:

*) Die Aufgabe ist XX, 196 ungenau gestellt.

29. $\frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} + \frac{\cot\beta + \cot\gamma}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} + \frac{\cot\gamma + \cot\alpha}{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha} = 1.$

(*293*) Math. Magazine. XVII, 204.

30. $\frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}} + \frac{\cot\beta + \cot\gamma}{\cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}} + \frac{\cot\gamma + \cot\alpha}{\cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}} = 1,$

(*294*) Math. Magazine. XVII, 204.

31. $\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma$
$= (-1)^{n+1} 4 \sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma.$*)

32. $\sin(2n+1)\alpha + \sin(2n+1)\beta + \sin(2n+1)\gamma$
$= (-1)^n 4 \cos\frac{2n+1}{2}\alpha \cos\frac{2n+1}{2}\beta \cos\frac{2n+1}{2}\gamma.$

33. $\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} n\beta + \operatorname{tg} n\gamma = \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg} n\beta \operatorname{tg} n\gamma.$

34. $\cot n\alpha + \cot n\beta + \cot n\gamma = \frac{\cos n\alpha \cos n\beta \cos n\gamma + (-1)^{n+1}}{\sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma}.$

(348—351) Sievers XV, 38—39. XV, 349—352.

35. $\sin\alpha^3 \cos(\beta-\gamma) + \sin\beta^3 \cos(\gamma-\alpha) + \sin\gamma^3 \cos(\alpha-\beta)$
$= 3 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$

36. $\sin\alpha \cos\alpha^3 + \sin\beta \cos\beta^3 + \sin\gamma \cos\gamma^3$
$= \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma (1 - 4\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma).$

(292a, b) Fuhrmann XIV, 192. XIV, 591.

37. $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sum \cos\alpha^2 = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \sum \frac{\sin\alpha^3}{\cos\alpha}.$

(*592*) Journ. élém. XXIV, 345.

38. Ist $\cot\vartheta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$, so ist auch

$\cot\vartheta = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$
$+ \cot\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$

(421) Fuhrmann XV, 441. XVI, 120,

39. Unter welcher Bedingung ist α eine Wurzel der Gleichung
$\Sigma \sin\alpha \cos(\alpha - x) = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$
wenn α, β, γ die Winkel eines Dreiecks sind?

(1110) Emmerich XXIII, 194. XXIII, 586.

---

*) $\cos 2n\alpha + \cos 2n\beta + \cos 2n\gamma = (-1)^n 4 \cos n\alpha \cos n\beta \cos n\gamma - 1.$
Sauter XV, 350. Anmerk. zu 349.

40. Für $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ ist

$$1)\ \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < \tfrac{3}{2},$$

$$2)\ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma > \sqrt{27};$$

im letzteren Falle mufs jeder Winkel kleiner als 90^0 sein.

(431) SCHLÖMILCH XV, 524. XVI, 197.

Vergl. auch Ebene Trigonometrie § 4 b.

β. Die Winkelsumme beträgt 360^0, ein Vielfaches von π, oder es bestehen irgend welche andere Beziehungen zwischen den Winkeln.

41. Ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$, so ist $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = 4\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\sin\frac{\beta+\delta}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2}$. Aus dieser Gleichung sind als spezielle Fälle die folgenden herzuleiten:

1) $\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma + \sin 2n\delta = -4\sin n(\alpha+\delta)\sin n(\beta+\delta)\sin n(\gamma+\delta)$;

2) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin\delta = 4\sin\frac{\delta-\alpha}{2}\sin\frac{\delta-\beta}{2}\sin\frac{\delta-\gamma}{2}$;

3) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$.

Für 1) soll $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$, für 2) $\alpha + \beta + \gamma = \delta$ und für 3) sollen α, β, γ ganz beliebige Winkel sein.

(194) GLASER XII, 433. XII, 433.

42. Dafs folgende Ausdrücke sämtlich einander gleich sind, soll unter der Bedingung $\alpha + \beta + \gamma + \delta = (2n+1)\pi$ bewiesen werden:

1) $A = (\sin\alpha\sin\beta + \sin\gamma\sin\delta)(\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\delta)(\sin\alpha\sin\delta + \sin\beta\sin\gamma)$;

2) $B = (\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma\cos\delta)(\cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\delta)(\cos\alpha\cos\delta + \cos\beta\cos\gamma)$;

3) $C = \frac{1}{4}(-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta) \times (\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta)(\cdots)\cdot(\cdots)$.

4) $D = \frac{1}{4}(-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta)\cdot(\cdots)\cdot(\cdots)\cdot(\cdots)$;

5) $E = \frac{1}{16}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + 2\delta)^2$;

6) $F = \sin(\alpha+\beta)^2\sin(\alpha+\gamma)^2\sin(\alpha+\delta)^2$.

(*584*) Mathesis. XXIV, 194.

43. $$D=\begin{vmatrix} -\sin(\alpha+\beta) & \sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \sin\alpha & -\sin(\beta+\gamma) & \sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \sin(\alpha+\beta) & \sin\alpha \\ \sin\beta & 0 & \sin\alpha & \sin(\beta+\gamma) \end{vmatrix}$$

zu berechnen, wenn α, β, γ drei aufeinander folgende Winkel eines Sehnenvierecks sind.

(*583*) Journ. élém. XXIV, 194.

44. Sind α und α', β und β', γ und γ' die drei Paar Gegenwinkel eines vollständigen Vierseits, so ist: $\sin\alpha\sin\alpha' + \sin\beta\sin\beta' + \sin\gamma\sin\gamma' = 0$, m. a. W.: Schneidet eine Gerade G die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks der Reihe nach unter den Winkeln α', β', γ', so gilt die obige Relation. Dabei ist aber zu bemerken: a) Man wähle die Winkel α', β', γ' an derselben Seite von G. b) Unter den Dreiecken $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ ist eins, welches einen Aufsenwinkel des Dreiecks ABC zum Innenwinkel hat; ist $BC'A'$ dieses Dreieck, so ist β' positiv zu nehmen, α' und γ' negativ oder die beiden letzten Winkel sind positiv, β' negativ zu nehmen.

(900) Artzt XX, 511. XXI, 276.

45. Wenn $a+\alpha+b+\beta+c+\gamma=0$, ist

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}(a+\alpha) & \operatorname{tg}(a+\beta) & \operatorname{tg}(a+\gamma) \\ \operatorname{tg}(b+\alpha) & \operatorname{tg}(b+\beta) & \operatorname{tg}(b+\gamma) \\ \operatorname{tg}(c+\alpha) & \operatorname{tg}(c+\beta) & \operatorname{tg}(c+\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

(*582*) Mathesis. XXIV, 194.

46. Wenn $m\sin(\vartheta+\varphi)=\cos(\vartheta-\varphi)$ ist, so ist zu beweisen, dafs $\frac{1}{1-m\sin 2\vartheta}+\frac{1}{1-m\sin 2\varphi}$ von ϑ und φ unabhängig ist, und zwar ist $\frac{1}{1-m\sin 2\vartheta}+\frac{1}{1-m\sin 2\varphi}=\frac{2}{1-m^2}$.

(*181*) Educ. Tim. XIV, 602.

47. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta=P$ läfst sich in ein Produkt verwandeln, wenn

1) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2k\pi$,
2) $\alpha+\beta-\gamma-\delta=2k\pi$,
3) $\alpha+\beta+\gamma-\delta=(2k+1)\pi$,
4) $\alpha+\beta=2k\pi$,
5) $\alpha-\beta=(2k+1)\pi$.

(689) Sievers XVIII, 278. XIX, 30.

48. Sind α, ε, ω drei positive Winkel, die nicht alle drei einander gleich sind, und ist $\alpha + \varepsilon + \omega \leqq 360^0$, so ist

$$\sin\alpha + \sin\varepsilon + \sin\omega < 3\sin\frac{\alpha+\varepsilon+\omega}{3}.$$

(502) Breuer XVI, 274. XVI, 591.

49. Sind α, ε, ω drei positive Winkel, die nicht alle drei einander gleich sind und deren Summe nicht größer als 180^0 ist, so ist

$$\cos\alpha + \cos\varepsilon + \cos\omega < 3\cos\frac{\alpha+\varepsilon+\omega}{3}.$$

(503) Breuer XVI, 274. XVI, 591.

50. Wenn α, β, γ drei positive Winkel sind und $\alpha + \beta + \gamma = s \overline{\gtrless} 90^0$ ist, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma > 3\operatorname{tg}\frac{1}{3}s.$$

(588) Stoll XVII, 200. XVII, 590.

51. Wenn α, β, γ drei positive Winkel sind und $\alpha + \beta + \gamma = s \overline{\gtrless} 90^0$ ist, so ist

1) $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma > 3\cot\frac{1}{3}s$,

2) $\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma > \cot\frac{1}{3}s^3$,

3) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma < \operatorname{tg}\frac{1}{3}s^3$,

(589) Stoll XVII, 200. XVII, 591.

52. Wenn x, y, $z < 180^0$ sind, so ist

$$\sin x\sin y\sin z < \sin\frac{1}{2}(y+z)\sin\frac{1}{2}(z+x)\sin\frac{1}{2}(x+y).$$

Wenn x, y, $z < 90^0$ sind, so ist

$$\cos x\cos y\cos z < \cos\frac{1}{2}(y+z)\cos\frac{1}{2}(z+x)\cos\frac{1}{2}(x+y).$$

(789 a, b) Stoll XIX, 347. XX, 186.

53. Sind ν_1, ν_2, ν_3 die nach derselben Richtung genommenen Winkel der nach den Seiten a, b, c eines Dreiecks gezogenen Mittellinien t_a, t_b, t_c, so ist $\cot\nu_1 + \cot\nu_2 + \cot\nu_3 = 0$.

II, 218. Vergl. Grunerts Archiv 51. Heft 4. p, 506 und Faſsbender Archiv 49 u. 51. p. 46.

§ 2. Trigonometrische Gleichungen.

a. Gleichungen, in denen ein Winkel zu bestimmen ist.

α. Die Lösung ergiebt sich in sehr einfacher Weise oder führt auf eine quadratische Gleichung.

1. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = 2 - \sqrt{3}$; x ohne Logarithmen zu berechnen.
(*69*) Journ. élém. XII, 203.

2. $$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$$
(*168*) Journ. élém. XIV, 599.

3. $$\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}.$$
(*171*) Journ. élém. XIV, 599.

4. $$\cot x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$$
(*173*) Journ. élém. XIV, 599.

5. $$\operatorname{tg} x^2 + 4\sin x^2 = 3.$$
(*170*) Journ. élém. XIV, 599.

6. $$6\operatorname{tg} x + 12\cot x = \frac{5\sqrt{3}}{\cos x}.$$
(*62*) Journ. élém. XII, 203.

7. $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x = k.$
(46) Schlömilch VIII, 501. IX, 431.

8. $\sin x^2 + \cos x^2 + \operatorname{tg} x^2 + \cot x^2 + \sec x^2 + \operatorname{cosec} x^2 = 8.$
(*399*) Mathesis. XX, 435.

9. $\sin x^2 + \cos x^2 + \operatorname{tg} x^2 + \cot x^2 + \sec x^2 + \operatorname{cosec} x^2 = a.$
Zwischen welchen Grenzen mufs a liegen, wenn der gesuchte Winkel reell ausfallen soll? Beispiel: $a = \frac{29}{3}$.
(1317) Schlömilch XXV, 432. XXVI, 270.

10. $$\sin 2x^2 - \sin x^2 = \sin 30^{0\,2}.$$
(*66*) Journ. élém. XII, 203.

11. $$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin 2x}.$$
(*61*) Journ. élém. XII, 203.

12. $$4\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0.$$
(*169*) Journ. élém. XIV, 599.

13. $$1 + 2 \sin\varphi = 2 \cos 2\varphi.$$
Wie kann man den absolut kleinsten Winkel φ konstruieren?
(30) Bauer. VI, 159. —

14. $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = \frac{1}{\sin x} - \sin x.$$
(*72*) Journ. élém. XII, 204.

15. $$\operatorname{tg} 2x \cot x = -1.$$
(*63*) Journ. élém. XII, 203.

16. $$\operatorname{tg} x \cot 2x = \operatorname{tg} 2x \cot x.$$
(*172*) Journ. élém. XIV, 599.

17. $$\operatorname{tg}(x + 45^0) + \operatorname{tg}(x - 45^0) = \tfrac{8}{2}.$$
(*287*) Journ. élém. XVII, 202.

18. $$2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\alpha - x) = \operatorname{tg}(\beta + x).$$
(*73*) Journ. élém. XII, 204.

19. $$\cos(\alpha - \beta) \sin(\gamma - x) = \cos(\alpha + \beta) \sin(\gamma + x).$$
(*74*) Journ. élém. XII, 204.

20. Aus $\operatorname{tg} b \cos x - \sin a \sin x = \operatorname{tg} b \cos a$ soll $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ als Funktion von $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} b$ abgeleitet werden.
(*579*) Mathesis. XXIV, 193.

21. $$16^{\cos x^2 + 2 \sin x^2} + 4^{2 \cos x^2} = 40.$$
(*400*) Educ. Times. XX, 435.

β. Die Gleichungen lassen sich nach der Umformung in Faktoren zerlegen.

22. $$\cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x^2}.$$
(*65*) Journ. élém. XII, 203.

23. $$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 2 \cos 2x.$$
(*59*) Journ. élém. XII, 202.

24. $$3 + \cos 4x = 4 \cos 2x + 2 \cos x^3 \sin x.$$
(*71*) Journ. élém. XII, 204.

25. $$\sin 2x + \sin 3x = \sin x.$$
(*64*) Journ. élém. XII, 203.

26. $$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$
(*91*) Journ. élém. X, 421.

27. $\sin 2x = \cos 3x.$

(*60*) Journ. élém. XII, 203. —

28. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{3x}{2}.$

(*174*) Journ. élém. XIV, 600.

29. $\sin x + \sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0.$

(*175*) Journ. élém. XIV, 600.

30. $\cos x - \cos 2x - \cos 4x = 0.$

(590) Sporer XVII, 200. XVII, 592.

31. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x.$

(*92*) Journ. élém. X, 421. —

32. $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 5x = 0.$

33. $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 3x + 2 \operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 7x = 0.$

34. $\operatorname{tg} x + a \operatorname{tg} 2x + a \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0.$

(*394—396*) Journ. élém. XX, 351—352.

35. $\sin\left(45^0 + \frac{3x}{2}\right) = h \sin\left(45^0 - \frac{x}{2}\right).$

(*288*) Educ. Times. XVII, 202.

36. $7346.7^{\sec x} + 7^{1+\sec x} - 7010.7^{2\sec x} - 7^{3+2\sec x}$
$+ 3.7^{2+3\sec x} = 147.$

(*401*) Educ. Times. XX, 436.

Vergl. auch Ebene Trigonometrie § 5 Nr. 18.

γ. Die Theorie der Gleichungen ist zu benutzen.

37. Welche Bedingungen müssen a, b, c erfüllen, damit

$$a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x = 0$$

lösbar ist?

(347) v. Schäwen XV, 38. XV, 349.

38. a) Die Summe der Winkel zu bestimmen, deren Tangenten die Wurzeln der Gleichung $x^{10} - 3x^9 + 7x^8 - x^7 + 3x^6 - 4x^5 + 11x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 1 = 0$ sind. b) Dieselbe Aufgabe ist für die allgemeine Gleichung $n$ten Grades in Bezug auf x zu lösen.

(*585*) Nyt Tidsskrift. XXIV, 195.

b. Gleichungen, in denen zwei oder drei Winkel oder Unbekannte zu bestimmen sind.

39. x und y zu berechnen aus

$$x(1 + \sin\varphi^2 - \cos\varphi) - y\sin\varphi(1 + \cos\varphi) = c(1 + \cos\varphi),$$
$$y(1 + \cos\varphi^2) - x\sin\varphi\cos\varphi = c\sin\varphi.$$

(*177*) Journ. élém. XIV, 600.

40. φ und ψ zu berechnen aus

$$\sin(\varphi + \psi) = a + b,$$
$$a \operatorname{tg}\psi = b \operatorname{tg}\varphi.$$

(*398*) Educ. Times. XX, 435.

41. $u = 3v$; $\operatorname{tg} u = x + 1$; $\operatorname{tg} v = x - 1$. x zu berechnen.

(*70*) Journ. élém. XII, 203.

42. x, y, z zu berechnen aus

$$x + y + z = 1,$$
$$x \operatorname{tg}\alpha + y \operatorname{tg}\beta + z \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\delta,$$
$$x \operatorname{tg}\alpha^2 + y \operatorname{tg}\beta^2 + z \operatorname{tg}\gamma^2 = \operatorname{tg}\delta^2.$$

(*578*) Nyt Tidsskrift. XXIV, 193.

43. $\sin x = \cos y$; $\sin y = \operatorname{tg} z$; $\sin z = \cot x$.

(*67*) Journ. élém. XII, 203.

44. α, β, γ zu berechnen, wenn

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0,$$
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = s,$$
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = p$$

gegeben ist.

(432) Schlömilch XV, 524. XVI, 199.

45. α, β, γ zu berechnen, wenn

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0,$$
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = a,$$
$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = b$$

gegeben ist.

(433) Schlömilch XV, 524. XVI, 200.

46. α, β, γ zu berechnen aus

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = a,$$
$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = b,$$
$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\left(1 - a - a^2 + ab - \frac{b}{2}\right) + 2a^3.$$

(*397*) Journ. élém. XX, 352.

Vergl. Ebene Trigonometrie § 5 b.

---

§ 3. Goniometrische Reihen.

1. Zu summieren

$$\sin\varphi^3 + \sin 2\varphi^3 + \sin 3\varphi^3 + \cdots + \sin n\varphi^3 = S.$$

(*286*) Math. Magazine. XVII, 202.

2. $S = \frac{\cos\alpha}{\sin 3\alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\sin 3^2\alpha} + \frac{\cos 3^2\alpha}{\sin 3^3\alpha} + \cdots \frac{\cos 3^n\alpha}{\sin 3^{n+1}\alpha}$

ist zu berechnen.

(*421*) Journ. élém. XXI, 32.

3. $S = \frac{\sin\frac{\alpha}{3}}{\cos\alpha} + \frac{\sin\frac{\alpha}{3^2}}{\cos\frac{\alpha}{3}} + \cdots \frac{\sin\frac{\alpha}{3^n}}{\cos\frac{\alpha}{3^{n-1}}}$ zu berechnen.

(*422*) Journ. élém. XXI, 33.

4. $S = \frac{1}{\cos x \cos y} + \frac{1}{\cos y \cos z} + \cdots \frac{1}{\cos t \cos u} + \frac{1}{\cos u \cos v}$

zu berechnen, wenn $x, y, z \cdots t, u, v$ eine arithmetische Progression mit der Differenz ϱ bilden.

(*418*) Educ. Times. XX, 515.

5. $S = \cos x^n + \cos x^{n-1}\cos x + \cos x^{n-2}\cos 2x + \cdots \cos nx$

zu berechnen.

(*424*) Educ. Times. XXI, 33.

6. Setzt man $\frac{1}{2}\pi = \varrho$, so ist bei ganzen positiven n

$$\sec\frac{\varrho^2}{n} + \sec\frac{2\varrho^2}{n} + \cdots + \sec\frac{(n-1)\varrho^2}{n} = \frac{2}{3}(n^2 - 1)$$

und folglich

$$\operatorname{tg}\frac{\varrho^2}{n} + \operatorname{tg}\frac{2\varrho^2}{n} + \cdots + \operatorname{tg}\frac{(n-1)\varrho^2}{n} = \tfrac{1}{3}(n-1)(2n-1).^{*)}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen werden zu ganzen Zahlen, sobald n unter der Form $3k + 1$ enthalten ist.

(156) SCHLÖMILCH XII, 201. XIII, 27—28.

7. Die Reihen $S_1 = 1 + \binom{n}{1}\cos\alpha + \binom{n}{2}\cos 2\alpha + \cdots$ und $S_2 = \binom{n}{1}\sin\alpha + \binom{n}{2}\sin 2\alpha + \binom{n}{3}\sin 3\alpha + \cdots$ sind zu summieren. Ferner ist zu zeigen, dafs S_1 für $n\alpha = \pi$, S_2 für $n\alpha = 2\pi$ verschwindet.

(*631*) Educ. Times. XXV, 50.

8. Es ist der dem sogen. Moivre'schen Theorem analoge Satz für $(\sin\varphi + i\cos\varphi)^n$ zu finden.

(72) v. SCHÄWEN X, 196. X, 346.

9. Zu beweisen, dafs

a) $$\sum_1^{n-1}{}^k\, k \operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n-1} = \frac{2n-1}{2}\sum_1^{n-1}{}^k \frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2n-1}};$$

b) $$\sum_1^{n}{}^k (2k-1)\operatorname{tg}\frac{2k-1}{4n}\pi = 2n\sum_1^{n-1}{}^k\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2n}} + n \text{ ist.}$$

(691) SIMON XVIII, 356. Nicht gelöst.

10. Verbindet man irgend eine Ecke eines in einen Kreis vom Radius r beschriebenen regulären Polygons mit allen übrigen Ecken, so entstehen $(n-2)$ Dreiecke, für welche die Summe der Quadrate der Radien der ihnen eingeschriebenen Kreise zu berechnen ist. n kann gerade und ungerade sein und zwar ist die Summe $(2r)^2 \sin\frac{\pi^2}{2n}\left(n - 2 - \frac{n}{2}\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

(528) SCHUHMACHER XVI, 429. XVII, 193.

11. Sind $A_1, A_2, \cdots A_n$ die Ecken eines regelmäfsigen Vielecks von ungerader Seitenzahl und ist

a) O ein beliebiger Punkt auf dem Bogen A_1A_n des Umkreises, so ist

$$OA_1 + OA_3 + \cdots OA_n = OA_2 + OA_4 + \cdots OA_{n-1}\,(S_1 = S_2),$$

---

*) Analog findet man

$$\cos\frac{\varrho^2}{n}\cos\frac{2\varrho^2}{n}\cdots\cos\frac{(n-1)\varrho^2}{n} = \frac{n}{2^{2(n-1)}},$$

$$\cos\frac{\varrho^4}{n} + \cos\frac{2\varrho^4}{n} + \cdots\cos\frac{(n-1)\varrho^4}{n} = \tfrac{1}{8}(3n-4).$$

b) P ein Punkt im Innern oder auf der Peripherie des Umkreises, seine Entfernung vom Mittelpunkt $MP = a$ und r der Radius des Umkreises, so ist $\sum_1^n PA_n^2 = n(r^2 + a^2)$.*)

(944) TAFELMACHER XXI, 195. XXI, 587.

II. Ebene Trigonometrie.

§ 4. Aufgaben über besondere Formen des Dreiecks.

1. Ist der Radius r des Umkreises doppelt so grofs wie der Radius ϱ des Inkreises, so ist das Dreieck gleichseitig.

(*596*) Educ. Times. XXIV, 347.

2. Sind die Winkel eines Dreiecks durch die Relation $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = \frac{3}{4}$ verbunden, so ist das Dreieck gleichseitig. (Umkehrung einfach.)

(*299*) Educ. Times. XVII, 367.

3. Sind α, β, γ die Winkel eines Dreiecks und ist $\sum \sin\alpha\cos(\beta + 30^0)\cos(\gamma + 30^0) = 0$, so ist das Dreieck gleichseitig.

(1108) EMMERICH XXIII, 194. XXIII, 585.

4. Wenn zwischen den Winkeln α und β eines Dreiecks die Relation $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta^3}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha^3}{2}$ besteht, so ist das Dreieck gleichschenklig.

(*406*) Journ. élém. XX, 437.

5. Sind α, β, γ die Winkel eines Dreiecks und ist $\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin\alpha} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin\beta} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\gamma} = 0$, so ist das Dreieck gleichschenklig.

(1074) EMMERICH XXII, 512. XXIII, 267.

6. Über derselben Grundlinie $AB = 2a$ konstruiert man drei gleichschenklige Dreiecke ABC, ABC' und ABC'', deren Höhen

---

*) Zusatz: Verbindet man einen beliebigen Punkt des Kreisumfangs mit den Ecken eines regelmäfsigen Vielecks, so ist die Summe der Verbindungslinien ein Maximum oder Minimum, je nachdem der Punkt in einer Bogenmitte oder in einer Ecke liegt. GLASER. KÜCKER.

resp. $\frac{1}{2}AB$, AB und $\frac{3}{2}AB$ sind. Man soll die Summe der Winkel $ACB = 2\gamma$, $AC'B = 2\varphi$ und $AC''B = 2\psi$ berechnen.

(*405*) Mathesis. XX, 437.

7. Wenn die Seiten eines Dreiecks eine arithmetische Progression bilden $(a + c = 2b)$, so ist $4(1 - \cos\alpha)(1 - \cos\gamma) = \cos\alpha + \cos\gamma$.

(*597*) Educ. Times. XXIV, 347.

8. Die Bedingung dafür aufzustellen, daſs sich im $\triangle ABC$ die Höhe AA', die Winkelhalbierende BB' und die Mittellinie CC' in einem Punkte O schneiden.

(*600*) Mathesis. XXIV, 348.

9. Die Beziehungen zwischen den Winkeln eines Dreiecks aufzustellen, wenn der Höhenschnittpunkt H auf dem Inkreise (m, ϱ) liegen soll.

(*598*) Mathesis. XXIV, 347.

---

§ 5. Aufgaben über das allgemeine Dreieck.

a. Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten oder irgend welchen Strecken.*)

In jedem Dreieck bestehen folgende Relationen:

1. $$\frac{a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma}{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma} = \frac{r(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}.$$

(*295*) Math. Magazine. XVII, 366.

2. $$\frac{\cos\alpha}{c\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{a\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma}{b\sin\alpha} = \frac{1}{r} = \frac{4\triangle}{abc}.^{**})$$

(*296*) Educ. Times. XVII, 366.

3. $$a\sin\alpha = c\sin\gamma + b\sin(\alpha - \gamma).$$

4. $a\sin(\beta - \gamma) + b\sin(\gamma - \alpha) + c\sin(\alpha - \beta) = 0.$

Ferner ist $a^3\sin(\beta - \gamma) + b^3\sin(\gamma - \alpha) + c^3\sin(\alpha - \beta) = 0$.

(466a, b) Weber XVI, 26. XVI, 26.

---

*) Vergl. Pietzker: Über einige trigonometrische Formeln. XVII, 13—14.

**) Die in der Zeitschrift angegebene Formel ist fehlerhaft.

5. $$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{s-a} & \cos\alpha & 1 \\ \frac{1}{s-b} & \cos\beta & 1 \\ \frac{1}{s-c} & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(*591*) Journ. élém. XXIV, 345.

6. $A = a^2(\cot\beta + \cot\gamma) + b^2(\cot\alpha + \cot\gamma) + c^2(\cot\alpha + \cot\beta) = 4\Delta(\cot\vartheta^2 - 1)$, wo ϑ der Brocard'sche Winkel ist.

(*403*) Journ. élém. XX, 436.

7. $$b\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\right) + c\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma\right) = 4r.$$

(*589*) Mathesis. XXIV, 344.

8. $$\frac{a^2\cot\frac{1}{2}\alpha + b^2\cot\frac{1}{2}\beta + c^2\cot\frac{1}{2}\gamma}{a^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + b^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta + c^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma} = \frac{r+\varrho}{r-\varrho}.^{*)}$$

(*407*) Mathesis. XX, 438.

9. $$4r - 2\varrho = a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha + b\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta + c\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

(*588*) Journ. élém. XXIV, 196.

10. $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a}\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma\right) + \frac{1}{b}\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha\right) + \frac{1}{c}\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\right).$$

(*590*) Journ. élém. XXIV, 344.

11. $$(a\operatorname{tg}\beta - 2\varrho)(b\operatorname{tg}\gamma - 2\varrho)(c\operatorname{tg}\alpha - 2\varrho) = (a\operatorname{tg}\gamma - 2\varrho)(b\operatorname{tg}\alpha - 2\varrho)(c\operatorname{tg}\beta - 2\varrho).$$

12. $$(a\operatorname{tg}\beta^{**)} - 2\varrho_c)(b\operatorname{tg}\gamma - 2\varrho_a)(c\operatorname{tg}\alpha - 2\varrho_b) = -(a\operatorname{tg}\gamma - 2\varrho_b)(b\operatorname{tg}\alpha - 2\varrho_c)(c\operatorname{tg}\beta - 2\varrho_a).$$

(*593*) Mathesis und Nyt Tidsskrift. XXIV, 345.

b. Berechnung von Winkeln und Beziehungen zwischen denselben.

13. Die Winkel eines Dreiecks zu berechnen, wenn $\gamma = 60^0$ und $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$ ist.

(*298*) Journ. élém. XVII, 367.

---

*) $a^2\cot\frac{1}{2}\alpha + b^2\cot\frac{1}{2}\beta + c^2\cot\frac{1}{2}\gamma = 16r\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma(r+\varrho)$,
$a^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + b^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta + c^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = 16r\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma(r-\varrho)$.
(*407*) XX, 438.

**) In der Zeitschrift $a\operatorname{tg}\alpha$ statt $a\operatorname{tg}\beta$.

14. Die Winkel eines Dreiecks seien α, β, γ; gegeben ist γ und die Bedingung $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta^3$. Man soll die Winkel berechnen.
(309) Fuhrmann XIV, 357. XV, 117.

15. Man kennt von den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = p$, $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = q$; dieselben sind zu berechnen. (Kubische Gleichung.)
(290) Fuhrmann XIV, 192. XIV, 590.

16. Die drei Winkel eines Dreiecks sind zu berechnen, wenn dieselben in arithmetischer Progression stehen und die Summe der Quadrate ihrer Sinus $= 2$ ist.
(*297*) Journ. élém. XVII, 367.

17. Wenn in einem Dreieck die Tangenten der Winkel in arithmetischer Progression stehen, so stehen auch die Sinus der doppelten Winkel in arithmetischer Progression.
(*402*) Journ. élém. XX, 436.

18. Die Gleichung $\sin(\alpha + x)\sin(\beta + x)\sin(\gamma + x) + \sin x^3 = 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ aufzulösen, wenn α, β, γ die Winkel eines Dreiecks sind.
(1109) Emmerich XXIII, 194. XXIII, 585.

19. Wie grofs ist der Winkel φ, welcher der Seite $x^2 + x + 1$ eines Dreiecks gegenüberliegt, wenn die beiden andern Seiten $2x + 1$ und $x^2 - 1$ sind?
(*176*) Journ. élém. XIV, 600.

20. Ist ω der Winkel, welchen die Mittellinie $AD = t_a$ eines Dreiecks mit ihrer Gegentransversale AE bildet und $\beta - \gamma = \delta$, so ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta$, wenn $\cos\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}$.
(367) Fuhrmann XV, 125. XV, 436.

21. Im Dreieck ABC ist die Seite AB in drei gleiche Teile AD, DE, EB geteilt. Die Winkel $ACD = \varphi'$ und $BCE = \varphi''$ sind zu berechnen, wenn man $\sphericalangle\gamma$ und $\sphericalangle DCE = \varphi$ kennt.
(*408*) Mathesis. XX, 438.

22. Die Winkel eines Dreiecks zu berechnen, wenn man den Brocard'schen Winkel ϑ kennt und wenn aufserdem

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \frac{2}{\cot\vartheta - 1} \text{ ist.}$$

(*404*) Journ. élém. XX, 437.

23. Welche Beziehung besteht zwischen zwei Winkeln eines Dreiecks, wenn deren Differenz gleich dem Brocard'schen Winkel ist?
(1091) EMMERICH XXIII, 49. XXIII, 425.

24. Bezeichnet δ irgend einen der Winkel eines Dreiecks, ω seinen Brocard'schen Winkel, so ist $\omega < 60^0 - \frac{1}{8}\delta$.
(1090) EMMERICH XXIII, 49. XXIII, 424.

25. Werden die Winkel α, β, γ eines Dreiecks durch die Mittellinien geteilt in resp. α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2, so ist $S = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} + \frac{\sin\beta}{\sin\beta_1 \sin\beta_2} + \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2} = 6(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma)$ $= 6 \cot\vartheta$.
(720) FUHRMANN XVIII, 504. XIX, 269.

26. Auf einer Geraden trägt man von A aus gleiche Strecken $AB = BC = CD = \cdots$ ab, errichtet in A eine Senkrechte AX und verbindet X mit den verschiedenen Teilpunkten. Eine Relation zwischen den verschiedenen Winkeln $AXB = \alpha$, $BXC = \alpha_1$, $CXD = \alpha_2$ u. s. w. zu finden.
(*300*) Journ. élém. XVII, 367.
Vergl. Goniometrie § 1 Nr. 30—42.

c. Berechnung von Dreiecken und einzelne Berechnungen von Entfernungen und Höhen.*)

27. Aus zwei Seiten a und b eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel C ist zu berechnen Seite c, die Winkel A und B, und der Inhalt. $a = 3676^m,351$; $b = 2154^m,742$; $C = 103^0\,46'\,27''$.
(*11*$_1$) Nouv. Ann. X, 15. —

28. Aus den drei Seiten eines Dreiecks $a = 4376{,}76^m$; $b = 3564{,}37^m$; $c = 2754{,}82^m$ die Winkel und den Inhalt zu berechnen.
(*12*$_1$) Nouv. Ann. X 16. —

29. Die Seiten eines Dreiechs sind $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; die Winkel des Dreiecks ohne Hilfe der Logarithmen zu berechnen.
(*68*) Journ. élém. XII, 203.

30. Ein Dreieck zu berechnen aus a, $\frac{b}{c} = q$ und ϱ (Radius des eingeschriebenen Kreises).
(443) BERMANN XV, 613. XVI, 267.

*) Vergl. auch B. § 9 Nr. 68—70.

31. Ein Dreieck zu berechnen aus a, r, $\sphericalangle (at_c) = \gamma_2$.
(420) v. SCHÄWEN XV, 441. XVI, 119.

32. Ein Dreieck zu berechnen aus $a + b + c = 2s$, $ab = m^2$ und $\sphericalangle (t_a t_b) = 90^0$.
(*183*) Journ. élém. XIV, 603.

33. Ein Dreieck zu berechnen aus c, ab, $\sphericalangle (\alpha - \beta)$.
(1030) FUHRMANN XXII, 198. XXII, 593.

34. Ein Dreieck zu berechnen, aus zwei Seiten a und b und der Linie $CO = m$, welche die beiden gemeinschaftliche Ecke C mit dem Mittelpunkt O des eingeschriebenen Kreises verbindet.
(*240*) Journ. élém. XIII, 283. XIV, 185.

35. Von einem Dreieck kennt man die Basis c, die zugehörige Höhe h_c und der Höhenschnittpunkt soll von der Basis $\frac{1}{n} h_c$ entfernt sein. Man soll das Dreieck berechnen.
(801) RULF XIX, 430. XX, 268 (807 statt 801).

36. Ein Dreieck trigonometrisch zu berechnen, wenn gegeben sind eine Seite, der Gegenwinkel und der Winkel, den die von den Endpunkten der Seite ausgehenden Mittellinien bilden.
(225) FUHRMANN XIII, 206. XIV, 92.

37. Ein Dreieck trigonometrisch zu berechnen, wenn gegeben sind eine Seite, der Gegenwinkel und das Verhältnis der von den Endpunkten der Seite ausgehenden Mittellinien.
(226) FUHRMANN XIII, 206. XIV, 93.

38. Ist in einem Dreieck h_a die Höhe auf Seite a, t_a die Mittellinie nach a und v_a ihre Gegentransversale (von der Ecke bis zur Gegenseite), so ist das Dreieck zu berechnen aus

a) h_a, t_a, v_a;
b) a, v_a, t_a;
c) v_a, t_a und dem Inhalt $\triangle$.

(515—517) FUHRMANN XVI, 356. XVII, 27—30.

39. Der Mittelpunkt des um $\triangle XYZ$ beschriebenen Kreises sei von den Seiten YZ, ZX, XY um bez. a, b, c entfernt; man sucht die Seiten und Winkel des Dreiecks.
(441) SCHLÖMILCH XV, 612. XVI, 265.

40. Der Mittelpunkt des in $\triangle XYZ$ beschriebenen Kreises sei von den Ecken X, Y, Z um bez. a, b, c entfernt; das Dreieck soll hiernach berechnet werden.
(442) SCHLÖMILCH XV, 612. XVI, 266.

41. Ein Punkt und ein gleichseitiges Dreieck liegen in derselben Ebene; man soll die Seite des Dreiecks aus den Entfernungen des Punktes von den Ecken des Dreiecks berechnen.
(612) Fuhrmann XVII, 366. XVIII, 129.

42. Von den drei Eckpunkten eines gegebenen Dreiecks sieht man die Höhe eines Turmes unter den Sehwinkeln α', β', γ'. Wie hoch ist der Turm und wie grofs sind die Entfernungen seines Fufspunktes von den Ecken des Dreiecks?
(799) Stoll XIX, 430. XX, 266 (805 statt 799.)

43. An den drei Ecken eines gegebenen Dreiecks ABC stehen drei Türme, deren Spitzen von einem Punkt O in der Ebene des Dreiecks gleich weit entfernt sind. Die Höhen h_1, h_2, h_3 der Türme und ihre Entfernungen von O sind zu berechnen.
(800) Stoll XIX, 430. XX, 267 (806 statt 800).

44. Auf einer Geraden sind zwei gleich lange Strecken abgesteckt und gemessen, $AB = CD = g$, und zwischen beiden ist ein Punkt M festgelegt. Von einem Punkte O aufserhalb der Linie mifst man durch Visieren $\sphericalangle AOB = \varphi_1$, $\sphericalangle AOM = \psi_1$, $\sphericalangle DOC = \varphi_2$, $\sphericalangle DOM = \psi_2$. Man soll den Inhalt der Dreiecke AOB und DOC berechnen.
(984) Züge XXI, 520. XXII, 267.

d. Sätze über das Dreieck, deren Beweis durch Einführung trigonometrischer Funktionen geführt ist.*)

45. Sind x, y, z die Entfernungen der Ecken eines Dreiecks vom Mittelpunkt des Inkreises, so ist $Sa^4x^4 + (a+b+c)^2x^2y^2z^2 = 2\,Sa^2b^2x^2y^2$.
(*594*) Mathesis. XXIV, 346.

46. Sind x, y, z die Entfernungen der Ecken eines Dreiecks von dem Höhenschnittpunkt, so ist $xyz\,(Sax)^3 + abcSx^2\,(Sax)^2 = 4\,a^3b^3c^3$.
(*595*) Mathesis. XXIV, 346.

47. Teilt man irgend einen der drei Winkel eines ebenen Dreiecks so in zwei Teile, dafs sich die Sinusse der Teile wie die $n$ten Potenzen der anliegenden Dreiecksseiten verhalten, so wird dadurch die gegenüberliegende Dreiecksseite in zwei Abschnitte geteilt, welche sich wie die $(n+1)$ten Potenzen der anliegenden Dreiecksseiten verhalten.
(168) Anschütz XII, 266. XIII, 121.

---

*) Vergl. B. § 1 Nr. 18. 19. 44. 50. 55. 60—62. 64. 65. 70. 81. 82.

48. Teilt man jeden der drei Winkel eines Dreiecks wie in dem vorigen Satz, so schneiden sich die drei Transversalen in einem Punkte und es verhält sich der untere Abschnitt einer jeden Transversale zur ganzen Transversale, wie die $(n+1)$te Potenz der geschnittenen Seite zur Summe der $(n+1)$ten Potenzen aller Seiten.

(169) Anschütz XII, 266. XIII, 121, 205.

---

§ 6. Berechnung von Vierecken und Beziehungen an denselben.*)

1. Von einem ebenen Viereck kennt man die Seiten und die Fläche; es sollen die Winkel desselben berechnet werden.

(487) Schlömilch XVI, 205. XVI, 497.

2. Von einem Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen AC und BD sich in E schneiden, seien gegeben $AB = a$, $AC = e$, $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle D = \delta$, $\sphericalangle AEB = \varepsilon$. Man sucht die andere Diagonale f.

(806) Emmerich XIX, 509. XX, 193 (795 statt 806).

3. a) Den Diagonalenwinkel ε eines Vierecks zu berechnen, wenn gegeben die Winkel $CAB = \beta'$, $CAD = \gamma''$, $BCA = \alpha''$, $ACD = \delta'$, welche eine Diagonale mit den Seiten bildet. b) Welche Beziehung besteht zwischen β', γ'', α'', δ', wenn das Viereck ein Tangentenviereck ist?

(807) Emmerich XIX, 509. XX, 193 (796 statt 807).

4. Ein Kreisviereck zu berechnen, wenn gegeben zwei Gegenseiten $AB = a$, $CD = c$, ein Winkel $A = \alpha$ und die Diagonale $AC = e$.

(953) Emmerich XXI, 280. XXII, 23.

5. Die Winkel des Sehnenvierecks $ABCD$ zu bestimmen, wenn das Verhältnis der Diagonalen $BD : AC = m : n$ gegeben ist und a) $\sphericalangle \alpha = 2\beta$; b) $\alpha = 3\beta$; c) $\alpha = 4\beta$; d) $\alpha = 5\beta$ ist.

(1093) Ritgen XXIII, 49. XXIII, 426.

6. Fällt man im $\triangle ABC$ die Höhen AH_a, BH_b, CH_c, welche sich in H schneiden und bezeichnet die Umkreisradien der Vierecke $AH_c HH_b$, $BH_a HH_c$, $CH_a HH_b$ bezw. mit r_a, r_b, r_c, so ist $S = \frac{r_a r_b}{ab} + \frac{r_c r_a}{ca} + \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{1}{4}$.

(599) Nyt Tidsskrift. XXIV, 347.

*) Vergl. Binder: Zur Theorie des ebenen Tangentenvierecks. XXIV, 410—417.

§ 7. Aufgaben verschiedenen Inhalts.

1. Wenn von zwei durch Eisenbahnspurweite getrennten Punkten A und B der Erdbahn nach einem diametral entgegengesetzten Punkte C derselben zwei (konvergente) Gerade gezogen werden und man sich statt derselben Schienen dächte, wie weit würde eine Lokomotive auf denselben fahren können, bis sie durch die Konvergenz der Schienen merklich gehindert würde, d. h. bis zu welchem Punkte darf man die Linien AC und CB als parallel ansehen?

Spurweite im Lichten $= 1{,}435$ m (nach der VII. Eisenbahntechniker-Versammlung zu Konstanz), der Spielraum für die Spurkränze (d. h. die zulässige Querverschiebung der Achse mit den Rädern) darf (nicht unter 10 mm und) nicht über 25 mm betragen.

Nebenfragen:

a) Wie weit darf man also Sonnenstrahlen, die von einem Punkte der Sonne kommen, von einem Orte der Erde aus gerechnet, als parallel ansehen?

b) Wie weit reicht der Parallelismus der Schienen obiger Eisenbahn, wenn der Anfangspunkt der Bahn (1. Station) der Mittelpunkt der Erdbahn, die Endstation aber

α) der Sirius,

β) der Fixstern α Centauri ist?

(Entfernung des Fixsternes α Centauri von der Erde nach Henderson und Maclear angenommen zu 223000 Erdweiten.)

(82) Hoffmann X, 199. —

2. Die durch die Formel $S = 2\,\pi R^2 (\cos\varphi - \sin\varphi)$ gegebene Fläche zu berechnen, in welcher $R = 79{,}575$ m und $\varphi = 23^0 27' 22''$ ist. — Anm. Der Wert von S stellt die Fläche der gemässigten Zone im Mafsstabe der Karte von Frankreich dar.

(*1*$_2$) Nouv. Ann. X, 352. —

3. Auf einem Kreise sind zwei Punkte M und M' gegeben, von denen auf den Radius OA die Senkrechten MP und $M'P'$ gefällt sind. Zu beweisen, dafs das Verhältnis des Dreiecks MOM' und des Trapezes $MPP'M' = \frac{1}{2\cos\alpha^2}$ ist, wo α der Winkel ist, welchen MM' und OA bilden; oder wenn man $M'Q$ senkrecht MP fällt, so ist $\sphericalangle MM'Q = \alpha$.

(*184*) Mathesis. XIV, 603.

4. Gegeben sind zwei gleiche Kreise mit den Radien r; ihre Centrale sei $= c$; der eine Kreis ist durch n Punkte in n gleiche Teile geteilt. Man soll beweisen, dafs die Summe der Potenzen dieser Teilungspunkte in Bezug auf den anderen Kreis nc^2 ist.

(*587*) Nyt Tidsskrift. XXIV, 196.

5. In dem gegebenen Punkt P eines kreisförmigen Billards mit dem Mittelpunkt O befindet sich ein Ball; welchen Weg mufs er beschreiben, um wieder durch P zu gehen, nachdem er die Bande zweimal berührt hat?

(*185*) Math. Visitor. XIV, 604.

---

6. Zu beweisen, dafs $S = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$ ist.

(*393*) Journ. élém. XX, 351.

III. Sphärische Trigonometrie.

§ 8. Rechtwinklige sphärische Dreiecke.

1. In einem rechtwinklig-sphärischen Dreieck, dessen Katheten a und b mit den gegenüberliegenden Winkeln α und β sind und dessen Hypotenuse c ist, ist gegeben a) $\sin\alpha \sin a = p$ und $\sin\beta \sin b = q$; b) der Umfang und der Inhalt. Man soll die Seiten und Winkel finden.

(788) Fuhrmann XIX, 347. XX, 186.

2. Die Elemente eines rechtwinklig sphärischen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b sollen berechnet werden, wenn gegeben $2a + c = m$ und $2b + c = n$.

(1186) Fuhrmann XXIV, 190. XXIV, 605.

3. Dem ebenen rechtwinkligen Dreieck entspricht nicht nur das rechtwinklig sphärische Dreieck, sondern auch ein solches, in welchem ein Winkel gleich der Summe der beiden anderen ist. Ist in einem solchen Dreieck c die Seite, welche dem gröfsten Winkel gegenüberliegt, ϱ der Radius des Inkreises, ϱ_c der des zu c gehörenden Ankreises, h die Höhe, welche auf c die Segmente m und n bildet, so gelten folgende Relationen:

a) $2\operatorname{tg}\varrho = \sin a + \sin b - \sin c$;

b) $2\operatorname{tg}\varrho_c = \sin a + \sin b + \sin c$;

c) $\sin m \sin n = \operatorname{tg} h^2 \cos \frac{1}{2} c^2$;

d) $\operatorname{tg} m \operatorname{tg} n = \sin h^2 \cdot \frac{\cos a + \cos b}{2\cos a \cos b}$.

(890) Fuhrmann XX, 435. XXI, 192.

4. Bekanntlich gelten für das ebene rechtwinklige Dreieck die Sätze $c = \varrho_a + \varrho_b = \varrho_c - \varrho$, $a + b = \varrho_c + \varrho$, $a - b = \varrho_a - \varrho_b$, $\triangle = \varrho_a \varrho_b = \varrho_c \varrho$. Wie heifsen die entsprechenden Sätze für die Kugel?

(922) v. Schäwen XXI, 31. XXI, 425.

---

§ 9. Gleichseitige sphärische Dreiecke.

1. Im gleichseitigen sphärischen Dreieck bestehen zwischen r und ϱ, ϱ_c und ϱ, h und ϱ_c folgende Relationen

1) $\operatorname{tg} r = 2 \operatorname{tg} \varrho$ oder $\sin(2\varrho - r) = \sin r \sin \varrho^2$ oder $\sin(r + \varrho) = 3 \sin(r - \varrho)$,

2) $\operatorname{tg}(\varrho_c + \varrho) = 4 \operatorname{tg} \varrho$ oder $\sin \varrho_c = 3 \sin \varrho \cos(\varrho_c + \varrho)$ oder $3 \cot \varrho_c = \cot \varrho + 4 \operatorname{tg} \varrho$,

3) $\sin h \sin(\varrho_c + h) = 2 \sin \varrho_c \operatorname{tg} \varrho_c$ oder $(\cot \varrho_c - \cot h)(\cot \varrho_c + 2 \cot h) = 2$.

(243) v. Schäwen XIII, 283. XIV, 189.

---

§ 10. Schiefwinklige sphärische Dreiecke.*)

1. ABC ist ein sphärisches Dreieck; der BC (in M) normal halbierende Hauptkreis schneidet die den Winkel A und dessen Nebenwinkel halbierenden Hauptkreise in D und D'. Von diesen Punkten fälle man auf AC und AB die normalen Hauptkreisbögen DE und $D'E'$, DF und $D'F'$. Man soll ohne Hinzufügung weiterer Punkte an dieser Figur

a) die Neper'schen Analogieen,

b) die Gaufs'schen Gleichungen (sämtliche vier direkt),

c) den Satz beweisen: „Wenn ein Winkel eines sphärischen Dreiecks festliegt, und die Summe oder Differenz der einschliefsenden Seiten konstant bleibt, so liegen die Mitten der drei Seiten je auf einem bestimmten Hauptkreis."

(39) Lieber und v. Lühmann VII. 49. Vergl. Baltzer: Elemente, Trig. § 5, 10.

2. Wenn in einem sphärischen Dreieck $\sphericalangle \gamma = 60^0$ ist, so ist $\sin\alpha \sin\beta = \frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin c^2}$, wo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist.

(*461*) Mathesis. XXII, 28.

3. Gegeben sind zwei Seiten b und c eines sphärischen Dreiecks ABC, dessen Winkel α gleich der Summe der Winkel β und γ ist. Zu beweisen, dafs diese Winkel bestimmt sind durch $\cos\alpha = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}b \operatorname{tg}\frac{1}{2}c$ und $\sin\frac{1}{2}b \cot\beta$

$$= \sin\tfrac{1}{2}c \sqrt{\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b-c)}.$$

(*186*) Educ. Times. XIV, 604.

---

*) Vergl. Günther: Die merkwürdigen Linien im sphärischen Dreieck XI, 421—427 und Günther: Versuch einer schulgemäfsen Behandlung von den Kreisen des sphärischen Dreiecks XVII, 241—294.

4. Im sphärischen Dreieck ist

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\sin(\beta-\gamma)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\sin\beta-\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\sin\gamma;\ \text{also}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\sin(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\sin(\gamma-\alpha)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\sin(\alpha-\beta)=0.$$

(556) Kober XVI, 593. XVII, 358.

5. ABC sei ein sphärisches Dreieck mit den Winkeln α, β γ; O sei der Mittelpunkt des Umkreises von ABC, AD der Bogen, welcher diesen kleinen Kreis in A berührt. Dann ist zu beweisen, daſs $\sphericalangle BAD$ gleich ist dem Winkel γ im entgegengesetzten Abschnitt weniger dem halben sphärischen Exceſs des Dreiecks.

(*301*) Educ. Times. XVII, 368.

6. In einem sphärischen Dreieck, dessen Winkelsumme gleich vier Rechten ist, seien A', B', C' die Mittelpunkte der Seiten und S sei der Schnittpunkt von AA', BB', CC'; dann ist

a) $SA=180^0-a$ und $SA'=\frac{1}{2}a$.

b) $\sphericalangle BSC=\alpha$ und die Summe der Winkel des Dreiecks $BSC=2\alpha$, so daſs $\sphericalangle SBC+SCB=BSC$.

c) Das an BC anliegende Nebendreieck von BSC ist kongruent ABC und das an BC anliegende Nebendreieck von ABC ist kongruent BSC.

(1007) Stoll XXII, 26. XXII, 432.

7. Sind A', B', C' die Seitenmitten des sphärischen Dreiecks ABC und ist S der Schnittpunkt von AA', BB', CC', so hat man:

a) $\cos SA+\cos SB+\cos SC=\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}$;

b) $\sin SA':\sin AA'=\sin SB':\sin BB'=\sin SC':\sin CC'$ $=1:\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}$.

(1006) Stoll XXII, 26. XXII, 430.

8. In einem beliebigen sphärischen Dreieck ABC werde die Transversale AA' gezogen, welche die Fläche in zwei gleiche Teile teilt; dieselbe soll berechnet werden. Es ergiebt sich z. B.

$$\cos AA'=$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a(4\cos\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2-\cos\frac{1}{2}b^2-\cos\frac{1}{2}c^2)+2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c(\cos\frac{1}{2}b^2+\cos\frac{1}{2}c^2-1}{\cos\frac{1}{2}a(\cos\frac{1}{2}b^2+\cos\frac{1}{2}c^2+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c)}$$

9. Auch gilt die Formel:

$$\sin a\cos AA'=\cos b\sin BA'+\cos c\sin A'C.$$

(293—294) Fuhrmann XIV, 192. XIV, 592.

10. Wenn die Mittellinien $AL=t_a$, $BM=t_b$ und $CN=t_c$ eines sphärischen Dreiecks mit den Seiten a, b, c die Winkel λ, μ, ν bilden, so ist zu beweisen, daſs

$$\frac{\cot\lambda}{\cos\frac{a}{2}(\cos b - \cos c)} = \frac{\cot\mu}{\cos\frac{b}{2}(\cos c - \cos a)} = \frac{\cot\nu}{\cos\frac{c}{2}(\cos a - \cos b)}$$

ist.

(*302*) Mathesis. XVII, 526.

11. Ist S der Durchschnittspunkt der Mittellinien AA' u. s. w. des sphärischen Dreiecks ABC, P ein beliebiger Punkt der Kugel, so ist

$$\cos PA + \cos PB + \cos PC$$
$$= \frac{\cos PS \sin CC'}{\sin C'S} = \frac{\cos PS \sin AA'}{\sin A'S} = \frac{\cos PS \sin BB'}{\sin B'S}.$$

(*462*) Mathesis. XXII, 28.

12. Schneiden sich die Höhen AA', BB', CC' des sphärischen Dreiecks ABC in H, so ist

$$\operatorname{tg} AH \cdot \operatorname{tg} HA' = \operatorname{tg} BH \cdot \operatorname{tg} HB' = \operatorname{tg} CH \cdot \operatorname{tg} HC';$$

der konstante Wert dieser Produkte ist gleich $\frac{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{\cos a \cos b \cos c} M^2$, wo mit $M = \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$ der Modul des Dreiecks bezeichnet wird.

(996) Stoll XXI, 591. XXII, 346.

13. a) In einem sphärischen Dreieck, dessen Modul

$$M = \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = 1$$

ist, sind zwei Winkel β und γ bzw. gleich den gegenüberliegenden Seiten b und c, der dritte Winkel α aber ist das Supplement der gegenüberliegenden Seite a; ist α stumpf, so sind β und γ entweder zugleich spitz oder zugleich stumpf; ist aber α spitz, so ist entweder β spitz und γ stumpf oder umgekehrt. b) In einem solchen Dreieck ist der obere Abschnitt einer jeden Höhe gleich dem Komplement des unteren Abschnitts.

(997) Stoll XXI, 591. XXII, 347.

14. Zu beweisen, dafs, wenn r und ϱ die Radien der einem sphärischen Dreieck um- und eingeschriebenen Kreise und δ die Entfernung der Mittelpunkte dieser Kreise bezeichnen, die Relation gilt: $\sin\delta^2 = \sin r^2 \cos\varrho^2 \mp 2 \sin r \cos\varrho \cos r \sin\varrho$, wo das obere Zeichen für den Inkreis, das untere für den Ankreis zu nehmen ist. Diese Relation entspricht der bekannten für das ebene Dreieck von Euler gefundenen: $\delta^2 = r^2 \mp 2r\varrho$, in welche sie übergeht, wenn man den Radius der Kugel unendlich grofs werden läfst.

(302) Stoll XIV, 271. XV, 34—36.

15. In jedem sphärischen Dreieck, dessen Seiten nicht alle einander gleich sind, ist $2 \operatorname{tg} \varrho < \operatorname{tg} r$, wo ϱ der Radius des Inkreises, r der des Umkreises ist.

(670) Emmerich XVIII, 197. XVIII, 594.

---

§ 11. Sphärische Vierecke.

1. In dem sphärischen Viereck $ABA'B'$ schneiden sich AB' und BA' verlängert in C, AB und $A'B'$ verlängert in C'. Werden nun die Winkel bei A, B, C, A', B', C' bew. mit α, β, γ, α', β', γ' und AA', BB', CC', mit a, b, c bezeichnet, so ist $\sin\alpha \sin\alpha' \cos a + \sin\beta \sin\beta' \cos b + \sin\gamma \sin\gamma' \cos c = 0$.

(*465*) Mathesis. XXII, 29.

2. Die Seiten eines sphärischen Vierecks $ABCD$ seien a, b, c, d, die Diagonalen AC und BD bzw. e und f, und der Diagonalenwinkel $AEB = \varepsilon$. Dann ist $\sin e \sin f \cos\varepsilon = \cos a \cos c - \cos b \cos d$.

(*466*) Mathesis. XXII, 29.

---

§ 12. Anwendungen.

1. Sind α und δ Rektascension und Deklination, l und λ Länge und Breite eines Sterns, so ist die Schiefe ε der Ekliptik gegeben durch die Gleichung $\cos\varepsilon = \frac{\sin\lambda \operatorname{tg} l + \sin\delta \operatorname{tg}\alpha}{\sin\lambda \operatorname{tg}\alpha + \sin\delta \operatorname{tg} l}$.

(*460*) Educ. Times. XXII, 27.

2. Zwei Orte A und B an den Küsten des pacifischen Ozeans haben dieselbe Breite und die gegebene Längendifferenz λ. Unter welcher Breite müssen dieselben liegen, damit der Unterschied zwischen den beiden verbindenden Bogen eines gröfsten Kreises und ihres Parallelkreises ein Maximum werde? Beispiel: $\lambda = 120^0$.

(1148) Stoll XXIII, 511. XXIV, 265.

3. Auf dem pacifischen Ozean fährt ein Schiff von einem Orte A auf dem kürzesten Wege nach einem Orte B von derselben geographischen Breite (Nordhalbkugel). Wenn nun die Längendifferenz beider Orte λ beträgt, wie weit wird sich das Schiff auf seinem Kurs von dem Parallelkreise beider Orte nach Norden zu entfernen und wie grofs mufs die geographische Breite von A und B sein, damit diese Abweichung ein Maximum erreiche? Beispiel: $\lambda = 120^0$.

(1149) Stoll XXIII, 511. XXIV, 266.

4. Auf einer Kugelfläche sind zwei kleine Kreise mit den Radien r und r' konstruiert, welche sich von aufsen berühren; t sei die Länge des Bogens eines gröfsten Kreises, welcher beide berührt; dann ist $\sin \frac{1}{2} t = \sqrt{\operatorname{tg} r \cdot \operatorname{tg} r'}$.

(*463*) Mathesis. XXII, 28.

5. Sind r und r' die Radien zweier kleinen Kugelkreise, welche sich äufserlich berühren und noch einen gröfsten Kugelkreis in A und A', und ist x der Radius eines Kreises, welcher die drei Kreise berührt und zwar den gröfsten Kugelkreis in B, so ist $\cot x = \sqrt{\cot x \cdot \cot r - 1} + \sqrt{\cot x \cdot \cot r' - 1}$.

(*464*) Mathesis. XXII, 29.

D.

Stereometrie.

I. Lehrsätze.

§ 1. Die Lage einer Geraden zu einer Ebene.

Die dreiseitige Ecke.

1. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seite a, dessen Diagonalen sich in E schneiden; auf der Ebene desselben errichtet man die Senkrechten AK und CL, und bestimmt auf diesen resp. die Punkte A' und C' so, dafs $A'E = a$ und $A'C' = 2a$ ist. Es soll bewiesen werden, dafs $A'C' \perp$ Ebene BDA' ist.

Beweis: (R.).

(*243*) Journ. élém. XVI, 31.

2. Die Projektionen zweier Geraden auf die XY-Ebene bilden mit der X-Achse die Winkel φ bez. φ', die auf die XZ-Ebene mit derselben Achse die Winkel ψ und ψ'. Damit die Geraden einen rechten Winkel mit einander bilden, mufs zwischen den Tangenten die Beziehung $1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi' + \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\psi' = 0$ bestehen.

Beweis: (K. M.); (G. T.).

(1323) Steinert XXV, 513. XXVI, 275.

---

3. Jede Ebene senkrecht zu einer Kante einer dreikantigen Ecke $SABC$, deren einer Flächenwinkel SC ein rechter ist, schneidet die Ecke in einem rechtwinkligen Dreieck.

Beweis: (G.).

(*118*) Journ. élém. XIII, 288.

4. Wird eine dreiseitige Ecke O, deren Seiten rechte Winkel sind, durch eine schräge Ebene geschnitten, so ist der Schnitt ein spitzwinkliges Dreieck.

Beweis: (G. T.)

(*661*) Nyt Tidsskrift. XXV, 354.

---

§ 2. Von den Polyedern*), dem Kegel und der Kugel.

a. Der Würfel.

1. Von einem Punkt M der Inkugel eines Würfels mit der Kante $2a$ sieht man die vier Diagonalen AA', BB', CC', DD' desselben unter den Winkeln α, β, γ, δ; dann ist $\operatorname{tg}\alpha^2 + \operatorname{tg}\beta^2 + \operatorname{tg}\gamma^2 + \operatorname{tg}\delta^2 = 8$.**)

Beweis: (G. T.) mit Hilfe (R. K.)

(*477*) Mathesis. XXII, 202.

2. Die Horizontalprojektion eines Würfels, von welchem eine Seitenfläche horizontal liegt, ist ein Quadrat $ABCD$; stellt man dagegen eine Diagonale desselben Würfels vertikal, so besteht der Contour der Horizontalprojektion des Körpers aus einem regelmäfsigen Sechseck $EFGHIK$, dessen Inkreis gleich ist dem Umkreise des vorigen Quadrats. Demzufolge läfst sich das Quadrat so in das Sechseck einsetzen, dafs die Umfänge beider Figuren keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, dafs mithin die Differenz beider Flächen eine ringförmig geschlossene Fläche ist. Denkt man sich den Würfel in seiner zweiten Lage vertikal so durchbohrt, dafs $ABCD$ die Horizontalprojektion der Öffnung ist, so hat man den Satz: „Ein Würfel kann durch einen ihm kongruenten Würfel so hindurch gesteckt werden, dafs der von letzteren übrig bleibende Rest einen allseitig zusammenhängenden ringförmigen Körper bildet. Es fragt sich nun, ob die genannte Eigenschaft des Würfels nur diesem oder auch anderen regulären bezw. unregelmäfsigen Körpern zukommt. (Müttrich: Sammlung stereom. Aufg.)

(672) Schlömilch XVIII, 197. —

---

*) Vergl. Heilermann: Die fünf regelmäfsigen Vielkante, deren Seiten Winkel eines regulären Vielecks sind. IX, 186—188.

**) Ist O der Mittelpunkt des Würfels und werden $\sphericalangle MOA$, MOB, MOC, MOD, resp. mit α_1, β_1, γ_1, δ_1 bezeichnet, so ist

$$\cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma_1{}^2 + \cos\delta_1{}^2 = \frac{4}{3} \text{ und } \sin\alpha_1{}^2 + \sin\beta_1{}^2 + \sin\gamma_1{}^2 + \sin\delta_1{}^2 = \frac{8}{3}.$$

Der entsprechende planimetrische Satz lautet:

Sind φ_1, $\varphi_2 \cdots \varphi_n$ die Winkel, unter welchen man von irgend einem Punkt M eines Kreises (Radius a) die Durchmesser A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, $\cdots\; A_nA_{2n}$ sieht, welche durch die gegenüberliegenden Ecken eines in einen koncentrischen Kreis (O, r) beschriebenen regulären Polygons $A_1A_2 \cdots A_{2n}$ gehen, so ist $\Sigma \operatorname{tg}\varphi_1{}^2 = \frac{2nk^2}{(k^2-1)^2}$, wo $k = \frac{r}{a}$.

Beweis: (G. T.). XXII, 203.

b. Das Tetraeder, die Pyramide und das Oktaeder.

3. Die mittelsenkrechten Ebenen der Kanten eines Tetraeders bilden die Ebenen eines vollständigen Vierkants. Die Diagonalen des Vierkants stehen

a) auf den Verbindungslinien der Mitten der Gegenkanten des Tetraeders senkrecht,

b) bilden sie den Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von zwei Ecken des Tetraeders gleich der Summe der Quadrate der Entfernungen von den beiden anderen ist.

Beweis: (G.), zum Teil (R.).

(879) THIEME XX, 350. XXI, 113.

4. Wenn man auf den Kanten OA, OB, OC des Tetraeders $OABC$ die Punkte A', B', C' so wählt, dafs $OA' : OB' : OC' = OA : OB : OC$ ist, dann aus den Kanten OA', OB, OC einen Spat konstruiert, desgleichen aus OB', OC, OA und OC', OA, OB, und die Gegenecken von O in diesen Spaten mit A, bezw. B und C verbindet, so schneiden sich diese drei Verbindungslinien in einem Punkte, der auf der von der Ecke O ausgehenden Schwerpunktstransversale liegt.

Beweis: (G. 2) und (K. M.).

(880) HAHN XX, 350. XXI, 113.

5. Wenn man die Kanten OA, OB, OC des Tetraeders $OABC$ in den Punkten A', B', C' nach demselben Verhältnis $\lambda = OA' : OA$ teilt und diese Teilpunkte mit den Mitten der gegenüberliegenden Kanten verbindet, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem Punkt, der auf der von O ausgehenden Schwerpunkstransversale liegt.

Beweis: (G. 2).

(891) HAHN XX, 435. XXI, 193.

6. Wenn man die oberen Abschnitte von vier durch einen Punkt O gezogenen Ecktransversalen eines Tetraeders $ABCD$ nach demselben Verhältnis teilt und die erhaltenen Teilpunkte A', B', C', D' mit den Schwerpunkten S_a, S_b, S_c, S_d der gegenüberliegenden Tetraederflächen verbindet, so gehen diese vier Verbindungslinien durch einen Punkt, der auf der Verbindungslinie des Schwerpunktes und des Schnittpunktes der Ecktransversalen liegt.*)

---

*) Besonderer Fall: Man suche auf der Umkugel um M eines Tetraeders den jedem Punkt diametral gegenüberliegenden Punkt und verbinde ihn mit dem Schwerpunkt der entsprechenden Tetraederfläche; dann gehen diese vier Geraden durch einen Punkt P von MS (Schwerpunkt des Tetraeders) und P teilt MS äufserlich im Verhältnis $1 : 8$.

BÜCKING.

Beweis: (G.); (P. L.); (K. M.) und durch Bestimmung des Schwerpunktes eines Massensystems.

(892) Hahn XX, 510. XXI, 270.

7. Konstruiert man aus einem Tetraeder einen Spat, so trifft die Diagonale des Spats, welche vom Scheitel der gemeinsamen dreiseitigen Ecke beider Körper ausgeht, die der Ecke gegenüberliegende Seite des Tetraeders in ihrem Schwerpunkte.

Beweis: (G.) und (K. M.).

(972) Thieme XXI, 428. XXII, 191.

8. Wenn sich in einem Tetraeder $ABCD$ zwei gegenüberliegende Kanten AC und BD rechtwinklig kreuzen, so ist $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ und umgekehrt.*)

Beweis: (G.).

(*117*) Journ. élém. XIII, 287.

9. Zieht man von den Ecken eines gleichflächigen Tetraeders $ABCD$ durch einen Punkt P desselben Gerade, welche die gegenüberliegenden Seitenflächen in A', B', C', D' schneiden, so ist $\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} + \frac{PD'}{DD'} = 1$.

Beweis: (G.). Vergl. Nr. 10.

(*468*) Educ. Times. XXII, 30.

10. Zieht man von den Ecken eines Tetraeders $ABCD$, dessen Seitenflächen kongruent sind, durch einen innerhalb desselben liegenden Punkt P Gerade, welche die gegenüberliegenden Seitenflächen in A', B', C', D' treffen, so ist

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} + \frac{PD'}{DD'} = 1.$$

Beweis: (G.).

(*660*) Nyt Tidsskrift. XXV, 354.

11. Wenn man durch die Ecken eines Tetraeders $ABCD$ vier parallele Gerade zieht, welche die den Ecken gegenüberliegenden Flächen in A', B', C', D' treffen, so ist der Inhalt des Tetraeders $A'B'C'D'$ gleich dem dreifachen Inhalt von $ABCD$.

Beweis: (G.).

(*469*) Educ. Times. XXII, 198.

12. Im Tetraeder $ABCD$ sind die beiden gegenüberliegenden Kanten AB und $CD = a$; jede der anderen Kanten ist $= b$. Ist nun E der Mittelpunkt von AB und F der von CD, so soll

a) bewiesen werden, dafs der Mittelpunkt O der Umkugel EF halbiert;

---

*) Wenn sich AC und BD, sowie AB und DC rechtwinklig kreuzen, so thun dies auch AD und BC.

b) die Radien r und ϱ der Um- bezw. Inkugel und das Volumen v des Tetraeders sind zu berechnen.

Beweis: a) (G.); b) (R.) $r = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2 + 4b^2}$; $\varrho = \frac{a\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{4\sqrt{4b^2 - a^2}}$; $v = \frac{1}{12}a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}$.

(*470*) Nyt Tidsskrift. XXII, 199.

13. Enthält eine Ecke eines Tetraeders drei rechte Winkel, so trifft der Radius der Umkugel, welcher nach dem Scheitel dieser Ecke geht, die der Ecke gegenüberliegende Seite des Tetraeders in ihrem Schwerpunkt.

Beweis: (G.) und (K. M.).

(971) Thieme XXI, 428. XXII, 190.

14. Ist das Centrum der einem Tetraeder eingeschriebenen Kugel identisch mit demjenigen der umgeschriebenen, so sind die vier Begrenzungsdreiecke des Tetraeders einander kongruent.*)

Beweis: (G. 4).

(475) Schmidt XVI, 124. XVI, 422.

15. Dasselbe gilt von einem Tetraeder, dessen Monge'scher Punkt (in welchem sich die durch die Halbierungspunkte der Kanten senkrecht zu den Gegenkanten gelegten Ebenen schneiden), mit dem Centrum der eingeschriebenen Kugel zusammenfällt. (Vergl. vor. Satz.)*)

Beweis: (G.).

(476) Schmidt XVI, 124. XVI, 423.

16. (Im Anschlufs an die beiden vorigen Sätze.) Wenn man durch je zwei gegenüberliegende Kanten eines Tetraeders mit kongruenten Grenzflächen parallele Ebenen legt, so entsteht ein rechtwinkliges Parallelepipedon, von dem diejenigen Ecken, welche nicht zugleich Ecken des Tetraeders sind, die Mittelpunkte der vier Ankugeln des Tetraeders sind.

Beweis: (G. 3).

(564) Stoll XVI, 564. XVII, 364.

---

*) Die Gegenkanten des Tetraeders sind paarweise gleich, die vier Höhen sind gleich und jedes das Vierfache vom Radius der Inkugel.

Der Schwerpunkt, der Mittelpunkt der Um- und Inkugel und der Monge'sche Punkt des Tetraeders fallen zusammen.

Konstruiert man ein Tetraedernetz mit dem Dreieck ABC in der Mitte und den Ecken D_a, D_b, D_c und ist H_d der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $D_aD_bD_c$, so ist H_d der Fufspunkt der Tetraederhöhe aus D. Ist H der Höhenschnittpunkt, S der Schwerpunkt von ABC, so ist $HSD'H_d$ (D' Berührungspunkt der Inkugel mit der D gegenüberliegenden Tetraederfläche) eine harmonische Reihe und D' halbiert HH_d.

17. Zu beweisen, dafs, wenn man in einem regulären Tetraeder $BCDE$ durch eine Kante $BC = a$ und die Mitte A der gegenüberliegenden Kante DE eine Ebene legt, der entstandene Schnitt das Salomon'sche Dreieck (ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhenschnittpunkt H in der Mitte der Höhe AF auf die Grundlinie liegt,) ist und dafs der untere Höhenabschnitt der anderen Höhe Radius der Inkugel ist.

Beweis: (G. T.).

(1173) Höttermann XXIV, 103. XXIV, 451.

18. Projiziert man ein Tetraeder $ABCD$ von einem Punkt P der Verbindungslinie MN der Mitten M und N zweier Gegenkanten AD und BC auf eine Ebene, welche diesen Gegenkanten parallel ist, so erhält man ein Parallelogramm.

Beweis: (G.).

(804) Thieme XIX, 509. XX, 192 (793 statt 804).

19. Legt man durch eine Gerade, welche ein Gegenkantenpaar eines Tetraeders trifft, ein Büschel von Ebenen, so schneiden diese das Tetraeder in Vierseiten mit einer gemeinsamen Diagonale, welche zwei Diagonalpunkte der Vierseite enthält; der geometrische Ort für den dritten Diagonalpunkt ist eine Gerade, welche ebenfalls jenes Gegenkantenpaar trifft.

Beweis: (G.) und (K. M.).

(803) Thieme XIX, 430. XX, 269 (809 statt 803).

20. Die vier Ebenen eines Tetraeders und die vier Ebenen, welche die Ecken des Tetraeders mit einer beliebigen Geraden α des Raumes verbinden, treffen alle Geraden β, die von den Ebenen des Tetraeders in demselben Doppelverhältnis wie α geschnitten werden, in vier Paaren einer Involution. (Analogon des Satzes: Die Seiten eines vollständigen Vierecks schneiden eine beliebige Gerade der Ebene in drei Paaren einer Involution.) Ein elementarer Beweis wird gewünscht.

(1139) Thieme XXIII, 430. —

21. In einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche ein spitzwinkliges Dreieck ABC ist, während die Seitenflächen rechtwinklige Dreiecke sind und die Scheitelpunkte der rechten Winkel an der Spitze O zusammenstofsen, ist das Quadrat der Grundfläche gleich der Summe der Quadrate der Seitenflächen.

Beweis: (R. 3) und (G. T.).

(910) Sievers XX, 594. XXI, 349.

---

22. a) Es sei $ABCD$ ein Viereck, E der Durchschnitt von AC und BD, F der von AB und CD, G der von BC und DA, mithin FG die dritte Diagonale. Wird nun $ABCD$ zur Basis einer

Pyramide genommen und letztere von einer Ebene geschnitten, welche FG in sich enthält, wobei den Punkten A, B, C, D die Schnittpunkte A', B', C', D' entsprechen, so gehen die vier Gegen-Diagonalen des entstandenen Pyramidenstumpfes, nämlich AC', BD', CA', DB' durch einen und denselben Punkt P.

b) Dreht sich die Schnittebene um FG, so durchläuft P die Gerade EO, wo O die Spitze der Pyramide ist.

c) Insofern A', B', C', D' als die perspektivischen Projektionen von A, B, C, D betrachtet werden können, läfst sich dieser Satz als eine Eigenschaft projektivischer Gebilde auffassen; es entspricht ihm dann ein reciproker Satz, welcher formuliert werden soll

Beweis: (G.).

(256—258) Schlömilch XIII, 365. XIV, 268.

23. Schneiden sich in einem (durch vier von einem Punkt S ausgehenden Geraden SA', SB', SC', SD' und deren Verbindungslinien gebildeten) Vierkant zwei Gegenebenen rechtwinklig, so liegen die Fufspunkte der Lote, welche man von einem Punkte M der Schnittlinie auf die vier übrigen Vierkantsebenen fällen kann, auf einem Kreise.

Beweis: (G. 2).

(708) Thieme XVIII, 446. XIX, 183.

---

24. Schneiden sich die drei Diagonalen eines Polyeders von oktaedrischer Form in einem Punkte D und unter rechten Winkeln, so liegen die acht Fufspunkte der von D auf die Seitenflächen gefällten Perpendikel auf einer Kugelfläche. (Steiner.)*)

Beweis: (P. L.).

(709) Thieme XVIII, 446. XIX, 184.

25. Verbindet man in einem Oktaeder die Schwerpunkte von je zwei einander gegenüberliegenden Dreiecksflächen miteinander, so gehen die vier Verbindungslinien durch einen Punkt R, welcher mit dem Schnittpunkt O der drei Achsen und dem Schwerpunkt S des Oktaeders in einer Geraden liegt, so dafs $OR : RS = 2 : 1$ ist.

Beweis: (G. und P. L.); (R. 2).

(846) Hahn XX, 116. XX, 509.

c. Der Kegel und die Kugel.

26. Die folgende Konstruktion für den Schwerpunkt S eines geraden Kreiskegels (Achsenschnitt ABC) zu beweisen: Man teile

---

*) Zusätze: 1) Die Lote treffen auch die Gegenebenen in Punkten derselben Kugel. 2) Läfst sich um das Oktaeder eine Kugel beschreiben, so liegen aufser den acht Fufspunkten der Lote auch die Schwerpunkte der Seiten auf einer Kugel, Thieme.

die Seiten CA und CB in P und Q im Verhältnis $3:2$, also $CP:PA = CQ:QB = 3:2$, so schneiden sich AQ und BP in S.*)

Beweis: (R.).

(*245*) Educ. Times. XVI, 32.

27. Die Lote, welche man von einem Punkte der Höhe eines schiefen Kreiskegels auf die Geraden des Kegels fällen kann, haben ihre Fufspunkte in einem Kreise. (Wechselschnitt.)

Beweis: (G.) und (K. M.).

(671) Thieme XVIII, 197. XVIII, 594.

28. Im Polarsystem der Kugeln sind je zwei konjugierte Strahlen rechtwinklig zu einander gerichtet.

Beweis: (G.).

(935) Kober XXI, 116. XXI, 518.

II. Aufgaben.

§ 3. Konstruktionsaufgaben.**)

1. Gegeben sind drei beliebige Kreise im Raum; man soll einen vierten Kreis konstruieren, der mit jedem der gegebenen zwei Punkte gemeinsam hat.

Lösung: (G.).

(*316*) Mathesis. XVIII, 199.

2. Gegeben ist ein Punkt P_1 in einer Ebene E_1 und ein Punkt P_2 in einer Ebene E_2. Man suche den kürzesten auf E_1 und E_2 verlaufenden Weg von P_1 nach P_2.

Lösung: (G.).

(1187) Thieme XXIV, 190. XXIV, 605.

3. Gegeben n Ebenen $E_1, E_2, \cdots E_n$, ein Punkt P_1 in E_1 und ein Punkt P_n in E_n. Man suche den kürzesten der Reihe nach in $E_1, E_2, \cdots E_n$ verlaufenden Weg von P_1 nach P_n.

Lösung: (G.).

(1188) Thieme XXIV, 190. XXIV, 606.

---

4. Ein senkrechtes dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche auf der Horizontalebene liegen mag, in ein anderes zu verwandeln,

*) Der Satz gilt auch für gerade Kegel mit elliptischer Basis.

**) Vergl. Thieme: Die stereometrischen Konstruktionsaufgaben XXIII, 561—569 und den Zusatz des Herausgebers der Zeitschrift XXIII, 569—572.

so dafs die Deckfläche ein Dreieck werde mit der gegebenen Seite a und für welche $b:c=p:q$ werde.

Lösung: (G.).

(1283) Bökle XXV, 193. XXVI, 25.

5. Ein gleichflächiges Tetraeder $SABC$ zu konstruieren, wenn die Gerade, auf welcher die Kante SA liegt, gegeben ist, die durch SA parallel zu BC gelegte Ebene X, ein Punkt P auf BC und $\triangle LMN$, welches ähnlich ABC ist.

Lösung: (G.).

(*467*) Mathesis. XXII, 30.

6. Ein Tetraeder zu konstruieren aus 4 Punkten, die auf den oberen Abschnitten der Schwerpunkts-Transversalen liegen und dieselben nach gegebenen Verhältnissen teilen. (Für nichteuklidische Geometrie.)

Lösung: (G. 2) und (R.).

(224) Böklen XIII, 206. XIV, 91.

---

7. Zeichne das Netz der geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche, von welcher gegeben ist die Gesamtoberfläche $=m^2$ und entweder die Höhe gleich h oder die Seitenkante $=s$ oder der Radius der Inkugel $=\varrho$.

Lösung: (G.) zum Teil (R.).

(668) v. Schäwen XVIII, 133. XVIII, 592.

8. Das Netz einer gleichseitigen dreiseitigen Ecke aus ihrer Höhe (dem Winkel einer Kante mit der gegenüberliegenden Seite) zu konstruieren.

Lösung: (G. T.) und (G.).

(1052) Thieme XXII, 352. XXIII, 122.

9. Das Netz einer dreiseitigen Ecke, deren Seiten zusammen 180^0 betragen, aus einer Seite a und einem anliegenden Winkel β zu zeichnen.

Lösung: (G.) und (G. T.).

(1053) Thieme XXII, 352. XXIII, 123.

10. Das Netz einer dreiseitigen Ecke, deren Seiten zusammen 180^0 betragen, aus einer Seite a und dem Gegenwinkel α zu zeichnen.*)

Lösung: (G.) und (G. T.).

(1054) Thieme XXII, 352. XXIII, 124.

---

*) Ist a, $b+c$, α gegeben, so bleibt die Lösung im wesentlichen ganz dieselbe. Emmerich.

11. Das Netz einer dreiseitigen Ecke aus deren Umfange $a + b + c$ und zwei Winkeln α und γ zu zeichnen.

Lösung: (G. T.) und (T. R.).

(1105) EMMERICH XXIII, 193. XXIII, 510.

---

12. Es sind zwei Ebenen P und P' gegeben, und ein Punkt A aufserhalb dieser beiden Ebenen; man betrachtet alle Kugeln, welche durch den Punkt A gehen, und welche die beiden gegebenen Ebenen berühren. 1) Den Ort der Geraden zu finden, welche den Punkt A mit dem Mittelpunkt der veränderlichen Kugel verbindet; 2) den Ort des Punktes zu finden, in welchem diese Kugel die eine der Ebenen berührt.

(16_1) Nouv. Ann. X, 16. —

13. Eine Gerade AB von gegebener Länge dreht sich um ihre als fest angenommene Mitte O, so dafs die Verhältnisse $\frac{AC}{AD}$, $\frac{BC}{BD}$ der Entfernungen ihrer Endpunkte A und B von zwei festen Punkten C und D immer unter einander gleich sind; den durch diese Gerade erzeugten Ort zu finden.

(12_2) Nouv. Ann. X, 354. —

14. Man schneidet eine gegebene dreiseitige Pyramide $SABC$ durch eine Ebene parallel der Grundfläche; diese Ebene schneidet die Seitenkanten SA, SB, SC resp. in A', B', C'; man konstruiert darauf die Ebenen $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$; P sei ihr gemeinschaftlicher Punkt. Zu bestimmen den Ort, welcher durch den Punkt P beschrieben wird, wenn sich die Ebene $A'B'C'$ so bewegt, dafs sie parallel ABC bleibt.

(25_2) Nouv. Ann. XI, 110. —

15. Gegeben zwei sich schneidende Gerade SA und SB; durch SA legt man eine Ebene und durch SB eine zweite senkrecht zu der vorhergehenden; den Ort der Durchschnittslinien zu finden.

Lösung: (G.). Der Ort ist ein schiefer Kegel mit Kreisbasis.

(*119*) Journ. élém. XIII, 288.

16. Es ist eine Kugel mit dem Radius R gegeben; zu finden:

1) den Ort für den Scheitel einer dreiseitigen Ecke, deren Kanten Tangenten an diese Kugel sind, und in welcher jede der drei Seiten gleich 60^0 ist.

2) Den Ort für den Scheitel einer dreiseitigen Ecke, deren drei Seiten dieselbe Kugel berühren, und in welcher jeder der drei Flächenwinkel 120^0 beträgt.

(13_1) Nouv. Ann. X, 16. —

17. Gegeben Kugel K und eine Ebene aufserhalb derselben. Wenn man jeden Punkt der Ebene als Spitze eines Berührungskegels ansieht, dessen Basis also ein kleiner Kugelkreis ist, so ist der geometrische Ort der Mittelpunkte dieser kleinen Kreise zu finden.

Lösung: (H. B.). Der Ort ist eine Kugelfläche.

(*58*) Journ. élém. XII, 113.

18. Gegeben sind zwei Kreise (O, r) und (O', r') im Raume. Man soll den Ort eines Punktes S finden, welcher die gemeinschaftliche Spitze zweier über diesen Kreisen konstruierter ähnlicher Kegel ist.

Lösung: (G.). Der Ort besteht aus zwei Kreisen.

(*475*) Mathesis. XXII, 201.

19. Gegeben Kugel S, auf ihr Kreis C und im Raume zwei Punkte P und Q. Man soll C auf S so verschieben, dafs das Verhältnis der Entfernungen des Punktes P von dem nächsten und entferntesten Punkte der Peripherie gleich $1 : m$ und das Verhältnis der Entfernungen des Punktes Q von dem nächsten und entferntesten Punkte der Peripherie gleich $1 : n$ wird.

Lösung: (G.).

(622) Emmerich XVII, 447. XVIII, 194.

---

20. Gegeben ein beliebiges windschiefes Sechsseit und eine Gerade im Raume. In der Geraden einen Punkt so zu bestimmen, dafs, wenn daraus das Sechsseit auf eine beliebige Ebene projiciert wird, die Projektion ein Sechsseit bilde, in welches ein Kegelschnitt beschrieben werden kann.

Lösung: (G.) und (P. G.).

(178) Cardinaal XII, 363. XIII, 198.

21. Gegeben ein beliebiges windschiefes Sechsseit und eine Gerade im Raume. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene so zu konstruieren, dafs aus einem zu bestimmenden Punkte der Geraden die Projektion auf die Ebene ein Sechsseit sei, in welches ein Kreis beschrieben werden kann.

Lösung: (G.).

(179) Cardinaal XII, 363. XIII, 198.

22. Einen gegebenen elliptischen Cylinder (Halbachsen der Basis a und b) in einer der Gestalt und Gröfse nach gegebenen Ellipse (Halbachsen a_1 und b_1) zu schneiden.

Lösung: (R. K.) und durch sphärische Trigonometrie.

(244) Weinmeister XIII, 284. XIV, 189.

23. Gegeben zwei Ebenen E_1 und E_2 und eine dieselben in A_1 und A_2 schneidende Gerade. Ein Cylinder mit der Achse A_1A_2

durchdringe E_1 in einem Kreise und E_2 in einer Ellipse. Die Lage der Achsen der letzteren zu konstruieren, ohne den Cylinder oder eine seiner Schnittkurven zu benutzen.

Lösung: (G.).

(245) WEINMEISTER XIII, 284. XIV, 190.

---

§ 4. Berechnungen.*)

a. Würfel, Prisma und Prismatoid.

1. In einem Würfel, dessen Kante a ist, zieht man eine Diagonale AA'; darauf schneidet man den Körper durch eine zur Diagonale senkrechte Ebene und in der Entfernung d von der Ecke. 1) Man verlangt die Durchschnittsfigur, welche den verschiedenen Werten von d entspricht. 2) Man verlangt die Fläche des Schnittes und die Grenzen, zwischen welchen sie variiert, wenn sich die schneidende Ebene bewegt.

(*10*$_2$) Nouv. Ann. X, 354. —

2. Gegeben ist ein gerades Prisma, dessen Höhe h ist und dessen Grundflächen die gleichseitigen Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C_1$ (Seite $= a$) sind; man soll den Inhalt der Figur F berechnen, welche man erhält, wenn man das Prisma durch eine Ebene schneidet, welche durch die Mittelpunkte von drei paarweis zusammenstofsenden Kanten geht.

Lösung: $F = \frac{3}{16} a \sqrt{12 h^2 + 3 a^2}$.

(*663*) Nyt Tidsskrift. XXV, 355.

3. Ein gerades Prisma, dessen Basis ein gleichseitiges Dreieck (Seite a) ist, wird durch eine Ebene geschnitten, die von den Kanten die Längen p, q, r ($p > q > r$) abschneidet. Dann wird $\sphericalangle \varphi$, unter welchem die Grundebene geschnitten wird, bestimmt durch

$$\sin \varphi^2 = \frac{4(\operatorname{tg} \vartheta^2 - \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta_1 + \operatorname{tg} \vartheta_1{}^2)}{4(\operatorname{tg} \vartheta^2 - \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta_1 + \operatorname{tg} \vartheta_1{}^2) + 3},$$

---

*) Vergl. WEINMEISTER: Über die Körper, deren Schnittflächen parallel zu einer Ebene quadratische Funktionen ihres Abstandes sind. XVIII, 321—343, 401—417, 496. HÖFLER: Netz, Oberfläche und Kubikinhalt des Cylinderstutzes und der Kugel. XVIII, 1—26. LUCKE: Geometrisch anschaulicher Beweis, dafs die Cotes'sche Formel für Körper gilt, welche durch Umdrehung einer Kurve von der Gleichung $y = \sqrt{a^2 + bx + nx^2 + \frac{1}{c} x^3}$ um die x Achse entstanden sind, insbesondere für das Neiloid. XIX, 10—15.

wo ϑ und ϑ_1 die Winkel bezeichnen, unter welchen die Verbindungslinien der Ecke von p mit denen von q und r die Grundebene schneiden; oder $\cot\varphi^2 = \frac{3a^2}{2\{(p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2\}}$.*)

(158) Fuhrmann XII, 201. XIII, 30.

4. Die Fläche des gegebenen Dreiecks ABC sei f. In den Eckpunkten desselben werden auf seiner Ebene die Perpendikel p_1, p_2, p_3 errichtet, wodurch man ein neues Dreieck $A'B'C'$ erhält. Ist nun irgend ein Punkt D in der Ebene ABC so gegeben, daſs man die Flächen f_1, f_2, f_3 der Dreiecke BCD, ACD und ABD berechnen kann, so fragt es sich, wie lang ist das Perpendikel x, das man in D auf der Ebene ABC errichtet, bis zur Ebene $A'B'C'$? Besonderer Fall: D sei der Mittelpunkt des Inkreises von ABC.

Lösung: $x = \frac{f_1 p_1 + f_2 p_2 + f_3 p_3}{f_1 + f_2 + f_3}$ und im besonderen Fall $x = \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3}{a + b + c}$.

(742) Rulf XIX, 32. XIX, 425.

---

5. a) Die Grundfläche g eines Prismatoids von der Höhe h ist ein Parallelogramm von gegebenem Inhalt; die Projektion der Deckfläche auf die Grundfläche bildet jenes Parallelogramm, welches durch die Verbindung der Halbierungspunkte der Seiten entsteht.

b) Die Grundfläche eines Sphenisk (eines Prismatoids, dessen eine Grundfläche zu einer Kante zusammenschrumpft) ist ein Parallelogramm von gegebenem Inhalt; die Projektion der zur Grundfläche parallelen Kante auf die Grundfläche bildet eine Diagonale derselben. In welchen Abständen x von der Grundfläche liegen in beiden Fällen die Schwerpunkte der Körper?

Lösung: a) $x = \frac{9}{20} h$; b) $x = \frac{3}{8} h$.

(640) v. Jettmar XVII, 597. XVIII, 350.

6. Es soll der Inhalt V eines Prismatoids aus seiner Höhe h und zwei näher zu bestimmenden ebenen Schnittfiguren D_1 und D_2 angegeben werden, wenn letztere auf verschiedenen Seiten des Mittelschnitts und ihm im gleichen Abstande y parallel gelegen sind.

---

*) Ist die Basis ein beliebiges Dreieck mit den Seiten a, b, c, so wird $\operatorname{tg}\varphi^2 = \frac{a^2(p-q)(p-r) + b^2(q-r)(q-p) + c^2(r-p)(r-q)}{4\Delta^2}$.

(Kiehl).

Lösung: Ist M der Inhalt des Mittelschnitts, so ist

$$V = \frac{2\,Mh\,(12\,y^2 - h^2) + h^3\,(D_1 + D_2)}{24\,y^2},$$

also für $y = \frac{1}{6}\,h\sqrt{3}$ wird $V = \frac{1}{2}\,h\,(D_1 + D_2)$.

(649) WEINMEISTER XVIII, 36. XVIII, 437.

7. Gegeben ist ein Prismatoid mit den Grundflächen k und g, dem Mittelschnitt m, und der Höhe h; man soll eine der Grundfläche parallele Ebene legen,

a) so dafs dieselbe eine Schicht abschneidet, welche so grofs ist wie das über der Schnittfigur stehende gleich hohe Prisma.

b) welche den Körper und die Höhe in demselben Verhältnis teilt.

Lösung: a) $x = \frac{3\,(3\,k + g - 4\,m)}{8\,(k + g - 2\,m)}\,h$. b) $x = \frac{5\,k - g - 4\,m}{4\,(k + g - 2\,m)}\,h$.

(650) WEINMEISTER XVIII, 36. XVIII, 437.

8. Den Inhalt eines Prismatoids zu berechnen, dessen Höhe h, dessen eine Grundfläche ein Rhombus mit der Seite a und einem Winkel von 60^0 und dessen andere Grundfläche eine Strecke $= a$ ist, die mit ihren Endpunkten senkrecht über den Endpunkten der kleinen Diagonale des Rhombus liegt.

Lösung: Vol. $= \frac{1}{8}\,a^2 h\sqrt{3}$. (In d. Ztschr. fehlt h.)

(*658*) Nyt Tidsskrift. XXV, 352.

9. Die Endflächen eines Prismatoids sind ein regelmäfsiges Achteck $ABCDEFGH$ und ein Quadrat $IKLM$; die Seiten beider sind $= a$; die vier Seiten des Quadrats sind je einer Seite des Achtecks parallel, also $IK \parallel AB$, $KL \parallel CD$, $LM \parallel EF$, $MI \parallel GH$. In den Körper läfst sich eine Kugel konstruieren, welche die beiden Grundflächen und die rechteckigen Seitenflächen berührt. Zu berechnen

a) den Inhalt des Prismatoids;

b) die Oberfläche desselben;

c) die Winkel, welche die Seitenflächen mit den Grundflächen bilden;

d) den Radius der Umkugel.

Lösung: a) Vol. $= a^2 h\left(\frac{4}{3} + \sqrt{2}\right)$;

b) Obf. $= a^2\left(7 + 4\sqrt{2} + \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}\right)$.

c) Ist φ der Winkel, den eine rechtwinklige Seitenfläche, ψ der Winkel, den die dreieckige Seitenfläche mit der Grundfläche bildet, so ist $\cos\varphi = \sqrt{2} - 1$ und $\operatorname{tg}\psi = 2\sqrt{\sqrt{2} + 1}$;

d) $r = \frac{1}{4}\,a\sqrt{17 + 9\sqrt{2}}$.

(*659*) Nyt Tidsskrift. XXV, 353.

10. Das Volumen eines Körpers zu bestimmen, welcher von einem Kreise (M, r), einem ihm parallelen Polygon $ABCD \cdots = G$ und einem abwickelbaren Mantel eingeschlossen wird, wenn der Abstand des Polygons von dem Kreise h ist.

Lösung: Ist $2u$ der Umfang des Polygons, so ist

$$V = \frac{1}{3} h (G + \pi r^2 + ru).$$

(998) v. Jettmar XXI, 591. XXII, 348.

b. Tetraeder, Pyramide*), Pyramidenstumpf.

11. In jedem Dreieck ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$; $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a}$. Analog gelten für das Tetraeder, dessen Höhen h_1, h_2 h_3, h_4 sind und dessen Berührungskugeln die Radien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 haben mögen, die Relationen

$$1)\ \frac{2}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4};$$

$$2)\ \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4};$$

$$3)\ \frac{2}{h_n} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_n}.$$

(419) v. Schäwen XV, 441. XVI, 118.

12. Bezeichnet man den Radius des Umkreises eines Dreiecks mit r, die Entfernung seines Centrums von dem des Inkreises (Radius ϱ) mit d; von dem eines Ankreises (Radius ϱ_1) mit d_1, so bestehen bekanntlich die beiden Sätze $d^2 = r(r - 2\varrho)$ und $d_1^2 = r(r + 2\varrho_1)$. Die analogen Sätze für die gerade dreiseitige Pyramide lauten $d^2 = (r + \varrho)(r - 3\varrho)$ und $d_1^2 = (r - \varrho)(r + 3\varrho_1)$, für die gerade n-seitige Pyramide

$$d^2 = \left(r - \varrho + \sec\frac{\pi}{n}\right)\left(r - \varrho - \varrho \sec\frac{\pi}{n}\right)$$

und $$d_1^2 = \left(r + \varrho_1 - \varrho_1 \sec\frac{\pi}{n}\right)\left(r + \varrho_1 + \varrho_1 \sec\frac{\pi}{n}\right).$$

Beweis: (R.) und (G.).

(146) v. Schäwen XII, 110. XII, 428.

13. Ein regelmäſsiges Fünfeck, dessen Seite gleich a gegeben ist, sei durch die Diagonale von einem Eckpunkt aus in drei Teildreiecke zerlegt, und an die Seite des Fünfecks, welche die Basis des mittleren Dreiecks ist, sei ein gleichseitiges Dreieck

*) Vergl. § 5 Nr. 1 und 2.

gezeichnet. Man berechne das Volumen desjenigen Tetraeders, für welches die entstandene Figur das Netz bildet.

Res. $\frac{1}{24} a^3 (\sqrt{5} - 1)$.

(68) Reidt IX, 373. —

14. Man sucht die Flächenwinkel eines Tetraeders, dessen Netz ein gleichschenkliges Dreieck von der Art ist, dafs die Mittelsenkrechten der Schenkel die Basis im Verhältnis 1 : 3 teilen.

Lösung: Der Flächenwinkel an den kürzeren Kanten beträgt 60°, an der längeren Kante 90°.

(758) Emmerich XIX, 98. XIX, 508.

15. Im Tetraeder $ABCD$ stehen die gegenüberliegenden Kanten $AC = b$ und $BD = a$ aufeinander senkrecht und haben den Abstand h.

a) Zu beweisen, dafs die Fläche, in welcher das Tetraeder von einer mit AC und BD parallelen Ebene geschnitten wird, ein Reckteck ist.

b) Den Flächeninhalt F des quadratischen Schnittes zu berechnen.

c) Die Volumina der beiden Teile zu berechnen, in welche der letzte Schnitt das Tetraeder teilt.

Lösung: a) (G.). b) $F = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$; c) $\text{Vol}_1 = \frac{a^3bh(a+3b)}{6(a+b)^3}$; $\text{Vol}_2 = \frac{ab^3h(3a+b)}{6(a+b)^3}$.

(*662*) Nyt Tidsskrift. XXV, 354.

16. Man sucht die Kanten x, y, z eines gleichflächigen Tetraeders, wenn die Oberfläche f, der Radius r der Umkugel und

a) das Volumen v,

b) der Radius ϱ der Inkugel gegeben ist.

Lösung: x, y, z sind die Wurzeln einer kubischen Gleichung.

(667) Emmerich XVIII, 133. XVIII, 591.

17. In einem gleichflächigen Tetraeder sind die Kanten a, b und c gegeben. Dadurch sollen bestimmt werden

a) die Flächenwinkel α, β, γ;

b) der Radius ϱ der Inkugel;

c) der Abstand h eines Eckpunktes von seiner Gegenfläche;

d) die Winkel α_1, β_1, γ_1, unter welchen die Flächen von den Kanten geschnitten werden;

e) das Volumen v.

Lösung: a) $\cos \frac{1}{2} \alpha = \frac{a\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)}}{4\varDelta}$;

b) $\varrho = \frac{\sqrt{2(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}}{16\varDelta}$; c) $h = 4\varrho$;

d) $\sin\alpha_1 = \frac{h}{a}$; e) $v = \frac{4}{3}\varrho\Delta$, wo Δ der Inhalt einer Seitenfläche ist.

(845) Stegemann XX, 115. XX, 508.

18. Man sucht das Volumen eines gleichflächigen Tetraeders, wenn die Kantenwinkel α, β, γ und

a) der Radius ϱ der Inkugel,

b) der Radius r der Umkugel gegeben sind.

Lösung: a) $V = \frac{8}{3}\varrho^3 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$; b) $V = \frac{8}{3} r^3 \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\vartheta^3}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}}$, wo ϑ der Brocard'sche Winkel, also $1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cot\vartheta$ ist.

(759) Emmerich XIX, 187. XIX, 583.

19. Wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, unter welchen man die Kanten eines gleichflächigen Tetraeders vom Mittelpunkt der Umkugel aus sieht, v das Volumen und d der Durchmesser der Kugel ist, so ist $v = \frac{1}{3} d^3 \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

(744) Beyens XIX, 272. XX, 28.

20. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC, sein Mittelpunkt sei O und r der Radius des Umkreises; AO, BO, CO werden um dieselbe Strecke $x = OA' = OB' = OC'$ verlängert. V sei das Volumen des Tetraeders, dessen Grundfläche das gleichseitige Dreieck $A'B'C'$ ist und dessen Seitenflächen die gleichschenkligen Dreiecke $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ sind. Gesucht werden die Werte von x, für welche $V = \frac{3}{8}x^3$ ist.

Lösung: $x_1 = 2r$; $x_2 = -\frac{2}{3}r$.

(*333*) Journ. élém. XVIII, 360.

21. Man suche die Grundkante x eines Tetraeders mit gleichseitiger Basis, wenn die Seitenkanten e, f, g und das Volumen v gegeben sind.

Lösung: x wird bestimmt durch die Gleichung

$$x^6 - x^4(e^2 + f^2 + g^2) + x^2(e^4 + f^4 + g^4 - e^2f^2 - e^2g^2 - f^2g^2) + 144v^2 = 0.$$

(773) Emmerich XIX, 272. XX, 28.

22. Von den Kanten, die von der Spitze eines regulären Tetraeders ausgehen, schneidet man resp. die Längen p, q, r ab und legt durch die erhaltenen Endpunkte die Ebene. Für den Winkel, den diese Ebene mit der Grundebene bildet, gilt die Gleichung:

$$\cos\varphi^2 = \frac{A + 2B}{3(3A - 2B)}, \quad \text{wo } A = q^2r^2 + r^2p^2 + p^2q^2,$$
$$B = pqr(p + q + r).$$

(157) FUHRMANN XII, 201. XIII, 28.

23. Schneidet man ein reguläres Tetraeder durch eine beliebige Ebene senkrecht zu einer Fläche, die wir als Grundfläche annehmen, und bezeichnet die Winkel, welche die drei Schnittlinien auf den Seitenflächen mit der Schnittlinie der Grundfläche bilden, mit w_1, w_2, w_3, so ist $\operatorname{tg} w_1 + \operatorname{tg} w_2 + \operatorname{tg} w_3 = 0$ und $\operatorname{tg} w_1^2 + \operatorname{tg} w_2^2 + \operatorname{tg} w_3^2 = 12$.*)

(159) FUHRMANN XII, 201. XIII, 31.

24. Ein durch eine Grundkante BC eines regulären Tetraeders $OABC$ gelegter ebener Schnitt schneidet zunächst der Grundfläche ein neues Tetraeder ab, dessen Volumen ein Drittel des ganzen beträgt. Wie grofs ist der Winkel, welchen der Schnitt mit der Grundfläche bildet?

Lösung: Der Winkel beträgt $22^0 0' 5''$.

(*332*) Nyt Tidsskrift. XVIII, 360.

25. Durch einen in einer Kante eines regulären Tetraeders**) gegebenen Punkt soll eine Schnittebene so gelegt werden, dafs sowohl die Volumina als auch die Oberflächen der beiden Tetraederstücke sich wie $m : n$ verhalten.

Die Lösung führt auf quadratische Gleichungen mit 2 Unbekannten.

(488) v. SCHÄWEN XVI, 205. XVI, 497.

---

26. Herodot erzählt, von den Priestern erfahren zu haben, dafs der Inhalt jeder der vier dreieckigen Seitenflächen der Pyramide des Cheops dem Quadrate der Höhe gleichkomme, und der alte Geograph Strabo bemerkt, dafs die Höhe der grofsen Pyramide die Länge eines ägyptischen oder olympischen Stadions ausdrücke. Man berechne hiernach den Umfang der Grundfläche der Pyramide in solchen Stadien und vergleiche denselben mit dem Umfang eines Kreises, dessen Radius gleich der Höhe ist.

(63) REIDT IX, 372. XI, 30.

27. In einer vierseitigen Pyramide $O - ABCD$ seien a, b, c, d Mittelpunkte bez. von OA, OB, OC, OD und m, n, p, q Mittelpunkte bez. von AB, BC, CD, DA. Ein Prismatoid hat die Grundflächen $abcd$ und $mnpq$. Man soll das Verhältnis des

---

*) Die Formeln gelten für jedes gerade Tetraeder.

**) Weitere Aufgaben über das reguläre Tetraeder und die regulären Körper siehe A. § 9 Nr. 40—43.

Volumens v des Prismatoids zu dem Volumen V der Pyramide berechnen.

Lösung: $v = \frac{5}{8} V$.

(*657*) Nyt Tidsskrift. XXV, 352.

28. Eine Pyramide hat als Grundfläche das Quadrat $ABCD$ mit der Seite a; die eine Seitenfläche ADE ist ein gleichseitiges Dreieck und steht senkrecht auf der Grundfläche. Eine durch AD senkrecht zu BEC gelegte Ebene schneide letztere in FG. Gesucht wird das Verhältnis von a) FG und BC; b) der beiden Stücke, in welche die Pyramide durch die Ebene $AFGD$ geteilt wird.

Lösung: a) $3:7$. b) $15:34$.

(*664*) Nyt Tidsskrift. XXV, 356.

---

29. Aus den Grundflächen G und g einer abgestumpften Pyramide soll die den Grundflächen parallele Fläche B, welche von beiden gleich weit absteht, berechnet werden.

Lösung: $B = \frac{1}{4}\left(G + g + 2\sqrt{Gg}\right)$.

(*471*) Journ. élém. XXII, 200.

30. Gegeben ist eine Pyramide $S - ABCD$, deren Grundfläche ein Quadrat mit der Diagonale $2a$ ist; die Höhe SE der Pyramide sei h. Von A fällt man eine Senkrechte AK auf die gegenüberliegende Kante SC und legt durch AK die Perpendikularebene zu SC, welche SB in F und SD in G trifft. Gesucht wird das Volumen $ABCD$, $AFKG = V$.

Lösung: $V = \frac{2a^4(3h^2 - a^2)}{3h(h^2 + a^2)}$.

(*244*) Journ. élém. XVI, 32.

31. Auf den Seitenkanten SA, SB, SC einer durch die Grundfläche $ABC = G$ und die Höhe H gegebenen dreiseitigen Pyramide $SABC$ werden drei Punkte, A', B', C' mit den bezüglichen Höhen h_1, h_2, h_3 angenommen. Der Rauminhalt des schief abgeschnittenen Pyramidenstutzes P_x ist zu berechnen.

Lösung: $P_x = \frac{1}{3} G\left(h_1 + h_2 + h_3 - \frac{1}{H}(h_2h_3 + h_3h_1 + h_1h_2) + \frac{h_1h_2h_3}{H^2}\right)$.

(726) v. Miorini XVIII, 601. XIX, 339.

32. Bei der Kubatur eines dreiseitigen Antipyrami[...]denstutzes (Prismatoids, dessen Grundflächen gleichwendig ähnlich[...] Dreiecke sind) kommen die Grundflächen lediglich mit ihren In[...]halten und ihrem Brocard'schen Winkel zur Geltung.

Lösung: $V = \frac{1}{3} h\varDelta \left(1 + \lambda^2 + \lambda \frac{\sin(\omega + \varphi)}{\sin \omega}\right)$, wo $\varDelta$ der Inhalt der unteren, $\lambda^2 \varDelta$ der der oberen Grundfläche ist und φ der hohle Winkel, um den die obere gegen die untere Grundfläche gedreht erscheint.

(1151) Emmerich XXIII, 511. XXIV, 268.

c. Cylinder.*)

33. Zwei gleichgrofse senkrechte Cylinder vom Radius r sind so durch einander geschoben, dass ihre Achsen sich rechtwinklig kreuzen. Wie grofs ist die Oberfläche und das Volumen des beiden Cylindern gemeinschaftlichen Körperstücks?

Lösung: Obf. $= 16\, r^2$; Vol. $= \frac{16}{3} r^3$.

(53) Lieber IX, 202. (Müttrich: Samml. ster. Aufg.) IX, 286.

34. Ein gerader Cylinder und ein gerader Kegel mit Kreisbasis haben gleiche Oberflächen, gleiches Volumen und dieselbe Höhe h. Die Radien x und y der Grundflächen sind zu berechnen.

Lösung: $x = \frac{h(\sqrt{3} - 1)}{4}$, $y = \frac{h(3 - \sqrt{3})}{4}$.

(*116*) Nouv. Ann. XIII, 287.
(*667*) Mathesis. XXV, 357.

35. Wie grofs ist der Halbmesser r und die Höhe h eines Cylinders, der mit einem Würfel von der Kante 1 gleiche Oberfläche und gleichen Inhalt hat?

Lösung: $r_1 = 0{,}7132$, $h_1 = 0{,}6258$; $r_2 = 0{,}4007$, $h_2 = 1{,}9823$. (Kubische Gleichung.)

(1229) Sievers XXIV, 459. XXV, 275.

36. Ein cylindrisches Gefäfs, dessen Grundfläche den Radius r hat, ist bis zur Höhe h über der Grundfläche mit Wasser gefüllt; in dieses Gefäfs wird eine Kugel geworfen, deren Radius ϱ ist und deren spezifisches Gewicht gröfser als 1 ist. Bis zu welcher Höhe steigt das Wasser hierdurch in dem Gefäfse?

Lösung: 2 Fälle $h < 2\varrho - \frac{4\varrho^3}{3r^2}$ und $h > 2\varrho - \frac{4\varrho^3}{3r^2}$.

(56) v. Schäwen IX, 285. IX, 433.

37. Ein massiver Cylinder von homogener Masse schwimmt bei horizontaler Lage seiner Achse so auf Wasser, dafs er in eine Tiefe der Hälfte des Radius seiner Grundfläche eingetaucht ist. Wie grofs ist das spezifische Gewicht des Stoffes des Körpers? $s = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$.

(64) Reidt IX, 372. —

*) Vgl. § 5 Nr. 4 und 7.

38. Auf dem Mantel eines Umdrehungscylinders (r, h) ist eine Schraubenlinie von n Gängen gezogen. An irgend einer Stelle sind zwei aufeinanderfolgende Schraubengänge durch eine Ganghöhe verbunden, und es ist über letzterer nach aufsen zu ein gleichseitiges Dreieck so angebracht, dafs seine erweiterte Ebene durch die Cylinderachse geht. Wird nun dieses Dreieck längs der Schraubenlinie verschoben, und dreht sich zugleich seine Ebene um die Achse, so beschreibt es ein schiefes Schraubengewinde. Man soll den körperlichen Inhalt der aus diesem Gewinde und dem Cylinder zusammengesetzten Schraubenspindel berechnen.

Lösung: $\text{Vol} = \pi h \left(r^2 + \frac{hr}{2n}\sqrt{3} + \frac{h^2}{4n^2}\right)$.

(673) Weinmeister XVIII, 197. XVIII, 595.

39. In ein cylinderförmiges Gefäfs, welches p gr wiegt, dessen innerer Durchmesser $2r$ cm beträgt und dessen Schwerpunkt h cm über dem Boden liegt, fliefst eine Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht d. Der Schwerpunkt wird dadurch zuerst sinken, später wieder steigen. Seine niedrigste Lage ist zu bestimmen.

Lösung: Der Schwerpunkt liegt in der Oberfläche der Flüssigkeit.

(*678*) Nyt Tidsskrift. XXV, 362.

d. Kegel und Kegelstumpf.*)

40. Welcher gerade Kegel kann durch eine Ebene parallel zur Basis in zwei Teile zerlegt werden, deren Oberflächen und deren Volumina einander gleich sind?

Lösung: Ist 2α die Öffnung des Kegels, so mufs $\sin\alpha = \sqrt[3]{2} - 1$, also $\alpha = 15^0\, 3'\, 56''$ sein.

(893) Emmerich XX, 510. XXI, 271.

41. Ein gerader Kegel soll durch eine Ebene parallel zur Basis in zwei Teile zerlegt werden, deren Oberflächen sich

a) ebenso,

b) umgekehrt verhalten wie ihre Volumina.

Lösung: Der Radius x des Schnittkreises wird bestimmt bei a) durch die Gleichung $2x^3 + (x-1)(s+1) = 0$, bei b) durch $2x^5 + x^3(s+1) + x^2(s-1) - (s+1) = 0$. ($s$ Seite des Kegels.)

(1159) Emmerich XXIII, 591. XXIV, 340.

---

*) Vergl. v. Frank: Berechnung des Rauminhalts eines Fasses. XXII, 333—336. Stoll: Zur Berechnung des Rauminhalts eines Fasses. XXIII, 109—114. Franz: Zur Fassberechnung. XXIII, 114. Kosch: Elementare Behandlung des Mantels eines schiefen Rotationskegels mit elliptischer Grundfläche XXV, 341; ferner § 5 Nr. 3, 8, 10 und 11.

42. Die Grundlinie $2c$ und den Schenkel a eines gleichschenkligen Dreiecks zu berechnen, wenn man seinen Inhalt $\triangle$ und die Gesamtfläche πf^2 des Kegels kennt, welcher durch Rotation des Dreiecks um seine Höhe entsteht.

Lösung: $c = \frac{1}{2f}\sqrt{2(f^4 - \Delta^2)}$; $a = \frac{f^4 + \Delta^2}{f\sqrt{2(f^4 - \Delta^2)}}$.

(*673*) Mathesis. XXV, 360.

43. Einen geraden Kegel parallel zur Grundfläche in zwei Teile von gleicher Oberfläche zu teilen.

Lösung: Der Kegel sei gegeben durch r und α, dann ist der Radius der Schnittfläche $r \cos\frac{\alpha}{2}$.

(1329a) Sievers XXV, 514. XXVI, 343.

44. Ein Kegel mit dem Halbmesser r der Grundfläche und der Höhe h aus einem Stoffe, dessen Dichte s ist, wird mit der Spitze abwärts in eine Flüssigkeit von der Dichte s' getaucht. Wie tief taucht er ein?

Lösung: $x = h\left(1 + \sqrt[3]{\frac{s}{s'} - 1}\right)$.

Pick V, 58. VI, 156.

45. Ein gerader Kegel, dessen spezifisches Gewicht d ist, schwimmt gerade noch in zwei Flüssigkeiten, die in einem Gefäfs übereinander lagern und deren spezifische Gewichte δ_1 und δ_2 ($\delta_1 > \delta_2$) sind. Es ist zu beweisen, dafs die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten die Kegelachse nach einem Verhältnis teilt, dessen Quotient $\sqrt[3]{\frac{\delta_1 - \delta_2}{d - \delta_2}} - 1$ ist.

(*677*) Educ. Times. XXV, 361.

46. Ein gerader Kegel (x, h) und ein gerader Cylinder (y, h) haben dasselbe Volumen; die Differenzen zwischen den beiden Mänteln und den beiden Grundflächen sind gleich. Man soll die Radien x und y berechnen.

Lösung: $x = \frac{1}{4}h(3 + \sqrt{3})$; $y = \frac{1}{4}h(1 + \sqrt{3})$. Vergl. Nr. 34.

(*116*) Nouv. Ann. XIII, 287.

47. In einem geraden Cylinder, dessen Grundflächenradius r ist und der bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt ist, wird ein gerader Kegel so eingetaucht, dafs die Achsen beider zusammenfallen. Ist die Spitze unten, befindet sich dieselbe also im Mittelpunkte der Grundfläche des Cylinders, so steigt die Wasserhöhe um m; ist dagegen die Grundfläche des Kegels unten, fällt dieselbe also mit der Grundfläche des Cylinders zusammen, so steigt die

Wasserhöhe um n. Die Höhe u und der Grundflächenradius x des Kegels sind zu berechnen.

Lösung: $x = \frac{1}{2} r \left[\frac{(h+n)\sqrt{3m}}{\sqrt{(h+m)^3}} + \sqrt{\frac{4n}{h+n} - \frac{m(h+n)^2}{(h+m)^3}}\right]$; $u = \frac{x}{\operatorname{tg}\alpha}$, wo 2α der Öffnungswinkel des Kegels ist.

(511) Szimányi XVI, 355. XVII, 23.

48. Über einem gröfsten Kreis einer gegebenen Kugel als Basis konstruiert man einen Kegel gleich der Hälfte des Volumens der Kugel; und man verlangt 1) den Radius des kleinen Kreises zu finden, in welchem die Fläche dieses Kegels die Fläche der Kugel schneidet, 2) das Volumen des Kegelteils zu berechnen, welcher zwischen seiner Basis und der Ebene dieses kleinen Kreises liegt.

(*11*) Nouv. Ann. X, 354. —

49. Die Achse eines geraden Kegels, der nicht durch eine Grundfläche begrenzt ist, geht durch den Mittelpunkt einer Kugel: die Entfernung der Spitze A des Kegels vom Mittelpunkt M der Kugel ist gleich dem Durchmesser $2r$ der letzteren. Wie grofs ist die Öffnung 2α des Kegels, wenn der aufserhalb des Kegels liegende Teil der Kugelfläche doppelt so grofs ist wie der innerhalb der Kugel liegende Teil der Kegelfläche?

Lösung: $2\alpha = 28^0\,57'\,18''$; $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

(*474*) Nyt Tidsskrift. XXII, 201.

50. Um einen geraden Kegel, dessen Öeffnung 2φ gegeben, ist eine dreiseitige Pyramide so konstruiert, dafs die Spitzen F beider zusammenfallen, die Grundfläche ABC der Pyramide und die des Kegels in einer Ebene liegen und die Seitenflächen der Pyramide den Kegel berühren; die Grundkanten a, b, c der Pyramide sind gegeben. Wie grofs ist der Radius einer Kugel, welche den Mantel des Kegels und seine Grundfläche berührt?

Lösung: $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{1}{2}\varphi\right)$.

(*672*) Journ. élém. XXV, 359.

51. In einen geraden Kegel, dessen Scheitelwinkel 90^0 beträgt, sind auf derselben Seite des Scheitelpunktes zwei Berührungskugeln konstruiert, welche sich gegenseitig berühren; ihre Centrale ist a. Gesucht wird das Volumen des Körpers, welcher von der Kegelfläche und den beiden Kugeln begrenzt wird.

Lösung: Vol. $= \frac{1}{48}\pi a^3$.

(*668*) Nyt Tidsskrift. XXV, 357.

52. Gegeben ist ein gerader Kegel, dessen Achsenschnitt das gleichschenklige Dreieck ABC ist; es sei $CA = CB = s$; $\sphericalangle ACB = \alpha$.

a) Auf CA und CB sind resp. die Punkte D und E durch $CD = p$ und $CE = q$ gegeben; $DE = 2a$ soll die grofse Achse einer aus dem Kegel geschnittenen Ellipse sein; dann ist die halbe kleine Achse $b = \sqrt{pq} \sin \frac{\alpha}{2}$; die halbe Excentricität $e = \frac{p-q}{2}$ und der Inhalt des abgeschnittenen Kegels $k = \frac{1}{3}\pi\sqrt{(pq)^3} \sin \frac{\alpha^2}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

b) Durch D ist eine Ebene so zu legen, dafs sich das Volumen des abgeschnittenen Kegels zu dem des Stutzes wie $m:n$ verhalte.

c) Durch einen im Umfang der Basis liegenden Punkt sind Ebenen zu legen, welche den Kegel in v gleiche Teile teilen.

d) Das Volumen des Kegels ist durch eine Ebene, welche mit der Basisebene den Winkel φ bildet, im Verhältnis $m:n$ zu teilen.

Lösung: b) $q = \frac{s^2}{p}\sqrt[3]{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2}$; c) $q_\lambda = s\sqrt[3]{\frac{\lambda^2}{v^2}}(\lambda = 1, 2, 3 \cdots v-1)$;

d) $p = s\sqrt{\frac{\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)}}\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}$.

(583) Szimányi XVII, 111. XVII, 523.

---

53. Die Radien der Grundflächen eines Kegelstumpfes zu bestimmen, wenn man kennt: 1) die Höhe h des Stumpfes; 2) das Volumen, welches $\frac{3}{4}$ von dem Volumen der Kugel mit dem Durchmesser h ist; 3) die Seitenfläche gleich dem Inhalt eines Kreises vom Radius a. Es soll dann die Anzahl der Lösungen angegeben werden, welche den verschiedenen Werten des Verhältnisses $\frac{a}{h}$ entsprechen.

(24_1) Nouv. Ann. XI, 110. —

54. Einen geraden Kegelstumpf, gegeben durch r, ϱ, $\sphericalangle \alpha$, parallel zur Grundfläche in zwei Teile von gleicher Oberfläche zu teilen.

Lösung: $x = \sqrt{r^2 \cos \frac{\alpha^2}{2} + \varrho^2 \sin \frac{\alpha^2}{2}}$.

(1329b) Sievers XXV, 514. XXVI, 343.

55. Ein gerader abgestumpfter Kegel, dessen Durchschnitt $ABCD$ sei und in welchen sich eine Kugel K beschreiben läfst,

ist ein Teil eines geraden Kegels, dessen Winkel an der Spitze α ist. 1) In welchem Verhältnis n steht sein Volumen zu dem der Kugel? 2) Wie grofs ist α, wenn n gegeben ist?

Lösung: $n = \dfrac{1 - \cos\frac{\alpha^2}{2}}{2\cos\frac{\alpha^2}{2}}$; $\cos\frac{\alpha^2}{2} = \dfrac{1}{2n+1}$.

(*241*) Tidsskrift. XVI, 30.

56. Die Radien x und y der Grundflächen eines abgestumpften Kegels zu berechnen, welcher um eine durch den Radius r gegebene Kugel beschrieben ist und dessen Volumen doppelt so grofs wie das der Kugel ist.*)

Lösung: $x = \frac{r}{2}(\sqrt{5}+1)$; $y = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$,

(*240*) Journ. élém. XVI, 30.

57. Die Höhe h eines abgestumpften geraden Kegels sei mittlere Proportionale zwischen den Durchmessern $2r$ und 2ϱ seiner Grundflächen. 1) Zu beweisen, dafs sich in den Kegel eine Kugel beschreiben läfst. 2) r und ϱ zu berechnen aus h und der Gesamtoberfläche πa^2 des abgestumpften Kegels.

Lösung: 1) (G.). 2) $r + \varrho = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + h^2}$; $r\varrho = \frac{h^2}{4}$.

(*331*) Nouv. Ann. XVIII, 359.

58. Ein gerader abgestumpfter Kegel, in welchem die Radien der Grundflächen r und ϱ sind, wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene in einem Kreise mit dem Radius r' geschnitten. Werden nun Mantel und Volumen des ganzen Körpers mit M und V, Mantel und Volumen des zwischen den Kreisen mit den Radien r und r' liegenden Teilkegels mit m' und v' bezeichnet, so ist

a) $Mr'^2 = m\varrho^2 + m'r^2$.

b) $Vr'^3 = v\varrho^3 + v'r^3$.

(*472*) Mathesis. XXII, 200.

59. Um eine Kugel vom Radius a ist ein abgestumpfter gerader Kegel beschrieben; die Radien der Grundflächen seien r und ϱ. Man soll berechnen

a) das Volumen V;

b) den Mantel M aus a und r,

c) ϱ, wenn a gegeben und der Mantel vermehrt um die Grundfläche mit dem Radius ϱ ein Minimum ist,

*) Die Gesamtoberfläche des Kegels ist doppelt so grofs wie die Oberfläche der Kugel.

d) den Radius x des Berührungskreises für den Fall des Minimums,

e) die Segmente S_1 und S_2, in welche die Kugel durch den Berührungskreis geteilt wird, für denselben Fall.

Lösung: a) $V = \frac{2}{3}\pi a\left(r^2 + a^2 + \frac{a^4}{r^2}\right)$; b) $M = \frac{\pi}{r^2}(r^2 + a^2)^2$;

c) $\varrho = \frac{a}{\sqrt[4]{2}}$, $r = a\sqrt[4]{2}$; d) $x = 2a\sqrt[4]{2}\,(\sqrt{2} - 1)$;

e) $S_1 = \frac{4}{3}\pi a^3(23 - 16\sqrt{2})$; $S_2 = \frac{8}{3}\pi a^3(8\sqrt{2} - 11)$.

(*473*) Journ. élém. XXII, 200.

e. **Die Kugel, der Kugelabschnitt und Kugelausschnitt.***)

60. Wie grofs ist der Radius x einer Kugel, wenn man im Abstande a von ihrer Oberfläche $\frac{1}{42}$ der Oberfläche mehr übersieht als im Abstande b?

Lösung: $x = 10a - 11b \pm \sqrt{(10a - 11b)^2 - ab}$.

(*665*) Nyt Tidsskrift. XXV, 356.

61. Eine Anzahl gleich grofser Kugeln füllen einen gröfseren Raum so an, dafs sie möglichst dicht zusammengedrängt sind.

a) In welchem Verhältnis steht der Inhalt der Kugeln zu den leeren Zwischenräumen, beziehungsweise zu dem ganzen Raum?

b) Welche Gestalt nehmen die Kugeln an, wenn durch allseitigen Druck die Zwischenräume verschwinden?

Lösung: a) $1 : \frac{3\sqrt{2}}{\pi}$; b) der Raum wird stetig erfüllt von einem System kongruenter und entsprechend geordneter Rhombendodekaeder mit dem rhombischen Diagonalenverhältnis $1 : \sqrt{2}$.

(417) Leyendecker XV, 440. XVI, 116.

62. a) Die Radien r_a, r_b, r_c dreier Kugeln zu berechnen, welche sich untereinander und die Ebene eines gegebenen Dreiecks ABC in den Punkten A, B, C berühren, wenn die Seiten a, b, c gegeben sind.

b) c zu berechnen, wenn a, b und $r_a + r_b + r_c = p$ gegeben sind.

Lösung: a) $r_a = \frac{bc}{2a}$; $r_b = \frac{ac}{2b}$; $r_c = \frac{ab}{2c}$;

b) $c = \frac{ab}{a^2 + b^2}\left(p \pm \sqrt{p^2 - a^2 - b^2}\right)$.

(*476*) Journ. élém. XXII, 202.

*) Vergl. § 5 Nr. 4—11.

63. Ein reguläres Tetraeder ist in eine Kugel mit dem Radius r konstruiert. Eine andere Kugel hat ihren Mittelpunkt in einer Ecke des Tetraeders und geht durch die drei anderen Ecken. Gesucht wird das Volumen V und die Oberfläche O des Körpers, welcher von den beiden Kugeln begrenzt wird.

Lösung: $V = \frac{4}{27}\pi r^3(21 - 8\sqrt{6})$; $O = \frac{4}{9}\pi r^2(15 - 4\sqrt{6})$

$V_1 = \frac{16}{27}\pi r^3(2\sqrt{6} + 3)$; $O_1 = \frac{8}{9}\pi r^2(9 + 2\sqrt{6})$.

(*669*) Nyt Tidsskrift. XXV, 358.

64. Um vier gleiche Kugeln, deren Radius gegeben und von denen jede die drei anderen berührt, ist ein reguläres Oktaeder so konstruiert, dafs vier Flächen je drei Kugelflächen, die vier anderen Oktaederflächen nur eine Kugelfläche berühren, und zwar liegen je zwei Oktaederflächen, von jeder Art eine, einander gegenüber und sind also parallel. Die Oktaederkante ist zu berechnen.

Lösung: Vergl. Lieber: Stereom. Aufg. § 27 Nr. 19.

(*670*) Nyt Tidsskrift. XXV, 358.

65. Eine Kugel ist von einem unendlich langen geraden Cylinder durchdrungen, dessen Radius der Grundfläche $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r$ ist und dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Das der Kugel und dem Cylinder gemeinschaftliche Volumen V ist zu berechnen.

Lösung: $V = \frac{1}{6}\pi r^3(8 - 3\sqrt{3})$.

(*238*) Journ. élém. XVI, 29.

66. Eine Kugel, deren Radius r ist, wird von einem unendlich langen Cylinder durchdrungen, dessen Achse durch den Mittelpunkt geht. Gesucht wird der Radius x der Grundfläche des Cylinders, wenn derselbe aus der Kugel schneidet 1) den $m$ten Teil der Kugelfläche; 2) den $n$ten Teil des Volumens.

Lösung: 1) $x = \frac{r}{m}\sqrt{2m - 1}$; 2) $x = r\sqrt{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}}$.

(*239*) Math. Magazine. XVI, 29.

67. An zwei Kugeln (Radien r_1 und r_2) sind die gemeinsamen Berührungskegel gelegt. Wie grofs sind die so entstandenen Körper V und wie grofs ist der bei der äufseren Berührung verbleibende Rest R, wenn man den Berührungskegel der kleineren Kugel, soweit er nicht dieser selbst angehört, aufser Betracht läfst?

Lösung: $V = \frac{\pi}{3}(r_1^3 + r_2^3)\frac{(1 + \sin\alpha)^2}{\sin\alpha}$,

$$R = \frac{\pi}{3}\,\frac{r_1^3(1 + \sin\alpha)^2 - r_2^3(1 - \sin\alpha)^2}{\sin\alpha},$$

wenn α der Winkel ist, den die Seitenlinie des Kegels mit der Centrale bildet, also für beide Fälle verschiedene Werte hat.

(418) Sievers XV, 441. XVI, 117.

68. Auf der Ebene eines Kreises mit dem Radius r ist in dem Peripheriepunkt A die Senkrechte $AT = 2r$ errichtet. T wird zur Spitze eines Kegels genommen, dessen Grundfläche der Kreis ist. Der A diametral gegenüberliegende Punkt sei B und M Mittelpunkt der Seitenlinie TB. Man soll a) beweisen, dafs die über AT als Durchmesser konstruierte Kugelfläche den Mantel des Kegels in einem Kreise schneidet, dessen Ebene senkrecht auf TB in M steht und b) die beiden Volumina V_1 und V_2 berechnen, in welche der Kegel durch die Kugelfläche geteilt wird.

Lösung: b) $V_1 = \frac{1}{12}\pi r^3(8 - 3\sqrt{2})$; $V_2 = \frac{1}{4}\pi r^3\sqrt{2}$.

(*671*) Nyt Tidsskrift. XXV, 359.

69. Aufserhalb einer durch den Radius r gegebenen Kugel K den Punkt P durch $PK = x$ so zu bestimmen, dafs das Volumen des Doppelkegels, dessen Spitzen P und K sind und dessen Grundfläche der durch die von P gezogenen Tangenten gebildete Berührungskreis ist, gleich $\frac{3}{8}$ des Volumens der Kugel ist.

Lösung: $x = 2r$.

(*242*) Journ. élém. XVI, 31.

70. Von einem lichtstrahlenden Punkte wird der dritte ($n$te) Teil der Oberfläche einer Kugel, deren Radius r ist, erleuchtet.

a) Wie grofs ist die Entfernung x des Punktes vom Kugelcentrum?

b) Welchen Radius ϱ hat die Schattengrenze?

c) Wie verhält sich der von der Kugel begrenzte Lichtkegel zum Inhalt der Kugel?

Lösung: a) $x = \frac{nr}{n-2}$; b) $\varrho = \frac{2r}{n}\sqrt{n-1}$; c) $1 : n(n-2)$.

(474) Haag XVI, 124. XVI, 421.

71. Eine gegebene Kugel durch eine Halbkugelfläche zu halbieren.

Lösung: Die Entfernung der Mittelpunkte ist $0{,}48459\,r$; $\varrho = 0{,}87474\,r$. (Kub. Gl.)

(1142) Emmerich XXIII, 431. XXIV, 188.

72. Auf einem Durchmesser AB einer Kugel vom Radius r einen Punkt X so zu bestimmen, dafs, wenn man durch X eine Ebene senkrecht zu dem Durchmesser legt, die Fläche der durch diese Ebene begrenzten Kalotte, welche den Punkt A enthält, gleich dem Mantel des Kegels ist, welcher zur Grundfläche den Durchschnittskreis der Kugel und Ebene und zur Spitze den

Punkt B hat. Dann das Verhältnis des Volumens dieses Kegels zum Volumen der Kugel zu berechnen. Aufl. AB ist in X stetig zu teilen.

(26_2) Nouv. Ann. XI, 110. —

73. Welcher Kugelabschnitt kann durch eine Ebene parallel zur Grundfläche in zwei Teile von gleicher Oberfläche und gleichem Inhalt zerlegt werden?

Lösung: Nur eine vollständige Kugel ist in der verlangten Weise teilbar.

(1241) Emmerich XXIV, 609. XXV, 348.

74. a) Einen Kugelsektor, b) ein Kugelsegment und c) eine Kugelschicht durch eine Ebene parallel zur Grundfläche in zwei Teile von gleicher Oberfläche zu teilen.

Lösung: a) $x = R\sqrt{\frac{1}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ (R Kugelradius, α der halbe Centriwinkel, x Seitenlinie des Schnittes).

b) $\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\alpha^4}{2}}{2}}$ (φ der halbe Centriwinkel des neuen Segments.)

c) $\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\alpha^4}{2}\sin\frac{\beta^4}{2}}{2}}$ ($\alpha > \beta$ die halben zu den Kreisflächen gehörenden Centriwinkel, φ der halbe Centriwinkel des Schnittes.)

(1329 c—e) Sievers XXV, 514. XXVI, 343.

75. Welcher Kugelausschnitt kann durch eine koncentrische Kugelfläche in zwei Teile zerlegt werden, deren Oberflächen und deren Volumina einander gleich sind?

Lösung: Die Öffnung 2α des Kugelausschnitts ist $29^0 37' 7'', 5$ und wird bestimmt durch $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)$.

(1169) Emmerich XXIV, 23. XXIV, 448.

76. Zwei Breitenkreise, deren sphärischer Abstand p^0 beträgt, begrenzen eine Zone, welche $\frac{1}{n}$ der Erdoberfläche ist. a) Die Abstände x und y der Breitengrade vom Äquator sind zu berechnen. b) Zu berechnen das Verhältnis Q des Volumens, welches gleich der Differenz der Kugelschicht und des abgestumpften Kegels mit den Breitengraden als Grundflächen ist, zu der ganzen Kugel.

Beispiel. $p = 90^0$, $n = \sqrt{2}$.

Lösung: a) $x - y = p$ und $\cos \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{n \sin \frac{1}{2} p}$ geben x und y.

b) $Q = \frac{\sin \frac{1}{2} p^2}{n}$. Beispiel: $x = 45^0$; $y = -45^0$; $Q = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

(*666*) Nyt Tidsskrift. XXV, 356.

f. Über Körper, welche durch Rotation einer Fläche entstanden sind.*)

77. Die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden, wenn sich die Volumina, welche man durch Rotation des Dreiecks um seine drei Seiten erhält, wie 12 : 15 : 20 verhalten.

Lösung: Die Seiten des Dreiecks erhalten sich wie 5 : 4 : 3.

(32_2) Journ. élém. XI, 200.

78. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $AC = BC = a$ rotiert um eine durch C gehende und aufserhalb des Dreiecks liegende Gerade, welche mit AC einen Winkel von 30^0 bildet. Das Volumen V zu berechnen.

Lösung: $V = \frac{1}{6}\pi a^3 (\sqrt{3} + 1)$.

(33_2) Journ. élém. XI, 200.

79. Rotiert ein rechtwinkliges Dreieck um seine Hypotenuse z, so ist das Volumen gleich dem einer Kugel vom Radius $\sqrt[3]{\frac{36}{5}}$; rotiert es dagegen successive um jede seiner Katheten x und y, so ist die Summe der beiden Volumina gleich dem einer Kugel vom Radius $\sqrt[3]{21}$. Die Seiten des Dreiecks zu berechnen.

Lösung: 4, 3, 5.

(34_2) Journ. élém. XI, 201.

80. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC durch die Hypotenuse c und den Winkel α $(a > b)$; auf AB einen Punkt X so zu bestimmen, dafs, wenn man auf AB in X die Senkrechte XY errichtet, das durch Rotation des Dreiecks um XY erzeugte Volumen doppelt so grofs ist wie das durch Rotation des Dreiecks um die Höhe CD erzeugte.

Lösung: $DX = -c \cos 2\alpha = c \cos 2\beta$.

(*232*) Journ. élém. XVI, 27.

81. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC rotiert um die Hypotenuse BC; zu dem erhaltenen Doppelkegel ist die Umkugel (M, r)

*) Vergl. § 5 Nr. 12—16.

und die Inkugel (m, ϱ) konstruiert; letztere berühre AB in H und AC in E; ferner seien noch HF, AD und EG senkrecht BC gefällt. Zu berechnen ist 1) r; 2) ϱ; 3) Mm; 4) *Vol.* ADm; 5) *Mant.* Am; 6) FG; 7) *Kreis* FH + *Kreis* $EG = S$.

Lösung: 1) $r = \frac{1}{2} a$. 2) $\varrho = \frac{bc}{b+c}$. 3) $Mm = \frac{a(b-c)}{2(b-c)}$. 4) $Vol. = \frac{\pi b^3 c^3 (b-c)}{3a^3(b+c)}$. 5) $Mant. = \frac{\pi b^2 c^2 \sqrt{2}}{a(b+c)}$; 6) $FG = \frac{bc}{a}$; 7) $S = \pi \varrho^2$.

(*478*) Mathesis. XXII, 352.

82. Gegeben sind zwei senkrecht zueinander stehende Geraden OX und OY und auf OX ein Punkt A durch $OA = a$. Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC, dessen eine Ecke A, dessen Scheitelpunkt des rechten Winkels auf OY in B liegt und dessen dritte Ecke C in dem Winkelraum XOY liegt, sind die Katheten $AB = x$ und $BC = y$ zu berechnen, wenn der Inhalt des Dreiecks $ABC = a^2$ ist und wenn $\triangle ABC$ bei der Rotation um OY einen Körper beschreibt, dessen Volumen $n$mal so grofs ist, wie das einer Kugel vom Radius a. Zwischen welchen Grenzen mufs n liegen?

Lösung: $x = \frac{a\sqrt{2}}{2n-1}(\sqrt{n} \pm \sqrt{1-n})$; $y = a\sqrt{2}(\sqrt{n} \mp \sqrt{1-n})$; $\frac{1}{2} \leqq n \leqq 1$.

(*479*) Journ. élém. XXII, 352.

83. Ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seite a rotiert um eine Gerade MN, welche mit ihm in derselben Ebene liegt und parallel AB ist. Die Entfernung x der beiden Parallelen zu berechnen, wenn das durch Rotation um MN erzeugte Volumen viermal so grofs sein soll, wie das durch Rotation um AB erzeugte.

Lösung: $x = \frac{5}{6} a\sqrt{3}$. Die Bedingung der Gleichseitigkeit ist nicht nötig, man findet allgemein $x = \frac{5}{3} h$.

(*35₂*) Journ. élém. XI, 366.

84. Ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seite a rotiere um eine Achse $AX \perp AB$. Zu berechnen ist 1) das Volumen, 2) die Oberfläche des Rotationskörpers.

Lösung: Vol. $= \frac{\pi a^3}{4}\sqrt{3}$; Obf. $= 3\pi a^2$.

(*234*) Journ. élém. XVI, 27.

85. Die Basis $2x$ und die Höhe y eines gleichschenkligen Dreiecks zu berechnen, wenn die Volumina v und v_1 der Körper

gegeben sind, welche man erhält, wenn das Dreieck um die Basis und um einen Schenkel rotiert.

Lösung: $x = \sqrt[3]{\frac{3 v v_1^2}{2\pi(4v^2 - v_1^2)}}$; $y = \sqrt[3]{\frac{3v}{2\pi v_1}} \sqrt[6]{4v^2 - v_1^2}$.

(*235*) Journ. élém. XVI, 27.

86. $\triangle ABC$, welches durch c, h_c und $\sphericalangle \gamma$ gegeben ist, wird um eine zu der Basis parallele Achse CX um den $\sphericalangle v$ gedreht. Man berechne

a) das Volumen V,

b) die Oberfläche O des entstandenen Körpers im allgemeinen und für den speziellen Fall $v = 360^0$.

Lösung: a) $V = \frac{v}{540^0} \pi c h_c^2$;

b) $O = \frac{\pi v}{180^0} c h_c \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2h_c}{c} \cot \frac{1}{2}\gamma}\right) + c h_c$.

(557) Haluschka XVI, 593. XVII, 359.

87. Gegeben ist $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und der von A gefällten Höhe h. Man soll parallel BC die Gerade DD' so ziehen, daſs bei der Rotation des Dreiecks um DD' die durch BC erzeugte Fläche mittlere Proportionale zwischen den durch AB und AC erzeugten Flächen ist. Der Abstand x von BC und DD' ist zu berechnen.

Lösung: $x = \frac{h(\sqrt{bc} + a) \pm \sqrt{2a\sqrt{bc} + a^2 - bc}}{2\sqrt{bc}}$.

(*674*) Mathesis. XXV, 360.

88. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seite a; der in dasselbe beschriebene Kreis O berührt CD in E, AB in F und trifft AE in M. Es ist das Volumen der beiden Körper zu berechnen, welche durch Rotation des Vierecks $AFOM$ a) um EF und b) um AF entstehen; c) ist die Lage des Schwerpunktes von $AFOM$ zu bestimmen.

Lösung: a) Vol. $= \frac{17}{300} \pi a^3$, b) Vol. $= \frac{4}{75} \pi a^3$; c) $y = \frac{17}{90} a$; $z = \frac{8}{45} a$, wenn y, z die Entfernungen des Schwerpunktes von EF, resp. AB sind.

(*335*) Mathesis. XVIII, 361.

89. Über den drei Seiten BC, CD, DA eines Quadrates $ABCD$ sind nach auſsen die gleichseitigen Dreiecke BCE, CDF, DAG konstruiert. Volumen und Oberfläche desjenigen Körpers zu berechnen, welcher durch Rotation der Figur um AB entsteht.

Lösung: Vol. $= \frac{1}{4} \pi a^3 (15 + 4\sqrt{3})$; b) Obfl. $= \pi a^2 (8 + \sqrt{3})$.

(*675*) Mathesis. XXV, 361.

90. Gegeben sind der Inhalt F eines Parallelogramms und die Volumina v und v', welche es bei der Rotation resp. um die Seiten x und y erzeugt; x, y und $\sphericalangle \varphi$ des Parallelogramms sind zu berechnen.

Lösung: $x = \frac{\pi F^2}{v}$; $y = \frac{\pi F^2}{v'}$; $\sin\varphi = \frac{vv'}{\pi^2 F^3}$.

(*233*) Journ. élém. XVI, 27.

91. Von einem Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90^0$) ist gegeben $BC = b$, der Inhalt a^2 und das Volumen des Körpers, welcher entsteht, wenn $ABCD$ um BC rotiert, $= \frac{4}{3}\pi c^3$. Zu berechnen sind $AB = x$, $CD = y$ und $AD = z$.

Lösung: $z^2 = \frac{b^2}{2} \pm \sqrt{12a^4 - 16bc^3 + \frac{b^4}{4}}$; $(x-y)^2 = b^2 - z^2$; $z(x+y) = 2a^2$.

(*237*) Nouv. Ann. XVI, 28.

92. Durch einen Punkt aufserhalb eines gegebenen Kreises O zieht man an diesen Kreis eine durch den Berührungspunkt B begrenzte Tangente; man sucht, wie grofs die Entfernung AO sein mufs, damit, wenn die Figur um diese Gerade rotiert, die Oberfläche der durch AB erzeugten Fläche die Hälfte der durch den Kreis erzeugten ist.

(*14₁*) Nouv. Ann. X, 16. —

93. Gegeben ein Halbkreis über AB und die Tangente BT. Man soll durch den Punkt A die Sekante AMN ziehen (M und N sind die Punkte, wo sie den Halbkreis und die Tangente BT schneidet), so dafs, wenn man die Figur um AB rotieren läfst, das durch den Teil des Kreises AMB erzeugte Volumen gleich sei dem durch die Fläche MNB erzeugten, welches durch die Geraden MN, NB und den Kreisbogen MB begrenzt ist

(*15₁*) Nouv. Ann. X, 16. —

94. Ein Wulst, welcher durch Rotation einer Kreisfläche mit dem Radius r um eine ihrer Tangenten entstanden gedacht werden kann, ruht auf einer zu dieser Tangente senkrechten Ebene. Wie grofs ist der Hohlraum zwischen dem Wulst und der Ebene? Res. $\frac{r^3\pi}{2}\left(\frac{10}{3} - \pi\right)$.

(65) Reidt IX, 372. —

95. Der in der vorigen Aufgabe genannte Wulst werde durch eine Kugelfläche von demselben Radius r, dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt der Tangente ist, ausgehöhlt. Wie grofs ist das Volumen des Restes? Res. $2r^3\pi^2\left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right)$.

(66) Reidt IX, 372. —

96. Wie grofs ist dagegen das Volumen desjenigen Körpers, welcher entsteht, wenn man in der vorigen Aufgabe den Wulst um den aufserhalb desselben fallenden Teil der Kugel vermehrt?
Res. Man addiere zu dem Res. d. vor. Aufg. $\frac{4}{3}r^3\pi$.

(67) Reidt IX, 373. —

97. Ein um einen Kreis vom Radius r beschriebenes Parallelogramm P rotiert um eine seiner Diagonalen. Die auf diese Weise erzeugte Fläche F und das Volumen V zu berechnen, wenn r und der Winkel α des Parallelogramms gegeben sind.

Lösung: $F = \frac{4\pi r^2}{\sin\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}$; $V = \frac{4\pi r^3}{3\sin\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}$.

(36_2) Journ. élém. XI, 366.

98. Gegeben ist ein Halbkreis K mit dem Durchmesser $AB = 2r$; auf der Verlängerung von AB einen Punkt P so zu bestimmen, dafs, wenn man die Tangente PC und CD senkrecht AB zieht, Vol. KCP = Vol. DCA — Vol. DCB ist.

Lösung: $KP = x = r\sqrt{\frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{41})}$.

(37_2) Journ. élém. XI, 366.

99. Einen Halbkreis $ACDB$ mit dem Durchmesser $AB = 2r$ durch einen Punkt P so zu teilen, dafs durch Rotation der Kreissegmente ACP und PDB, sowie des Dreiecks APB Volumina erzeugt werden, welche in geometrischer Progression stehen.

Lösung: Es sei $PE \perp AB$, dann ist $PE = \frac{1}{3}r\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1\right)$.

(38_2) Journ. élém. XI, 366.

100. Gegeben ein Halbkreis mit dem Durchmesser $AB = 2r$; auf der Verlängerung von AB über B einen Punkt P so zu bestimmen, dafs, wenn man an den Halbkreis die Tangente PD legt, welche verlängert die Tangente in A in C trifft, der Mantel des durch Rotation des Dreiecks CAP um AP erzeugten Kegels gleich $\frac{3}{2}$ der durch Rotation des Halbkreises erzeugten Kugelfläche ist.

Lösung: $BP = 2r$ und r.

(39_2) Journ. élém. XI, 366.

101. Über $AB = 2r$ ist ein Halbkreis beschrieben, man soll von B eine Gerade, welche den Halbkreis in C und die Tangente in A in D trifft, so ziehen, dafs bei der Rotation der Figur um AB der durch AD erzeugte Kreis gleich der durch BC erzeugten Kalotte ist.

Lösung: Ist $CE \perp AB$, so ist AB in E stetig geteilt und BE der gröfsere Abschnitt.

(*106*) Journ. élém. XIII, 284.

102. Aufserhalb eines Kreises K (Radius r) ist C durch $CK = 2r$ gegeben; von C sind an den Kreis die Tangenten CA und CB gezogen; CK treffe über K verlängert den Kreis in D. Volumen und Oberfläche zu berechnen, welche bei der Rotation der Figur um CK durch Segment ADB erzeugt werden; ebenso Volumen und Oberfläche erzeugt durch CA.

Lösung: Vol. $ADB = \frac{9}{8} r^3\pi$; Vol. $CA = \frac{3}{8} r^3\pi$;

Obf. $ADB = 3r^2\pi$; Obfl. $CA = \frac{3}{2} r^2\pi$.

(*107*) Journ. élém. XIII, 284.

103. Über $AB = 2r$ ist ein Halbkreis beschrieben; auf AB den Punkt C so zu bestimmen, dafs, wenn man auf AB in C eine Senkrechte errichtet, welche den Kreis in D trifft, das Rechteck $ACDE$ konstruiert und die Figur um AC rotieren läfst, das durch $ACDE$ beschriebene Volumen m-mal so grofs ist, wie das durch Bogen AD beschriebene.

Lösung: $AC = \frac{3r(2-m)}{3-m}$.

(*108*) Journ. élém. XIII, 284.

104. An einen durch den Durchmesser $AB = 2r$ gegebenen Halbkreis legt man in A und B die beiden Tangenten AC und BD, und dann noch eine dritte Tangente CD; die Tangenten so zu bestimmen, dafs sich das durch Rotation von Trapez $ABDC$ erzeugte Volumen zu dem durch Rotation des Halbkreises erzeugten $= m : 1$ verhält.

Lösung: $AC = \frac{1}{2} r\left(\sqrt{2m+1} + \sqrt{2m-3}\right)$;

$BD = \frac{1}{2} r\left(\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-3}\right)$.

(*109*) Journ. élém. XIII, 285.

105. Gegeben ein Kreis mit dem Durchmesser $AB = 2r$; in demselben eine Sehne AC, welche ein Segment AEC abschneidet, so zu ziehen, dafs bei der Rotation der Figur um AB das durch AEC erzeugte Volumen $m$mal so grofs ist, wie das durch $\triangle ACD$ erzeugte ($CD \perp AB$).

Lösung: $AD = r\frac{(2m-1)}{m}$; $CD = \frac{r}{m}\sqrt{2m-1}$.

(*110*) Journ. élém. XIII, 285.

106. Über $AB = 2r$ ist ein Halbkreis beschrieben und in der Entfernung $\frac{1}{2} r$ ist $CD \parallel AB$ gezogen. Das Volumen, welches $ABCD$ bei der Rotation um AB beschreibt, ist zu berechnen.

Lösung: Vol. $= \frac{1}{6}\pi r^3\left(8 - 3\sqrt{3}\right)$.

(*111*) Journ. élém. XIII, 285.

107. In einem Kreise, dessen Radius r ist, soll parallel mit dem Durchmesser CD eine Sehne AB, welche das Segment AFB abschneidet, so gezogen werden, daſs bei der Rotation der Figur um CD das durch Segment AFB beschriebene Volumen gleich dem durch $\triangle AKB$ beschriebenen ist.

Lösung: $\sphericalangle FKA = 45^0$.

(*112*) Journ. élém. XIII, 286.

108. Auf $AB = a$ einen Punkt C so zu bestimmen, daſs, wenn man über AC einen Halbkreis beschreibt, von B an denselben die Tangente BD zieht, welche eine auf AB in A errichtete Senkrechte in E trifft und die Figur um AB rotieren läſst, das Verhältnis der Flächen erzeugt durch Bogen AD und durch $BE = m$ sei.

Lösung: $AC = \frac{2a(1+m) \pm 2a\sqrt{1-2m}}{4+m}$.

(*113*) Journ. élém. XIII, 286.

109. Gegeben ein Kreisquadrant AMB mit Radius r; auf MB den Punkt D so zu bestimmen, daſs, wenn man $DC \parallel MA$ bis zum Durchschnitt mit dem Kreise zieht und die Figur um MA rotieren läſst, Vol. $AMC = m$ Vol. CMD ist.

Lösung: $MD = \frac{r}{2m}\sqrt{4m^2-1}$.

(*114*) Journ. élém. XIII, 286.

110. Auf der Centrale $KK' = a$ zweier gleichen Kugeln mit dem Radius r einen Punkt A so zu bestimmen, daſs, wenn man an beide die Tangenten AB und AD, resp. AB' und AD' zieht, und die Figur um KK' rotieren läſst, die Summe der durch die Bogen BD und $B'D'$ erzeugten Kalotten gleich der halben Fläche einer Kugel ist.

Lösung: $KA = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a(a-4r)}\right)$.

(*115*) Journ. élém. XIII, 287.

111. Von einem Punkte S auſserhalb eines Kreises K ist an denselben die Tangente SA und durch den Mittelpunkt K die Sekante $SBKC$ gezogen. Der Berührungspunkt A teilt den Halbkreis BAC in zwei Bogen AMB und ANC; ferner sei $AD \perp BC$. Zu beweisen, daſs, wenn die Figur um CS rotiert, Vol. $SAMB = \frac{1}{3}\pi SB^2 \cdot KD$ und Vol. $SANC = \frac{1}{3}\pi SC^2 \cdot KD$ ist.

(*236*) Nouv. Ann. XVI, 28.

112. Wenn man einen Kreisabschnitt um den parallel zu seiner Sehne ($2s$) gezogenen Durchmesser rotieren läſst, so entsteht ein Körper, dessen Inhalt $\frac{4}{3}\pi s^3$ ist.

(430) Sievers XV, 523. XV, 524.

113. Gegeben ist ein Kreis um O mit dem Radius r, in welchem zwei auf einander senkrechte Durchmesser AB und MD gezogen sind; beschreibt man um M mit MA einen Kreis, so entsteht eine Sichel $AMBC$, deren Schwerpunkt S ermittelt werden soll.*)

Lösung: $SO = \frac{3\pi + 2}{2(\pi + 1)} r$.

(444) Müsebeck XV, 613. XVI, 267.

114. (Verallgemeinerung der vorigen Aufgabe.) Gegeben sind zwei sich schneidende Kreise um O_1 und O_2 mit den Radien r_1 und r_2 durch die Gleichungen $x^2 + y^2 = r_1^2$ und $(x - \xi)^2 + y^2 = r_2^2$. Der Schwerpunkt S der von ihnen gebildeten Sichel soll bestimmt werden.

Lösung: $SO_1 = \frac{h_2 S_2 - h_1 S_1}{S_2 - S_1}$, wo h_1 und h_2 die Abstände der Mittelpunkte O_1 und O_2 von AB, S_1 und S_2 die Inhalte der Segmente AM_1B und AM_2B bedeuten. (O_1O_2 schneide die Kreise resp. in M_1 und M_2).

(445) Müsebeck XV, 613. XVI, 268.

115. Zieht man von einem Punkt B an den Kreis O die Tangenten BA und BC, fällt $AD \perp OC$ und läſst die Figur um OC rotieren, so ist das Volumen, welches durch das gemischtlinige Dreieck ABC erzeugt wird, gleich dem durch BCD erzeugten.

Lösung: Vol. $ABC = \frac{1}{3} \pi CD \cdot BC^2$.

(326) Journ. élém. XVIII, 358.

116. O und O' seien zwei Kreise mit den Radien r und r_1, welche sich in C von auſsen berühren; von ihrem äuſseren Ähnlichkeitspunkt S seien an O und O' die gemeinschaftlichen äuſseren Tangenten $SA'A$ und $SF'F$ gezogen; die gemeinschaftliche Tangente in C trifft AA' in B; das über AA' liegende Segment des Kreises $AA'F'F$ heiſse AHA'. Rotiert nun die Figur um SO, so ist das Volumen, welches zwischen den Kugeln liegt, halb so groſs wie das durch Segment AHA' erzeugte Volumen, also Vol. $ACA' = \frac{1}{2}$ Vol. AHA'.

(327) Journ. élém. XVIII, 358.

117. a) Volumen ACA' der vorigen Aufgabe ist $\frac{4}{3} \pi \frac{r^2 r_1^2}{r + r_1}$.

b) Volumen $OAA'O'$ der vorigen Aufgabe ist

$$\frac{4}{3} \pi \frac{r r_1}{r + r_1} (r^2 + r r_1 + r_1^2).$$

(328—329) Journ. élém. XVIII, 358—359.

---

*) Der Inhalt der um AB rotierenden Sichel $ACBM$ ist $r^3 \pi (3\pi + 2)$.

118. Zieht man von einem Punkt A aufserhalb eines Kreises O (Radius r) den Durchmesser $ACOC'$ und die Tangente AB, fällt man ferner noch $BD \perp AO$ und läfst die Figur um AO rotieren, so ist das durch das gemischtlinige Dreieck ABC erzeugte Volumen gleich $\frac{1}{3}\pi AC^2 \cdot OD$; und das durch das gemischtlinige Dreieck ABC' erzeugte Volumen $\frac{1}{3}\pi AC'^2 \cdot OD$.

(*330*) Journ. élém. XVIII, 359.

119. Gegeben ist Kreis (O, r) mit dem festen Durchmesser AOB. Den Winkel φ zu berechnen, welchen der Durchmesser COD mit AOB bilden mufs, damit bei der Rotation der Figur um AB sich das durch das Segment AC erzeugte Volumen V_1 zu dem durch Segment AD erzeugten Volumen V_2 wie $1:3$ verhält.

Lösung: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$.

(*676*) Nyt Tidsskrift. XXV, 361.

120. $\sphericalangle AOC = \varphi$, welchen zwei Durchmesser AOB und COD eines Kreises bilden, so zu bestimmen, dafs die durch die Segmente AC und BC bei der Rotation der Figur um AOB erzeugten Volumina sich wie $1:9$ verhalten.

Lösung: $\varphi = 60^0$.

(*480*) Mathesis XXII, 353.

121. Ein Kreisabschnitt rotiert um eine Achse, die seiner Sehne AB in der Entfernung d parallel läuft, so dafs der Bogen der Achse die konvexe Seite zukehrt. Unter welcher Bedingung ist die cylindrische Rotationsfläche der Sehne gleich der sanduhrähnlichen des Bogens?

Lösung: Ist M der Mittelpunkt, x der Radius des Kreises und $\sphericalangle AMB = 2\alpha$, so mufs $\frac{r}{d} = \frac{\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}$ sein.

(1245) Krüger XXV, 48. XXV, 424.

122. Ein Winkel von 45^0 dreht sich um einen seiner Schenkel, der gegen eine feste Ebene schief geneigt ist und erzeugt dadurch einen schiefen Kegel mit elliptischer Basis. Es soll der Inhalt V dieses Kegels durch b, die kleine Halbachse der Ellipse, ausgedrückt werden.

Lösung: $v = \frac{1}{3}\pi b^3$.

(1150) Kosch XXIII, 511. XXIV, 267.

123. Es soll der Inhalt I und die Höhe s des Schwerpunktes über die Grundfläche eines der drei folgenden Körper berechnet werden, wenn die Grundfläche g als ein beliebig eingegrenztes ebenes Flächenstück und der Abstand der Spitze S von derselben

oder der Abstand einer zur Grundfläche parallelen Schneide S durch die Höhe h gegeben ist.

a) Die Spitze S sei mit einem beliebigen Punkt F im Innern von g geradlinig verbunden. Ferner sei durch einen Punkt A des Umfanges von g eine Parabel gelegt, welche SF in S berührt und deren zu S gehöriger Durchmesser parallel FA liegt. Durchläuft nun A den Umfang von g, so beschreibt SA den Mantel des auszumessenden Körpers.

b) Durch die Spitze S sei die feste Gerade T parallel der Ebene durch g gezogen, und es schneide eine um T drehbare Ebene die Grundfläche g in der Sehne AB. Alsdann beschreibt die Parabel, welche durch A und B geht und T in S berührt, den Mantel des auszumessenden Körpers.

c) Durch die Schneide S sei die Ebene E parallel der Ebene durch g gelegt. Dann soll der Mantel des Körpers durch eine über den Umfang von g hingleitende Parabel beschrieben werden, deren Ebene parallel verschiebbar ist, und welche aufserdem stets E in einem beweglichen Punkt von S berührt.

Lösung: a) $I = \frac{1}{5} gh$; $s = \frac{1}{6} h$. b) $I = \frac{2}{5} gh$; $s = \frac{2}{7} h$. c) $I = \frac{2}{3} gh$; $s = \frac{2}{5} h$.

(775) Weinmeister XIX, 272. XX, 29.

---

§ 5. Maxima und Minima.

1. Ist innerhalb einer dreiseitigen körperlichen Ecke ein Punkt gegeben, so wird diejenige Ebene von dieser Ecke die kleinste Pyramide abschneiden, für welche der Punkt der Schwerpunkt des Schnittdreiecks wird.

Lösung: (G.) und (K. M.)

(242) Fuhrmann XIII, 283. XIV, 188.

2. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ durch die Diagonale $2a$; O sei der Durchschnittspunkt der Diagonalen; auf OA, OB, OC, OD sollen gleiche Strecken x bis A', B', C', D' abgetragen werden; errichtet man auf AC und BD in A', B', C', D' Senkrechte, so entsteht das Quadrat $PQRS$, welches als Grundfläche einer Pyramide genommen wird, deren Seitenflächen die gleichschenkligen Dreiecke PAQ, QBR, RCS, SDP sind. Wie grofs mufs x sein, wenn die Pyramide ein Maximum werden soll?

Lösung: (R.) $x = \frac{2}{5} a$.

(457) Journ. élém. XXI, 522.

3. Um den Mittelpunkt O des regulären n Ecks $ABC\ldots N$ hat man mit dem Radius x ($x <$ Radius ϱ des Inkreises) einen

Kreis beschrieben, welcher AO in A_1, BO in B_1, ... trifft. Über diesem Kreise wird ein gerader Kegel konstruiert, dessen Seite $s = AA_1$ ist. Wie grofs mufs man x nehmen, damit jener Kegel ein Maximum ist?

Lösung: (R.) $x = \frac{2}{5} r$, wenn $OA = OB = \cdots r$ ist.

(1244) Steckelberg XXIV, 609. XXV, 424.

4. In einen gegebenen Kegel mit Kreisbasis soll derjenige gerade Cylinder eingestellt werden, um welchen sich die kleinste Kugel konstruieren läfst. Der Radius der Kugel soll gezeichnet werden.*)

Lösung: (G.).

(99) v. Schäwen XI, 33. XI, 365.

5. Den Radius r einer Kugel zu bestimmen, in welcher zu einer Calotte von konstanter Fläche c ein Segment gehört, dessen Volumen ein Maximum ist.

Lösung: (R.) $r = \sqrt{\frac{c}{2\pi}}$.

(*42*) Journ. élém. XI, 367.

6. Gegeben die Gerade $OA = a$; um O als Mittelpunkt soll eine Kugel so beschrieben werden, dafs *a*) die sphärische Oberfläche der von A aus gesehenen Calotte ein Maximum ist, und *b*) das Volumen des betreffenden Segmentes ein Maximum ist.

Lösung: (R.) *a*) $r = \frac{2}{3} a$. *b*) $r = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

(*43*) Journ. élém. XI, 367.

7. Gegeben ist ein um eine Kugel (Mittelpunkt K und Radius r) beschriebener Cylinder. Durch zwei Punkte A und A' der Cylinderachse, welche von K gleich weit entfernt sind, legt man an die Kugel zwei Berührungskegel ABC und $A'B'C'$. Das Minimum der Fläche zu finden, welche aus den beiden Kegelmänteln und dem Cylindermantel $BB'C'C$ besteht.

Lösung: (R.) $\cos BAK = \frac{2}{3}$.

(*192*) Journ. élém. XV, 41.

8. In ein volles kegelförmiges Weinglas, dessen Durchschnitt ein gleichschenkliges Dreieck ABC ist, mit der Tiefe $CD = h$ und dem Winkel an der Spitze $ACB = 2\alpha$, soll die Kugel gelegt werden, welche bewirkt, dafs möglichst viel Wein überfliefst.

Lösung: (R.) $x = \frac{h \sin\alpha}{\sin\alpha + \cos 2\alpha}$.

(*194*) Educ. Times. XV, 42.

---

*) Die analoge planimetrische Aufgabe lautet: In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck zu zeichnen, dessen Diagonale ein Minimum ist.

9. Man soll die Gestalt eines Kugelsektors bestimmen, der mit der Spitze nach oben gerichtet bis zum Grundkreise in Wasser einsinkt, wenn sein spezifisches Gewicht ein Maximum erreicht.

Lösung: (R.) Die Höhe des zum Sektor gehörigen Segments ist $\frac{3}{2} r$.

(1078) Krüger XXII, 595. XXIII, 343.

10. Man soll in einen geraden Kegel ACB eine Kugel konstruieren, welche den Mantel berührt und von der Grundfläche geschnitten wird, so dafs das innere Kugelsegment ein Maximum ist. (Beispiel: Der Achsenschnitt des Kegels sei ein gleichseitiges Dreieck.)

Lösung: (R.) Setzt man $\sphericalangle ACB = \gamma$, die Höhe des Segments gleich x und die Höhe des Kegels gleich h, so ist

$$x = \frac{2h \sin\frac{1}{2}\gamma}{1 + 2\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

(1208) Steckelberg XXIV, 343. XXV, 113.

11. In eine Kugel mit dem Radius r soll über einem gröfsten Kugelkreise ein abgestumpfter Kegel so konstruiert werden, dafs, wenn man von demselben den über der oberen Grundfläche konstruierten Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, fortnimmt, der Rest ein Maximum wird.

Lösung: (R.). Der fortgenommene Kegel mufs gleichseitig sein.

(*456*) Journ. élém. XXI, 522.

12. Ein gegebenes Dreieck ABC rotiert um eine durch C gezogene Gerade; welche Lage mufs dieselbe haben, damit das Volumen ein Maximum ist?

Lösung: (G.). Die veränderliche Gerade mufs senkrecht zu CS (S Schwerpunkt von ABC) stehen.

(*191*) Journ. élém. XV, 41.

13. Von einem gleichschenkligen Trapez kennt man die beiden gleichen Seiten $AD = BC = b$ und eine parallele Seite $AB = a$. Wie grofs mufs die andere parallele Seite c sein, damit das durch Rotation der Figur um a erzeugte Volumen ein Maximum ist?

Lösung: (R.) $c = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4b^2}{3}}$.

(*193*) Journ. élém. XV, 41.

14. Eine gegebene Gerade $AB = a$ durch den Punkt X so in zwei Teile $AX = x$ und $BX = a - x$ zu teilen, dafs, wenn man über AX ein gleichseitiges Dreieck AXC und über BX ein

Quadrat $XBDE$ konstruiert und die Figur um AB rotieren läfst, die Summe der erzeugten Flächen ein Minimum ist.

Lösung: (R.) $x = \frac{4a(4-\sqrt{3})}{13}$.

(*334*) Mathesis. XVIII, 360.

15. Auf dem gegebenen Durchmesser DE eines Kreises mit dem Radius r soll man einen Punkt C durch $DC = x$ so bestimmen, dafs, wenn man auf DE in C die senkrechte Sehne AB errichtet, über AB einen Halbkreis AFB konstruiert und die Figur um DE rotieren läfst, die durch $ADBFA$ erzeugte Fläche möglichst grofs sei.

Lösung: (R) $x = \frac{2}{3} r$.

(*454*) Mathesis. XXI, 522.

16. In ein gegebenes Dreieck ABC soll ein Reckteck, dessen eine Seite auf AB fällt, so gezeichnet werden, dafs bei der Rotation der Figur um AB der durch das Reckteck erzeugte Cylinder möglichst grofs sei.

Lösung: (R.) Die zu AB senkrechte Seite ist $x = \frac{2}{3} h_c$, die zu AB parallele $y = \frac{1}{3} c$.

(*455*) Journ. élém. XXI, 522.

III. Beschreibende Geometrie.*)

1. Durchdringung eines Cylinders und eines Kegels. Gegeben: 1) ein Cylinder, der zur Basis einen in der Horizontalprojektionsebene gelegenen Kreis C hat, und dessen erzeugende Linien parallel einer zur Vertikalebene parallelen Linie BG, $B'G'$ sind, welche unter einem Winkel von 45^0 gegen xy geneigt ist: 2) ein Kegel, dessen Grundfläche ein in der Horizontalebene gelegener Kreis C_1 ist und dessen Spitze in SS' auf der erzeugenden Linie BG, $B'G'$ des Cylinders liegt. Der Grundkreis des Cylinders berührt die Grundfläche des Kegels innerlich in S; $CS = CB = 0{,}025$ m; $C_1S = 0{,}055$ m; $BB' = 0{,}11$ m. Man soll 1) die Projektionen des Durchschnitts des Kegels und Cylinders finden; 2) den Teil des Cylinders darstellen, welcher nach Wegnahme des Kegels übrig bleibt.

(26_1) Nouv. Ann. X, 112. —

*) Vergl. Holzmüller: Einige Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Kartographie, die mit der Theorie der isogonalen Verwandtschaft zusammenhängen. XIV, 403—425. Beyel: Bemerkung zu der Aufgabe: Die Punkte zu konstruieren, welche gegebene Abstände von 3 zu einander senkrechten Achsen haben. XVII, 93—95.

2. Durchdringung eines körperlichen Ringes und eines Umdrehungskegels.

Die Achse des körperlichen Ringes yy' ist vertikal in einer Entfernung von 0,130 m von der vertikalen Projektionsebene und in der Mitte des Blattes; der Meridiankreis hat 0,055 m Radius; er berührt die Achse des Ringes und die horizontale Projektionsebene. Der Kegel berührt die Horizontalebene in einer erzeugenden Linie sa, $s'a'$, welche parallel der Projektionsachse ist und die Achse des Ringes schneidet; seine Spitze (s, s') liegt in einer Entfernung von 0,055 m von der Achse des Ringes und sein Winkel an der Spitze beträgt 45^0. Es soll derjenige Teil des Kegels dargestellt werden, welcher nach Wegnahme des Ringes übrig bleibt.

(27_1) Nouv. Ann. X, 112. —

3. Wie gewöhnlich bedeute der unterhalb der Geraden AB liegende Ebenenteil die sogenannte horizontale Grundebene, der obere Teil die vertikale Bildebene, C den Augenpunkt, D den Distanzpunkt, mithin AC die Augenhöhe und CD die Distanz. Das übliche Verfahren zur Bestimmung der perspektivischen Projektion eines der Grundebene angehörigen Punktes P besteht dann bekanntlich darin, dafs man von P auf AB die Senkrechte PM fällt, $MN = MP$ nimmt, und die Geraden MC, ND zieht, welche sich im gesuchten Punkte P schneiden. Hieran knüpft sich folgender zu beweisender Satz: Zieht man durch N parallel zu AD eine Gerade, welche der verlängerten PM in Q begegnet, so liegen die Punkte A, P, Q in einer Geraden. Demnach läfst sich die Projektion P auch dadurch finden, dafs man den Punkt Q wie vorhin bestimmt und MC durch AQ schneidet.

Dieses Verfahren ist sehr bequem in den Fällen, wo es sich nicht um eine vereinzelte Figur, sondern um ein eigentliches Bild handelt, für welches die Distanz immer ziemlich grofs — mindestens gleich der Weite des deutlichen Sehens — genommen werden mufs. Statt nämlich von N aus nach dem weit entfernten und meistens über den Bildrahmen hinaus fallenden Punkt D zu ziehen, braucht man nur durch N eine Gerade bestimmter Richtung zu legen; diese Richtung bestimmt man ohne D mittelst eines dem Dreiecke ACD ähnlichen Dreiecks A_1CD_1. Noch kürzer wird die Konstruktion durch Zuhilfenahme eines Instrumentes, welches aus 2 um einen Punkt drehbaren Messingleisten besteht (analog einem gewöhnlichen Zirkel oder einem alten Proportional-Circul), die man zu Anfang der Arbeit auf den erforderlichen Winkel BAD einstellt und mittelst einer am Kopfe befindlichen Schraube festschraubt. Verschiebt man den einen Schenkel längs des an der Reifsschiene befindlichen Lineals, so kann man längs des anderen Schenkels die Gerade NQ ziehen.

(184) Schlömilch XII, 363. XII, 364.

4. Gegeben sind die Abstände *I*, *II*, *III* eines Punktes *P* im Raume von den Achsen dreier einander rechtwinklig schneidenden Ebenen. Es sollen die drei Projektionen dieses Punktes bestimmt werden.

(494) PIEPGRAS XVI, 205. XVI, 501.

5. Durch einen gegebenen Punkt a) diejenige Gerade, b) diejenige Ebene zu legen, welche mit den Projektionsebenen *I*, *II* gleiche Winkel α bildet. Grenzen von α!

(556) HALUSCHKA XVI, 503. XVII, 284.

6. Es seien zwei windschiefe Gerade g und h durch ihren Normalabstand n und ihren Neigungswinkel ω gegeben; bezeichnen ferner: s eine Strecke von g zu h, α und β die Winkel (sg) und (sh), so ist der Abstand sn zu suchen, wenn s gegeben und a) $\sphericalangle \alpha = 90^0$, b) $\sphericalangle \alpha = \beta$ ist.

(623) HALUSCHKA XVII, 447. XVIII, 194.

7. a) Die Projektionen einer geraden Linie zu bestimmen, welche mit den Projektionsebenen die Winkel α und β bildet und von einem durch seine Projektionen gegebenen Punkt den Abstand e hat; b) die Spuren einer Ebene zu bestimmen, welche mit den Projektionsebenen *I* und *II* die Winkel α und β bildet und von einem gegebenen Punkt P den Abstand c hat.

(651) PIEPGRAS XVIII, 36. XVIII, 438.

8. Eine Ebene ist gegeben durch die Projektionen dreier Punkte. Man soll mittels der Eigenschaften affiner Figuren die Projektionen eines beliebigen Punktes der Ebene bestimmen, ohne die Spuren der Ebene zu zeichnen.

(1284) BÖKLE XXV. 193. XXVI, 25.

E.

Neuere Geometrie des Dreiecks.

---

§ 1. Anwendungen der Sätze von Menelaus und Ceva.

1. Wenn die Durchschnittspunkte X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 zweier vom Punkte K ausgehender Transversalen paarweis symmetrisch zu den Seitenmitten eines Dreiecks liegen, so verhält sich $KX : KX_1 = YZ : Y_1 Z_1$.

Beweis: (G. 2).

(908) Kücker XX, 594. XXI, 348.

2. Schneiden sich drei Ecktransversalen AD_a, BD_b, CD_c eines Dreiecks in einem Punkte P, so schneiden sich auch in einem Punkte

a) die drei Verbindungslinien ihrer Halbierungspunkte E_a, E_b, E_c mit den Halbierungspunkten G_a, G_b, G_c der zugehörigen Dreiecksseiten.*)

Beweis: (G. 2); (P. G.); (K. M.) und durch Graſsmann'sche Ausdehnungslehre.

b) Die drei Verbindungslinien der Halbierungspunkte F_a, F_b, F_c der oberen Abschnitte mit G_a, G_b, G_c.

Beweis: (G. 3); (P. G.); (K. M.) und durch Graſsmann'sche Ausdehnungslehre.

(276) Kiehl XIV, 99. XIV, 516.

3. (Im Anschluſs an den vorigen Satz.) Teilt man die oberen Abschnitte dreier sich in einem Punkt schneidender Ecktransversalen AA', BB', CC', eines Dreiecks ABC in gleichem Verhältnis und verbindet die Teilpunkte A_2, B_2, C_2 mit den

---

*) Ist P der Mittelpunkt des Inkreises oder eines Ankreises, so liegt der Durchschnittspunkt R auf der Verbindungslinie des Mittelpunktes des Inkreises (bez Ankreises) und dem Grebe'schen Punkt K. — Ist P der Grebe'sche Punkt, so liegt R auf der Verbindungslinie des Grebe'schen Punktes mit dem Winkelgegenpunkt D' zu D, wo D das Projektionscentrum der Dreiecke ABC und seines Brocard'schen Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ ist.

Mitten A_1, B_1, C_1 der gegenüberliegenden Dreiecksseiten, so schneiden sich die Verbindungslinien in einem Punkte*)

Beweis: (P. L.).

(782) KIEHL XIX, 346. XX, 112.

4. Gegeben $\triangle ABC$ und ein Punkt O in seiner Ebene; AO, BO, treffen die CO Gegenseiten resp. in a, b, c; man konstruiert ein zweites Dreieck $A'B'C'$, dessen Seiten parallel AO, BO und CO sind; durch A', B', C' zieht man resp. zu BC, CA, AB Parallelen, welche die Gegenseiten resp. in a', b', c' treffen.

1) $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$ schneiden sich in einem Punkte O'.

2) Fällt man von O' auf die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ die Senkrechten $O'\alpha'$, $O'\beta'$, $O'\gamma'$, so ist

$$O'\alpha' : O'\beta' : O'\gamma' = \frac{1}{OA} : \frac{1}{OB} : \frac{1}{OC}.$$

Beweis: (G.).

(*274*) Mathesis XVI, 506. XVI, 506.

5. Liegen zwei Punkte schief symmetrisch in Bezug auf eine Achse und zieht man durch dieselben je zwei beliebige Strahlen, die sich paarweise auf der Achse schneiden, so treffen sich die vier Strahlen noch in zwei Punkten, die auch in derselben Weise symmetrisch gelegen sind.

Beweis: (G.); (H. B.).

(1175) RULF XXIV, 104. XXIV, 452.

6. Legt man durch zwei Punkte je drei beliebige Gerade, zählt man die durch den einen gehenden als 1te, 3te und 5te, die durch den anderen gehenden als 2te, 4te, 6te, bezeichnet man ferner den Schnittpunkt der 1ten und 2ten mit I, den der

---

*) Besondere Fälle: 1) Verbindet man den Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises mit den Ecken und verlängert diese Strecken um sich selbst, so liegen die Endpunkte auf den Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Seiten.

2) B § 1 Nr. 144.

3) Verbindet man den Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises mit den Ecken, verlängert diese Strecken um $\frac{1}{3}$ ihrer Länge über den Mittelpunkt und verbindet die Endpunkte der Verlängerungen mit den Mitten der Seiten, so werden die Verbindungsgeraden durch den Höhenschnittpunkt wie 2 : 3 äußerlich geteilt.

4) Sind A_2, B_2, C_2 die zweiten Endpunkte der von ABC ausgehenden Durchmesser des Umkreises, so ist P Höhenschnittpunkt.

5a) Sind A_2, B_2, C_2 die Mitten der oberen Abschnitte, so ist P der Mittelpunkt einer Ellipse, auf welcher die neun Punkte A', B', C', A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 liegen.

5b) Sind AA', BB', CC' noch die Höhen von ABC, so wird die Ellipse zum Feuerbach'schen Kreise.

Der Satz gilt auch allgemein für einen Punkt des Raumes.

2ten und 3ten mit II, ... den der 6ten und 1ten mit VI, so gehen die Verbindungslinien $\overline{I\,IV}$, $\overline{II\ V}$, $\overline{III\ VI}$, durch einen Punkt.

Beweis: Spezialfall des Brianchon'schen Satzes.

(600) Holzmüller XVII, 288. —

Die Sätze von Menelaus und Ceva sind aufserdem bei einzelnen Beweisen des Abschnitts B benutzt; besonders bei B § 1 Nr. 109—122, 164—166; 169; § 2 Nr. 8 u. a.

---

§ 2. Winkelgegentransversalen und Winkelgegenpunkte.*)

1. Durch die Ecke C eines Dreiecks ABC zieht man eine Parallele CD zu AB und konstruiert zu CD die Gegentransversale, welche AB in E trifft, so dafs also $\sphericalangle ACD = BCE$ ist; zieht man ferner die Gegenmittellinie CF, so ist

$$AE : BE = AF : BF.$$

Beweis: (G.).

(*379*) Journ. élém. XX, 34.

2. Verbindet man den Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks ABC mit dem Mittelpunkt F der Strecke EG, welche von dem Radius CO des Umkreises durch die von A und B gefällten Höhen abgeschnitten wird, so steht HF senkrecht auf der Gegenmittellinie CK_c.

Beweis: (H. B.).

(*381*) Educ. Times. XX, 35.

3. Zieht man im Dreieck ABC die Mittellinie CM; wird $\sphericalangle ACM$ an AC in A nach innen zu, ebenso $\sphericalangle BCM$ an BC in B angetragen, schneiden sich ihre Schenkel in F und fällt man FD und FE senkrecht auf bzw. AC und BC, so ist $DE \perp CM$.**)

Beweis: (G. T. 3); (P. G.).

(1001) Rulf XXI, 592. XXII, 426.

---

*) Vergl. auch B § 1 Nr. 57, § 5 Nr. 21, 22, 138; C § 5 Nr. 38; G § 2 Nr. 29 sowie die Aufgaben B § 9 Nr. 67, 68, 103. F § 1 Nr. 11; 33; 34; 50; 57. Die Definition ist XIV, 94 gegeben.

**) Zusätze: 1) CF ist Gegenmittellinie von CM und F der Punkt, in dem die Gegenmittellinie den Brocard'schen Kreis zum zweitenmal schneidet.

2) $\triangle AFC \sim CFB$.

3) Die Verlängerung von CF halbiert $\sphericalangle AFB$.

4) Zieht man $FG \perp AB$, so ist GF Mittellinie des Dreiecks DEG.

5) Trägt man $\sphericalangle DGF$ an DE in D und $\sphericalangle EGF$ an ED in E an, so schneiden sich die beiden anderen Schenkel auf der Mittellinie in F.

6) $AF : BF = b^2 : a^2$. Tafelmacher.

4. Eine von der Spitze eines Dreiecks ABC zur Grundlinie gezogene Gerade AX werde von den Mittelloten auf AC und AB in Y und Z geschnitten; ferner sei X' der Schnittpunkt von CY und BZ. AX und AX' sind Gegentransversalen, wenn AX Mittellinie ist.

Beweis: (P. G.); (G.); (K. M.).

(1177) Emmerich XXIV, 104. XXIV, 453.

5. Durch den Fufspunkt K_a der Gegenmittellinie AK_a des Dreiecks ABC sei im Winkel BAC die zu BC Antiparallele $B'C'$ gezogen.

a) Die gemeinschaftliche Sehne NN' der über BC und $B'C'$ als Durchmessern gezeichneten Kreise geht durch K_a.

b) Die Geraden AN und AN' liegen symmetrisch zur Halbierungslinie des Winkels BAC'.

Beweis: a) (G.); (G. T.). b) (G.); (H. B.).

(1248) Mathesis XXV. 49. XXV, 427.

6. Bestimmt man in einem Dreieck ABC den Punkt O so, dafs $\sphericalangle AOB = BOC = COA$ ist und beschreibt man um A, B, C Kreise, welche bezüglich BO und CO, CO und AO, AO und BO berühren, so sind die letzteren gemeinschaftliche innere Tangenten an den betreffenden Kreisen. Die zweiten gemeinschaftlichen inneren Tangenten schneiden sich in einem Punkt O', welcher der Winkelgegenpunkt von O ist.*)

Beweis: (G. T.); (P. G.); (G.). Vergl. B § 9 Nr. 116.

(365) Stoll XV, 125. XV, 434.

7. In einem Dreieck ABC verlängere man die Höhen, bis sie den Umkreis in A_1, B_1, C_1 schneiden; BC_1 und CB_1 mögen sich in M_a, CA_1 und AC_1 in M_b, und AB_1 und BA_1 in M_c schneiden. Dann schneiden sich AM_a, BM_b, CM_c in einem Punkte F', welcher der Winkelgegenpunkt des Mittelpunktes F des Feuerbach'schen Kreises ist.

Beweis: (G.); (G. T. 2); (K. M.).

(682) Fuhrmann XVIII, 277. XIX, 25.

8. Der Winkelgegenpunkt Q von dem Punkte P, der die Eigenschaft hat, dafs die Fufspunkte der Lote auf die Seiten ein gleichseitiges Dreieck bilden, ist der Schnittpunkt der Transversalen von den Ecken nach den Spitzen der gleichseitigen Dreiecke über den Gegenseiten.

Beweis: (G. 3); (G. T. 2).

(409) Fuhrmann XV, 359. XVI, 19.

---

*) O' ist der Schnittpunkt der Apollonischen Kreise für CB und das Teilverhältnis $CA : AB$ u. s. w. Artzt.

9. a) Konstruiert man über den Seiten eines Dreiecks ABC nach aufsen gleichseitige Dreiecke, so schneiden sich die bezüglichen Umkreise in einem Punkte Q. In gleicher Weise ergiebt sich ein zweiter Punkt Q' durch die nach innen errichteten gleichseitigen Dreiecke. Q und Q' sind die Winkelgegenpunkte von P und P' (§ 8 Nr. 1);

b) QQ' und PP' schneiden sich im Grebe'schen Punkt K, PQ' und $P'Q$ im Schwerpunkt S, PQ und $P'Q'$ sind parallel.

Beweis: a) Vgl. Nr. 8. b) (K. M.); (G.).

(918) Glaser XXI, 31. XXI, 421.

10. a) Ist O das Centrum des Inkreises*) von ABC, so sind die Kreise BOC, COA, AOB ihre eigenen Winkelgegenpunktskurven.

b) Ist O' ein beliebiger Punkt und O'' sein Winkelgegenpunkt, so ist der Kreis $BO'C$ die Winkelgegenpunktskurve des Kreises $BO''C$ und die Winkel, unter denen sich die beiden Kreise in C resp. B schneiden, werden halbiert von dem in a) genannten Kreise.

Beweis: a) (G.) b) (G. 2).

(840) Artzt XX, 115. XX, 504.

11. a) Bezüglich zweier Winkelgegenpunkte P_1 und P_2, die innerhalb eines Dreiecks liegen, bestehen die Gleichungen
$\alpha_1 + \alpha_2 = 180^0 + \alpha$, $\beta_1 + \beta_2 = 180^0 + \beta$; $\gamma_1 + \gamma_2 = 180^0 + \gamma$, wo α_1, α_2 u. s. w. die Winkel BP_1C, BP_2C u. s. w. bedeuten.

b) Wie sind die Winkel α_1, α_2 u. s. w. aufzufassen, wenn die obigen Gleichungen auch für Winkelgegenpunkte, die aufserhalb des Dreiecks liegen, gültig bleiben sollen?

Beweis: a) (G.). b) (G.).

(907) Glaser XX, 594. XXI, 347.

12. a) Läfst man von irgend einem Punkte P in der Ebene eines Dreiecks nach den Höhenfufspunkten Strahlen gehen, die in jenen Punkten von den betreffenden Dreiecksseiten reflektiert werden, so schneiden sich die drei reflektierten Strahlen in einem Punkte P'.

b) Ist P unendlich weit entfernt, so liegt P' auf dem Feuerbach'schen Kreise.**)

Beweis: (G.); (G. T.); (K. M.).

(1130) Glaser XXII, 352. XXIV, 101.

---

*) Der Satz ist auch richtig, wenn O das Centrum eines Ankreises ist.
Dubois.

**) Verallgemeinerung: Die Fufspunkte der durch einen beliebigen Punkt Q gezogenen Ecktransversalen eines Dreiecks ABC seien A_1, B_1, C_1; nach diesen Punkten lasse man von einem beliebigen Punkte P Strahlen gehen und konstruiere zu A_1Q, A_1C und A_1P, dann zu B_1Q,

13. Es seien x, y, z die Abstände eines Punktes P von den Seiten, und x', y', z' die des Winkelgegenpunktes, r der Radius des Umkreises, e der Abstand des Punktes P vom Mittelpunkt des Umkreises, so ist $x' = \frac{2ryz}{r^2 - e^2}$, $y' = \frac{2rzx}{r^2 - e^2}$, $z' = \frac{2ryx}{r^2 - e^2}$. Ist dann noch e' der Abstand des Winkelgegenpunktes vom Mittelpunkt des Umkreises, so ist

$$xyz = \frac{(r^2 - e^2)^2 (r^2 - e'^2)}{8r^3}; \quad x'y'z' = \frac{(r^2 - e^2)(r^2 - e'^2)^2}{8r^3};$$

also $xx' = \frac{(r^2 - e^2)(r^2 - e'^2)}{4r^3} = yy' = zz'$.

Beweis: (G. T.).

(1019) Fuhrmann XXII, 106. XXII, 508.

14. Für welche Art von Vierecken existiert der Winkelgegenpunkt des Diagonalenschnittpunktes E, d. h. ein Punkt E', für den $\sphericalangle E'AB = E'AD$, $\sphericalangle E'BC = EBA$, $\sphericalangle E'CD = ECB$, $\sphericalangle E'DA = EDC$ ist, wobei AC und BD die Diagonalen bezeichnen?*)

Auflösung: (K. M.); (G. 2).

(1345) Emmerich XXV, 590. XXVI, 427.

---

§ 3. Seitengegentransversalen**) und Seitengegenpunkte.

1. Legt man durch eine Ecke A des Dreiecks ABC zwei Seitengegentransversalen, welche BC in X und X_1 (ist L Mittelpunkt von BC, so ist $LX = LX_1$) und den Umkreis in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ schneiden, so geht $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ durch einen festen Punkt P_a, welcher auf der Verlängerung von BC liegt und dessen Potenz in Bezug auf den Umkreis $= \frac{4r^2 \sin\beta^2 \sin\gamma^2}{\sin(\beta-\gamma)^2} = \frac{h_a^2}{\sin(\beta-\gamma)^2}$ ist.

Beweis: (G. T. 3); (P. G.); (K. M.).

(835) Glaser XX, 33. XX, 431.

2. Wählt man auf jeder Dreiecksseite zwei zur Seitenmitte symmetrisch liegende Punkte P_a, P_a'; P_b, P_b'; P_c, P_c', zieht nach denselben die Ecktransversalen, welche den Umkreis in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ u. s. w. schneiden; werden ferner BC, CA, AB von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$,

---

B_1A, B_1P und zu C_1Q, C_1B, C_1P je den vierten harmonischen Strahl, so schneiden sich diese Strahlen in einem Punkte P'. Verschiebt sich P auf einer Geraden, so beschreibt P' einen Kegelschnitt. Stoll.

*) Die Diagonalen müssen einander rechtwinklig schneiden.

**) Vergl. die Aufgabe B § 9 Nr. 103.

$\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ bez. in X, Y, Z geschnitten, so liegen X, Y, Z in einer festen Geraden.

Beweis: (G.); (G. T.), (H. B.); (K. M.).

(915) Kücker XXI, 31. XXI, 419.

3. Wenn in einem Dreieck zwei Seiten $AC = b$, $AB = c$ und zwei zur dritten Seite gehörende Seitengegentransversalen $AD = p$ und $AE = q$ gegeben sind, so ist

$$a = \sqrt{\frac{2(b^2 - c^2)^2 (b^2 + c^2 - p^2 - q^2)}{(b^2 - c^2)^2 - (p^2 - q^2)^2}}.$$

Beweis: (R.).

(963) Emmerich XXI, 354. XXII, 101.

---

§ 4. Die Segmentärpunkte.*)

1. In jedem Dreieck ABC giebt es zwei Punkte O und O' der Art, dafs sowohl $\sphericalangle OAB = OBC = OCA$, als auch $\sphericalangle O'AC = O'BA = O'CB$ ist; alle diese Winkel haben denselben Wert ϑ. Diese Punkte, welche man in Rücksicht auf ihre geometrische Konstruktion Segmentärpunkte nennen kann, sind zuerst von Clarke 1849 betrachtet worden. Wie derselbe gezeigt hat, wird ϑ durch die Gleichung $\sin(\alpha - \vartheta)\sin(\beta - \vartheta)\sin(\gamma - \vartheta) = \sin\vartheta^3$ bestimmt, durch deren Auflösung sich $\cot\vartheta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$**) ergiebt.

Beweis: (G. T. 2). Angabe der Konstruktion des Winkels ϑ.

(119) Brocard XI, 274. XII, 107—108. 432.

2. Aus der Formel $\cot\vartheta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$ zu entwickeln $\cot 2\vartheta = \dfrac{\sin\alpha^4 + \sin\beta^4 + \sin\gamma^4}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2)}$.

Beweis: (T. R.).

(197) Brocard XIII, 33. XIII, 359.

3. Aus $\cot\vartheta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$ folgt $\operatorname{cosec}\vartheta^2 = \operatorname{cosec}\alpha^2 + \operatorname{cosec}\beta^2 + \operatorname{cosec}\gamma^2$.

Beweis: (T. R.).

(354) Neuberg XV, 39. XV, 353.

---

*) Über die Segmentärpunkte und $\sphericalangle\vartheta$ vergl. auch B. § 1 Nr. 165, 167; C. § 5 Nr. 22—24, sowie die Aufgaben B. § 9 Nr. 29, 69—72, 105, 106, 108, 118; F. § 1 Nr. 12. Lange: Eine Legende vom Brocard'schen Winkel. XX, 181—183, 259—260. Lieber: Erläuterungen zu der Figurentafel des Herrn Brocard XV, 365—366.

**) $\cot\vartheta = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$, $\sin\vartheta = \dfrac{abc}{2r\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

Krimmel, Uhlich und Emmerich haben darauf hingewiesen, dass A. L. Crelle (1816) der Entdecker der Punkte O und O' und des $\sphericalangle\vartheta$ ist. Vergl. die Programmabh. 1889 des Realgymnasiums z. Mülheim a. d. Ruhr.

4. $\cot\vartheta = \begin{vmatrix} \sin\alpha^3 & \sin\beta^3 & \sin\gamma^3 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \sin\alpha^3 & \sin\beta^3 & \sin\gamma^3 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Beweis: (R. 3).
(647) Fuhrmann XVII, 598. XVIII, 355.

5. Im gleichseitigen Dreieck ABC ist stets

$$\cot A = \cot B = \cot C = \frac{1}{3} \cot\vartheta.$$

Aufserdem ist in jedem Dreieck, welches seinem Mittelliniendreieck ähnlich ist, die Cotangente des einen Winkels gleich $\frac{1}{3}\cot\vartheta$.
Beweis: (T. R. 3). Vergl. B. § 1 Nr. 99.
(830b) Artzt XX, 32. XX, 426.

6. Sind die Winkel α, β, γ eines Dreiecks nicht alle einander gleich, so ist die Cotangente des Brocard'schen Winkels gröfser als $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$.
Beweis: (T. R. 2).
(977) Emmerich XXI, 429. XXII, 193.

7. Im spitzwinkligen Dreieck ist die Cotangente des Brocardschen Winkels kleiner, im stumpfwinkligen gröfser als die doppelte Cosekante des doppelten irgend eines der Dreieckswinkel.
Beweis: (T. R.).
(951) Emmerich XXI, 280. XXII, 22.

8. In einem Dreieck, welches seinem Schwerliniendreieck ähnlich ist, ist $\cot\vartheta = \frac{3}{4}c^2 : F = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$.
Beweis: (T. R.). Vergl. B § 1 Nr. 99.
(677b) Artzt XVIII, 198. XVIII, 598.

9. a) Ist $A'B'C'$ das aus den Mittellinien von ABC gebildete Dreieck, so ist

$$\frac{1}{3}\cot\vartheta = \frac{\cot A + \cot A'}{2} = \frac{\cot B + \cot B'}{2} = \frac{\cot C + \cot C'}{2}.$$

b) Ist $A_2B_2C_2$ ein Dreieck, dessen Winkel den Winkeln BKC, CKA, AKB (K Grebe'scher Punkt des Dreiecks ABC) supplementär sind, so ist

$$\frac{\cot\vartheta + \cot\vartheta_2}{3} = \frac{1}{\sin 2\vartheta} \text{ oder } \cot\vartheta_2 = \frac{1}{\sin 2\vartheta} + \operatorname{tg}\vartheta.$$

Beweis: a) (T. R. 2); b) (T. R. 2).
(781) Artzt XIX, 346. XX, 111.

10. Die Linien, welche von den Ecken eines Dreiecks ausgehen und sich in den Segmentärpunkten O und O'*) schneiden, treffen sich noch in drei andern Punkten (BO und CO' in A_1, CO und AO' in B_1, AO und BO' in C_1), welche auf einem Kreise liegen, der durch die Segmentärpunkte geht. Auch ist $\triangle A_1B_1C_1 \sim ABC$.**)

Beweis: (G. 2).

(120) BROCARD XI, 274. XII, 108.

11. Die Brocard'schen Punkte eines gleichschenkligen Dreiecks sind die Schnittpunkte der Mittellinie je eines Schenkels und der Gegenmittellinie des anderen.

Beweis: (T. R. 4); (G. 2).

(1000) EMMERICH XXI, 592. XXII. 349.

12. Ist d der Durchmesser des um ABC beschriebenen Kreises und e die Entfernung OO' der beiden Segmentärpunkte, so ist $d = \frac{e}{\sin\vartheta\sqrt{1 - 4\sin\vartheta^2}} = \frac{2e}{\sin 2\vartheta\sqrt{1 - 3\,tg\vartheta^2}}$.

Beweis: (T. R.).

(198) BROCARD XIII, 33. XIII, 359.

13. $\cot\vartheta$ ist das Ähnlichkeitsverhältnis des gegebenen Dreiecks und der unter einander kongruenten Dreiecke, welche man erhält, wenn man auf den Seiten in ihren Endpunkten in gleicher Weise Senkrechte errichtet.

Beweis: (T. R.); (G.).

(199) BROCARD XIII, 133. XIII, 359.

14. Im Dreieck ABC werden auf der Seite a in C, auf b in A und auf c in B Senkrechte errichtet, wodurch ein dem gegebenen ähnliches Dreieck $A'B'C'$ mit den Seiten a', b', c' entsteht; dann ist

$$a' = a\cot\vartheta;\quad b' = b\cot\vartheta;\quad c' = c\cot\vartheta.$$

Beweis: Vergl. vorigen Satz.

(1092) RULF XXIII, 49. XXIII, 425.

---

*) Entsprechend der Figur in XV. von H. BROCARD: *Nouvelles propriétés du triangle* sind die in den Aufgaben mit A', B', C' bezeichneten Punkte durch A_1, B_1 und C_1 ersetzt.

**) Die Segmentärpunkte haben vom Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises gleichen Abstand und ihre Verbindungslinien mit demselben bilden den Winkel 2ϑ.

15. Die Projektionen der Segmentärpunkte O und O' auf die Seiten des Dreiecks geben 6 Punkte, welche auf einem Kreise liegen.*)

Beweis: (G. 2).

(232) NEUBERG XIII, 206. XIV, 96.

16. Die Segmentärpunkte O und O' sind Brennpunkte einer in das Dreieck ABC beschriebenen Ellipse, deren Berührungspunkte die Schnittpunkte der Seiten mit den Linien sind, welche die Ecken mit dem Punkt K verbinden.

Beweis: (G.).

(230) NEUBERG XIII, 206. XIV, 95.

17. Bezeichnet man mit r den Radius des um ABC beschriebenen Kreises, so erhält man für die Halbachsen der Ellipse $a_1 = r \sin\vartheta$, $b_1 = 2r \sin\vartheta^2$.

Beweis: (R.).

(233) BROCARD und NEUBERG XIII, 206. XIV, 97.

18. Es soll untersucht werden, ob aus den Abständen des Crelle-Brocard'schen Punktes von den Dreiecksseiten ein neues Dreieck konstruierbar ist. — Dieselbe Untersuchung soll für den Crelle-Brocard'schen Gegenpunkt angestellt werden.

Lösung: (R.).

(1205) SCHLÖMILCH XXIV, 343. XXV, 110.

19. Der durch den Grebe'schen Punkt K gelegte Umkreisdurchmesser wird von den Brocard'schen Punkten O und O' aus unter dem Winkel $180^0 - \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1)$ gesehen, wo δ_2, δ_1 $(\delta_2 > \delta_1)$ die beiden hohlen Winkel sind, welche der Gleichung

$$\sin(\delta + \vartheta) = 2 \sin\vartheta$$

genügen.

Beweis: (R.).

(1027) EMMERICH XXII, 197. XXII, 590.

---

§ 5. Über die Dreiecke, welche durch die Geraden gebildet werden, durch deren Durchschnitt die Segmentärpunkte entstehen.

1. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. (Vergl. § 4 Nr. 10.)

Beweis: (G. 2).

(120) BROCARD XI, 274. XII, 108.

*) Der Satz gilt allgemein für Punkte, welche die Eigenschaft haben, daſs die durch dieselben gehenden Ecktransversalen symmetrisch zu den Dreiecksseiten liegen. Spezielle Fälle sind der Satz vom Feuerbach'schen Kreise und der von den Berührungskreisen.

2. (Verallgemeinerung des vorigen Satzes.) In der Ebene eines Dreiecks ABC seien zwei beliebige Punkte O und O' gegeben; wenn sich dann BO und CO' in A_1, CO und AO' in B_1, AO und BO' in C_1, ferner BO' und CO in A_2, CO' und AO in B_2, AO' und BO in C_2 schneiden, so sind die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ unter sich und mit ABC projektivisch, ihre Kollineationscentra liegen in gerader Linie und ihre Kollineationsachsen fallen zusammen.

Beweis: (P. G.); (G.); (K. M.).

(843) Stoll XX, 115. XX, 506.

3. Bezeichnet man (siehe den vorigen Satz) die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten der Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ mit A', B', C' und die Endpunkte der durch O und O' gehenden Ecktransversalen mit X, X', Y, Y', Z, Z', so schneiden sich die Geraden OO', AA', YZ', $Y'Z$ in einem Punkte. Dasselbe findet auch statt bezüglich OO', BB', XZ', $X'Z$, sowie OO', CC', XY', $X'Y$.*)

Beweis: (P. G.); (K. M.).

(968) Glaser XXI, 355. XXII, 104.

4. Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks nach innen ähnliche gleichschenklige Dreiecke mit den Ecken A_1, B_1, C_1, so ist $\triangle A_1B_1C_1$ nur in folgenden zwei Fällen ähnlich ABC: 1) wenn der Basiswinkel $\varphi = 0^0$, 2) wenn $\varphi = \vartheta$ ist. — Im ersten Fall ist der um $A_1B_1C_1$ beschriebene Kreis der Feuerbach'sche Kreis des Dreiecks ABC, im letzteren Fall der Kreis der 7 Punkte.

Beweis: (T. R.).

(195) Brocard XIII, 33. XIII, 357.

5. Die drei Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ fallen in eine Gerade, wenn $\sin(2\varphi + \vartheta) = 2\sin\vartheta$ ist.

Beweis: (R. K,); (T. R.).

(196) Brocard XIII, 33. XIII, 357.

6. Der Winkel φ, welcher durch die Gleichung $\sin(2\varphi + \vartheta) = 2\sin\vartheta$ definiert wird (vergl. die beiden vorigen Sätze), tritt bei der Untersuchung der Gleichgewichtslage eines vertikal liegenden Kreises, dessen Schwerpunkt in der Mitte eines Radius liegt, auf einer unter dem Winkel ϑ geneigten Ebene auf.

Beweis: (G. T.).

(521) Brocard XVI, 357. XVII, 32.

---

*) Dieser Satz liefert eine einfache Lösung der Aufgabe XIV, 353: Auf einer Geraden, von der zwei Punkte O und O' gegeben sind, ohne Benutzung des Zirkels weitere Punkte zu finden. Das Lineal darf jedoch nicht an die beiden Punkte gelegt werden.

7. Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ (vergl. § 5 Nr. 1) sind perspektivisch. Ihr Situationspunkt sei D und ihre Situationsachse G; dann ist $HD \perp G$. (H Mittelpunkt des Umkreises von ABC.)
Beweis: (K. M.); (P. G.).
(200) Brocard XIII, 33. XIV 26 und 265.

8. Es ist $DH = \frac{r \cos 3\vartheta}{\cos\vartheta} = r(1 - 4\sin\vartheta^2)$.
Beweis: (G. T.).
(328) Fuhrmann XIV, 526. XV, 192.

9. Der Sinus des Winkels DHK ist gleich

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\vartheta}{(1-4\sin\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Beweis: (R. K.); (K. M.).
(607) Stoll XVII. 365. XVIII, 125.

10. Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ haben denselben Schwerpunkt E.*)
Beweis: (T. R.); (K. M.).
(201) Brocard XIII, 33. XIII, 360 und XIV. 27.

11. Die Punkte D, E und S (Mittelpunkt von OO') liegen auf einer Geraden und es ist $DE = 2ES$, also ist E Schwerpunkt des Dreiecks DOO'.
Beweis: (K. M.).
(202) Brocard XIII, 33. XIV, 27.

12. Die Senkrechten, welche man durch die Halbierungspunkte der Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ auf die Seiten von ABC fällt, schneiden einander im Mittelpunkte des Feuerbach'schen Kreises.
Beweis: (G. 2); (P. G.); (G. T.).
(271) Kiehl XIV, 33. XIV, 353.

13. Die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Seiten BC und B_1C_1, CA und C_1A_1, AB und A_1B_1 schneiden sich im Punkte S (dem Mittelpunkte von OO').
Beweis: (G.); (K. M.).
(227) Stoll XIII, 206. XIV, 94.

14. Die Verbindungslinien der Mittelpunkte von BC, CA, AB mit den Eckpunkten A_1, B_1, C_1 schneiden sich im Punkte H (dem Mittelpunkte des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises).
Beweis: (G.).
(228) Stoll XIII, 206. XIV, 95.

---

*) Der Satz gilt für sämtliche Dreiecke der Schar in § 5 Nr. 4.

15. Die Verbindungslinien der Mittelpunkte von B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 mit den Eckpunkten A, B, C schneiden sich in einem Punkte S', dessen trimetrische Koordinaten die reciproken Werte der Koordinaten von S sind.
Beweis: (G.); (K. M.).
(229) Stoll XIII, 206. XIV, 95.

16. Fällt man von den Ecken des Dreiecks ABC bezüglich Lote auf die Seiten B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, so schneiden sich dieselben in einem Punkt N, der auf der Peripherie des um ABC beschriebenen Kreises liegt, und zwar zu ABC so, wie der Mittelpunkt H des um ABC beschriebenen Kreises zu $A_1B_1C_1$.
Beweis: (G. 2).
(247) Fuhrmann XIII, 364. XIV, 262.

17. Fällt man von K (d. h. vom Schnittpunkt der durch A_1, B_1, C_1, resp. zu den Seiten von ABC gezogenen Parallelen) Lote auf die Seiten des Dreiecks ABC, so erhält man durch die Fußpunkte ein Dreieck $\triangle_2 = \frac{3}{4}\triangle \operatorname{tg}\vartheta^2$. Da noch $\triangle_1 = A_1B_1C_1 = \frac{1}{4}\triangle(1 - 3\operatorname{tg}\vartheta^2)$, so ist $\triangle_2 + \triangle_1 = \frac{1}{4}\triangle$.
Beweis: (T. R.).
(248) Fuhrmann XIII, 364. XIV, 262.

18. Fällt man vom Schwerpunkt Lote auf die Seiten des Dreiecks, so erhält man ein Dreieck $\triangle_3 = \frac{2}{3}\triangle \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cot\vartheta = \frac{\triangle^2}{3r^2}\cot\vartheta$.
Beweis: (T. R.).
(249) Fuhrmann XIII, 364. XIV, 263.

19. Die Parallelen, welche durch A, B, C zu den Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ gezogen sind, schneiden sich in einem Punkte R des um $\triangle ABC$ beschriebenen Kreises.*)
Beweis: (G. 2).
(266) Tarry XIV, 33. XIV, 349.

20. R liegt auf der Linie HD, welche senkrecht zu der Kollineationsachse G der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ ist.
Beweis: (P. L.); auch durch (K. M.) ausführbar.
(267) Tarry XIV, 33. XIV, 350.

21. Dreht man $\triangle A_1B_1C_1$ um die Kollineationsachse mit ABC, bis es in dieselbe Ebene fällt, etwa in die Lage $A_5B_5C_5$, so ist das Kollineationscentrum von ABC und diesem Dreieck der

*) R hat zu $\triangle ABC$ dieselbe Lage wie K zu $\triangle A_1B_1C_1$.
Stegemann.

Gegenpunkt R von N, d. h. der Punkt, in dem sich die Parallelen durch die Ecken A, B, C zu den resp. Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ schneiden.

Beweis: (G.).

(454) Fuhrmann XV, 614. XVI, 272.

22. Die Winkel, welche die Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ mit der Kollineationsachse bilden, sind den resp. Winkeln gleich, welche HK mit den Verbindungslinien von H nach den betreffenden Gegenecken bildet.

Beweis: (G.).

(455) Fuhrmann XV, 614. XVI, 273.

23. Für den Winkel, den die Seite B_1C_1 des Brocard'schen Dreiecks mit der Seite BC bildet, ergiebt sich

$$\sin\varphi_\alpha = \frac{\sin\vartheta}{\sin(\alpha-\vartheta)}\sqrt{\frac{\sin(\alpha+\vartheta)^2 - 4\sin\vartheta^2}{1-4\sin\vartheta^2}}.$$

Beweis: (R. 4).

(467) Fuhrmann XVI, 26. XVI, 351.

24. Sind A_1', B_1', C_1' die Winkelgegenpunkte von A_1, B_1, C_1, so sind die Dreiecke ABC und $A_1'B_1'C_1'$ perspektivisch; ihr Projektionscentrum D' ist Winkelgegenpunkt zu D; und ihre Kollineationsachse G ist identisch mit der von ABC und $A_1B_1C_1$.*)

Beweis: (P. G.); (K. M.).

(356) Brocard XV, 39. XV, 354.

25. (Erweiterung des vorigen Satzes.) Je zwei der Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ und $A_1'B_1'C_1'$ sind perspektivisch; ihre drei Projektionscentra liegen in einer Geraden, und ihre drei Kollineationsachsen fallen in eine Gerade zusammen; das Projektionscentrum von ABC und $A_1B_1C_1$ ist D; das von ABC und $A_1'B_1'C_1'$ ist D', der Winkelgegenpunkt von D; und das Projektionscentrum D'' von $A_1B_1C_1$ und $A_1'B_1'C_1'$ teilt DD' so, dafs $DD'' = 2D'D''\cos 2\vartheta$ ist.

Beweis: (K. M.); (G. T.).

(435) Stoll XV, 524. XVI, 201.

26. a) Wenn A_1', B_1', C_1' die Winkelgegenpunkte der auf dem Brocard'schen Kreise liegenden Punkte A_1, B_1, C_1 bezeichnen, so sind die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_1'B_1'C_1'$ projektivisch; ihr Projektionscentrum ist der Schnittpunkt von SS' und HH'.

b) Der Schnittpunkt von BC_1 und B_1C ist der Winkelgegenpunkt A_1' von A_1.

Beweis: (P. G.); (K. M.). Vergl. Nr. 24.

(606ab) Stoll XVII, 365. XVIII, 125.

---

*) Auch die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_1'B_1'C_1'$ sind perspektivisch; ihr Projektionscentrum liegt auf DD'.

27. Die Verbindungslinie der Brocard'schen Punkte des Dreiecks $A_1B_1C_1$ ist senkrecht zu RH, also $K_1Z \parallel RH$, wenn K_1 der Grebe'sche Punkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ und Z der Mittelpunkt des Brocard'schen Kreises des Dreiecks ABC ist.

Beweis: (G.).

(1021) Bücking XXII, 197. XXII, 510.

28. Die Winkel, unter welchen OO' die Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ schneidet, sind $\alpha' + \beta'$, $\beta' + \gamma'$, $\gamma' + \alpha'$ oder deren Supplemente, wenn α', β', γ' die Peripheriewinkel über RA, RB, RC im Kreise ABC, alle in derselben Richtung gemessen, bedeuten. (R ist der Steiner'sche Punkt.)

Beweis: (G.).

(1022) Bücking XXII, 197. XXII, 510.

29. Die Geraden, durch deren Durchschnitt die Segmentärpunkte entstehen, bilden nach aufsen umgelegt zwei Dreiecke T'_Θ und T''_Θ, welche unter einander kongruent und dem gegebenen Dreieck ähnlich sind. Die Mittelpunkte der diesen neuen Dreiecken umgeschriebenen Kreise liegen in bezug auf H symmetrisch zu den Segmentärpunkten O und O'.

Beweis: (G. T. 3).

(316) Brocard XIV, 357. XV, 122.

30. Die Segmentärpunkte O und O' sind die Grebe'schen Punkte der Dreiecke T'_Θ und T''_Θ.

Beweis: (G.).

(317) Brocard XIV, 358. XV, 123.

31. Die Dreiecke T'_Θ und T''_Θ (vergl. § 5 Nr. 29) haben als zweite Segmentärpunkte die Punkte O_1 und O'_1, welche zu O und O' in bezug auf HO' und HO symmetrisch sind.

Beweis: (G. T.).

(383) Brocard XV, 195. XV, 522.

32. Die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks ABC mit den Segmentärpunkten O und O' bestimmen auf den gegenüberliegenden Seiten zwei Systeme von je drei Punkten X, Y, Z resp. X', Y' Z', welche die Ecken von zwei flächengleichen Dreiecken sind. Das Verhältnis ihrer Fläche zu der des gegebenen Dreiecks ist zu berechnen.

Res.: $XYZ = X'Y'Z' = \frac{2\Delta \sin(\alpha - \vartheta)\sin(\beta - \vartheta)\sin(\gamma - \vartheta)}{\sin(\alpha + \vartheta)\sin(\beta + \vartheta)\sin(\gamma + \vartheta)}$ *). (T. R. 2).

(318) Brocard XIV, 358. XV, 124.

*) Derselbe Wert ergiebt sich für den Inhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Durchschnittspunkte der Seiten mit den Transversalen 1) AK, BK, CK, und 2) AD, BD, CD sind, wo D das Kollineationscentrum der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ ist.

§ 6. Besondere Punkte des Dreiecks.

1. Im Dreieck ABC sind die Segmentärpunkte O und O' so bestimmt, dafs $\sphericalangle COA = 2R - \alpha$ u. s. w., $AO'B = 2R - \alpha$ u. s. w. ist. Durch A_1, B_1, C_1, in welchen sich resp. BO und CO' u. s. w. schneiden, sind resp. mit BC, AC, AB Parallele gezogen, welche sich in K schneiden. Zu beweisen:

1) Die Entfernungen des Punktes K von den Seiten des Dreiecks ABC verhalten sich wie die letzteren.

2) Die Verbindungslinien von K mit den Halbierungspunkten der Seiten gehen durch die Halbierungspunkte der zugehörigen Höhen.

3) Je eine der Geraden KA_1, KB_1, KC_1 wird durch je eine der Mittellinien von ABC halbiert.

4) Die drei Geraden AA_1, BB_1, CC_1 schneiden sich in einem Punkte.*)

Beweis: 1) (G. T.). 2) (H. B.) und (K. M.). 3) (H. B.); (K. M.) und (G. T.). 4) (G.) und (K. M.).

(183) Kiehl XII, 363. XIII, 203.

2. (Vergl. Zus. d. vorg. Satzes.) Ein Punkt P in der Ebene eines Dreiecks ABC teilt dieses in demselben Verhältnis wie der Winkelgegenpunkt P' sein eigenes durch die Senkrechten $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$ auf die Seiten gebildetes Fufspunktendreieck $A'B'C'$.

Beweis: (G. T.) und mit Hilfe von Äquipollenzen.

(763) Kiehl XIX, 188. XIX, 585.

3. $\sphericalangle KAB = EAC$ u. s. w., wo E der Schwerpunkt der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ ist. (Vergl. § 5 Nr. 10.)

Beweis: (K. M.).

(231) Brocard XIII, 206. XIV, 96.

4. Durch K gehen die drei Transversalen, welche die Ecken des Dreiecks ABC mit den Ecken desjenigen Dreiecks verbinden, dessen Seiten die durch A, B, C gelegten Tangenten des umgeschriebenen Kreises sind.

Beweis. (G. T.); (H. B. 4); (K. M.).

(268) Kiehl XIV, 33. XIV, 350.

---

*) Zusätze: 1) Fällt man von K die Lote KP, KQ, KR auf die Seiten des Dreiecks, so ist K Schwerpunkt des Dreiecks PQR. —

2) Die durch K gezogenen Ecktransversalen teilen die Gegenseiten nach dem Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten.

3) K ist der Punkt, für welchen die Summe der Quadrate der auf die Seiten gefällten Lote ein Minimum ist.

4) Legt man durch K irgend eine Transversale, welche die Seiten des Dreiecks resp. in P, Q, R schneiden möge, bestimmt die harmonisch konjugierten P', Q', R' in bezug auf die Ecken des Dreiecks und verbindet dann die resp. Ecken des Dreiecks ABC mit diesen Punkten, so schneiden sich diese Linien in einem Punkte, der auf der Peripherie des umgeschriebenen Kreises liegt. Fuhrmann.

5. K ist der Mittelpunkt eines Kreises*), der je zwei der Seiten von ABC unter einem Durchmesser schneidet (d. h. durch Punkt K gehen drei Gerade gleicher Länge, die in ihm halbiert werden).

Beweis: (G.); (G. T. 2).

(269) Kiehl XIV, 33. XIV, 351.

6. Die Cotangenten der in demselben Drehungssinne als positiv gerechneten Winkel, welche die Dreiecksseiten mit den durch ihre Halbierungspunkte und durch K bestimmten Transversalen bilden, haben zur Summe 0. (Vergl. den Fasbender'schen Satz über die Schwerlinien.)

Beweis: (G. T. 4).

(270) Kiehl XIV, 33. XIV, 352.

7. Bezeichnet u den Umfang eines Dreiecks, so ist

a) die Summe der Entfernungen des Grebe'schen Punktes von den Ecken $\leqq \frac{1}{3} u \sqrt{3}$;

b) die Summe der Gegenmittellinien $< u \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$.

Beweis: a) und b) (R.).

(876) Emmerich XX, 350. XXI, 111.

8. Welches Terrain steht für die Ecken B und C eines Dreiecks zur Verfügung, wenn die Ecke A und der Grebe'sche Punkt K gegeben sind?

Auflösung: (R. K.).

(884) Emmerich XX, 434. XXI, 188.

9.**) A sei die Spitze, K der Grebe'sche Punkt, H' der Höhenschnittpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks. In welche Grenzen bannen je zwei dieser Punkte den dritten?

Auflösung: (R.).

(863) Emmerich XX, 274. XXI, 25.

10. Es sei ABC ein beliebiges (spitzw.) Dreieck; A', B', C' seien die Höhenfufspunkte; D, E, F resp. die Mittelpunkte von $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Es schneide ferner EF die Seite BC in A_0, FD die Seite CA in B_0, DE die Seite AB in C_0. Dann ergiebt sich:

a) A_0, B_0, C_0 liegen in einer Geraden und zwar in der Chordale, die bestimmt ist durch den umgeschriebenen Kreis und durch Kreis M, welcher durch die Punkte $GHIKLN$ geht. (EF

---

*) Zweiter Lemoine'scher Kreis; Lemoine 1873.

**) Konstruktionsaufgaben über den Grebe'schen Punkt siehe in B § 9 Nr. 104—106; ferner siehe E § 9 Nr. 27a. F § 1 Nr. 31. 32. 51. 55. § 4 Nr. 3. G § 5 Nr. 12.

schneidet AB in K, AC in I; FD schneidet BC in H, AB in G, DE schneidet AC in L, BC in N).

Beweis: (G.).

b) Die Verbindungslinien AD, BE, CF schneiden sich in dem Punkte K, von dem einige Eigenschaften in (§ 6 Nr. 1 und d. Anmerkung) angegeben sind.

Beweis: (G. T. 2); (P. L.).

c) Bezeichnet man die Schnittpunkte einer Seite mit der Verbindungslinie der Höhenfuſspunkte auf den anderen Seiten resp. mit $A''B''C''$, so sind A' und A'', B' und B'', C' und C'' die Doppelpunkte der Involutionen, die auf den Seiten des Dreiecks durch den umgeschriebenen Kreis und den Kreis M bestimmt werden.

Beweis: (H. B.); (P. G.).

(279—281) Fuhrmann XIV, 99—100. XIV, 521—522.

11. Ist $\triangle abc \sim ABC$ und ihm so eingeschrieben, daſs seine Seiten auf den homologen Seiten von ABC senkrecht stehen, so sind die halben Seiten von abc gleich den Abständen des Grebe'schen Punktes K für ABC von dessen homologen Seiten. K ist dann der Mittelpunkt des Kreises um abc, und $\sphericalangle KaA = c = C$, $KbB = A$, $KcC = B$; oder für das zweite Dreieck $a'b'c'$, $\sphericalangle Ka'A = b' = B$ u. s. w.; aKa' liegen in einer Geraden u. s. w.; $abc = ABC \operatorname{tg} \vartheta$.

Beweis: (G. T. 2); (G.).

(422) Artzt XV, 441. XVI, 121.

12. Verlängert man im $\triangle ABC$ Seite b über C hinaus um c und Seite c über B hinaus um b, verbindet die Endpunkte resp. mit B und C, und zieht durch C und B Parallelen zu den Verbindungslinien, welche einander in A_1 schneiden, so liegt A_1 mit A und dem Grebe'schen Punkte des Dreiecks in einer Geraden.*)

Beweis: (G.); (K. M.).

(578) Emmerich XVII, 111. XVII, 520.

13. In einem Dreieck, welches seinem Schwerliniendreieck ähnlich ist, berührt CK den Kreis mit dem Durchmesser MK, CS den mit dem Durchmesser SH (S Schwerpunkt, H Höhenschnittpunkt, K Grebe'scher Punkt, M Mittelpunkt des Umkreises).

Beweis: (G. T.); (G. R.); (G.). Vergl. B § 1 Nr. 99; § 9 Nr. 16 und E § 4 Nr. 5 u. 8.

(677c) Artzt XVIII, 198. XVIII, 598.

---

*) Trägt man c auf CA von C aus bis D' und b auf BA von B aus bis E' ab und zieht durch C und B Parallelen resp. zu BD' und CE', welche sich in A_1' schneiden, so ist AA_1GA_1' eine Gerade und A, G, A_1, A_1' sind harmonische Punkte. (G Schnittpunkt von AA_1 und BC.) Fuhrmann.

14. Dreieck ABC sei seinem Schwerliniendreieck ähnlich und $a \gtrless c \gtrless b$; CD sei die auf AB gefällte Höhe und O die Mitte von AB; ferner sei M der Mittelpunkt des Umkreises, S der Schwerpunkt, K der Grebe'sche Punkt, H der Höhenschnittpunkt. Dann ist K der Schwerpunkt des Dreiecks CDO; aufserdem ist CK Gegenmittellinie im Dreieck CSH und CS Gegenmittellinie im Dreieck CKM.

Beweis: (G. T.).

(736) Stegemann XIX, 32. XIX, 420.

15. (Eigenschaft des Grebe'schen Punktes, zugleich Verallgemeinerung eines bekannten Satzes über die gewöhnliche Beweisfigur des Pythagoreischen Lehrsatzes.) Errichtet man über zwei Seiten eines Dreiecks in den Aufsenwinkelräumen des eingeschlossenen Winkels (oder im Raume des Innenwinkels) je einen Rhombus, und verbindet jeden Endpunkt der dritten Seite mit der freien Ecke des gegenüberliegenden Rhombus, so schneiden sich die Verbindungslinien auf der Gegenmittellinie nach der dritten Seite.

Beweis: (G.); (G. T.); (K. M.) und durch Äquipollenzen.

(778) Kiehl XIX, 273. XX, 110.

16. a) Der Grebe'sche Punkt K ist der Seitengegenpunkt des Punktes D.

b) Die durch A_1, B_1, C_1 bezw. zu AC, AB, BC gezogenen Parallelen schneiden sich in einem Punkte O_1, die durch A_1, B_1, C_1 bezw. zu AB, BC, CA gezogenen Parallelen in O_1'. Die beiden Punkte O_1 und O_1' sind die Seitengegenpunkte der Brocard'schen Punkte O und O'.

Beweis: a) Vergl. Fuhrmann: Synth. Bew. p. 123 und Emmerich: Die Brocard'schen Gebilde des Dreiecks p. 85. b) (G. T.); (K. M.).

(1079) Glaser XXII, 595. XXIII, 343.

17. Der Winkelgegenpunkt S' zu der Mitte S von OO' ist der Seitengegenpunkt des Halbierungspunktes der Strecke O_1O_1' (vergl. den vorigen Satz) in Beziehung auf das Dreieck ABC.

Beweis: (K. M. 2).

(1176) v. Jettmar XXIV, 104. XXIV, 453.

18. Der Grebe'sche Punkt und der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC sind bezüglich identisch mit dem Steiner'schen Punkt und dem Tarry'schen Punkt des ersten Brocard'schen Dreiecks $A_1B_1C_1$.

Beweis: Prog. d. Friedr.-Wilh.-Realg. Stettin 1887. § 94. Vergl. § 5 Nr. 16 und Nr. 19 Anmerk.

(1026) Stoll XXII, 197. XXII, 590.

19. Durch den Grebe'schen Punkt müssen die zu den Seiten eines Dreiecks gezogenen Antiparallelen gehen, damit die Summe der Quadrate der von den entsprechenden Ecken auf sie gefällten Senkrechten ein Minimum sei.

Beweis: (G.); (T. R.).

(1196) Stoll XXIV, 271. XXV, 44.

20. Von den Ecken B und C eines Dreiecks ABC seien auf AH (H Mittelpunkt des Umkreises) die Lote $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gefällt.

a) B_1 sei der Schnittpunkt von CH und $\mathfrak{B}$, C_1 der von BH und $\mathfrak{C}$; B_1C_1 treffe BC in A'; AA' und die entsprechend konstruierten BB', CC' schneiden sich in einem Punkte P_1, der mit E (Schwerpunkt) und K (Grebe'scher Punkt) in gerader Linie liegt.

b) L sei der Endpunkt des von A ausgehenden Durchmessers des Umkreises; B_2 sei der Schnittpunkt von CL mit $\mathfrak{B}$, C_2 der von BL mit $\mathfrak{C}$; B_2C_2 treffe BC in A''; AA'' und die entsprechend konstruierten BB'', CC'' schneiden sich in einem Punkte P_2, der ebenfalls mit E und K in gerader Linie liegt.

c) EP_1 wird durch K und P_2 harmonisch geteilt. (Vergl. Glaser, Progr. d. Realg. in Homburg v. d. H. 1887, § 10 am Schlufs).*)

Beweis: a) (K. M.); (G. T.). b) und c) (K. M.).

(783) Emmerich XIX, 346. XX, 113.

21. Der Seitengegenpunkt K' zum Höhenschnittpunkt H im $\triangle ABC$ ist Grebe'scher Punkt im $\triangle A'B'C'$, welches man erhält, wenn man durch die Ecken des Dreiecks ABC Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten zieht.

Beweis: (G.).

(*382*) Journ. élém. XX, 35.

22. Verbindet man einen Eckpunkt des Dreiecks ABC

a) mit den Punkten O, S', O', R

b) mit den Punkten E, Z', H', N,

so erhält man jedesmal vier harmonische Gerade. Bezeichnungen wie XV, 365 in der Figurentafel von Brocard.**)

Beweis: a) und b) (H. B.).

(1102) Meyer XXIII, 125. XXIII, 508.

---

*) Die Seite BC wird durch A'' und durch ihren Schnittpunkt A''' mit der in L an den Umkreis gelegten Tangente harmonisch geteilt. Schneidet die Höhe von A den Umkreis in L', so sind AL und AL' Gegentransversalen und die in L′ an den Umkreis gelegte Tangente trifft BC in einem Punkt A^{IV}, der symmetrisch zu A''' bezüglich des Mittelpunktes von BC liegt. Glaser.

**) S' Winkelgegenpunkt zu der Mitte S von OO'; R und N Schnittpunkte von HD (H Mittelpunkt des Umkreises von ABC, D Projektionscentrum von $\triangle ABC$ und $A_1B_1C_1$) mit dem Umkreise von

23. Der Steiner'sche Punkt R ist der Winkelgegenpunkt des unendlich fernen Punktes der Verbindungslinie der Brocard'schen Punkte O und O'.*)

Beweis: (H. B.); (G.); (K. M.).

(1020) BÜCKING XXII, 106. XXII, 509.

24. Die Brianchon'schen Punkte zweier perspektivisch liegenden Dreiecke, die denselben Kreis berühren, liegen mit ihrem Kollineationscentrum in einer Geraden.

Beweis: (P. L.).

(531) ARTZT XVI, 429. XVII, 197.

25. Der Schnittpunkt P der drei Ecktransversalen, welche die Gegenseiten eines Dreiecks im Verhältnis der Kuben der Quadratwurzeln aus den anliegenden Seiten teilen, ist der Schwerpunkt des Systems der drei Lote x, y, z, welche von ihm auf die Seiten gefällt sind.

Beweis: (G. T.); (T. R.); mit Benutzung physikal. Gesetze.

(831) EMMERICH XX, 33. XX, 427.

26. a) Die Abstände des Punktes Γ von Gergonne (Durchschnittspunkt der nach den Berührungspunkten D, E, F des Inkreises gezogenen Ecktransversalen) von den Seiten sind $y_a = \frac{h_a \varrho_a}{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c}$ u. s. w.

b) Die Abstände des Punktes Γ', in welchem sich die nach den Berührungspunkten D', E', F' des Ankreises von a gezogenen Ecktransversalen schneiden, von den Seiten sind $y_{a,a} = -\frac{h_a \varrho}{\varrho_b + \varrho_c - \varrho}$, $y_{a,b} = \frac{h_b \varrho_c}{\varrho_b + \varrho_c - \varrho}$, $y_{a,c} = \frac{h_c \varrho_b}{\varrho_b + \varrho_c - \varrho}$.

Beweis: a) und b) (G. T. 2); (R. K.). Vergl. B § 1 Nr. 58.

(929) v. JETTMAR XXI, 115. XXI, 513.

27. Es giebt zwei Punkte P_1 und P_2 von der Eigenschaft, daſs ihre Entfernungen von den Ecken eines Dreiecks ABC sich

---

ABC; E Schwerpunkt von ABC; Z' Winkelgegenpunkt des Mittelpunktes Z des Brocard'schen Kreises; H' Durchschnittspunkt der Höhen von ABC.

*) 1) Die Parallelen durch R zu den Seiten des Dreiecks ABC mögen den Kreis ABC in A', B', C' schneiden, dann ist

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel OO'.$$

2) Die Winkel, unter welchen OO' die Seiten des Dreiecks ABC schneidet, sind gleich den Peripheriewinkeln über den Kreisbogen RA, RB, RC oder deren Supplementen. — Die Winkel, unter denen HK die Seiten des Dreiecks schneidet, sind von jenen um 90° verschieden.

BÜCKING.

verhalten wie die diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten; dieselben liegen beide auf der Euler'schen Geraden.

Beweis: (K. M. 2); (P. L.).

(851) STOLL XX, 195. XX, 586.

28. (Im Anschlufs an den vorigen Satz.) Aufser dem Höhenschnittpunkt giebt es noch einen Punkt, dessen Entfernungen von den Ecken des Dreiecks sich verhalten wie die Cosinus der entsprechenden Winkel; dieser Punkt liegt auf der Euler'schen Geraden.

Beweis: (G. T); (K. M.).

(983) HAHN XXI, 519. XXII, 265.

29. (Im Anschlufs an den vorigen Satz.) a) Es giebt in der Ebene eines Dreiecks ABC immer zwei Punkte P_1 und P_2 derart, dafs $P_1A : P_1B : P_1C = P_2A : P_2B : P_2C = p : q : r$.

b) Diese Punkte sind harmonische Pole in Bezug auf den Umkreis, d. h. sie liegen auf einem Durchmesser des Umkreises und teilen denselben harmonisch.

Beweis: a) (G.). b) (G.); (H. B.); (G. R.).

(1059) STOLL XXII, 436. XXIII, 188.

30. Zeichnet man in ein Dreieck ABC das Mittendreieck $A_1B_1C_1$, in dieses den eingeschriebenen Kreis, der die Seiten desselben in A_2, B_2, C_2 berührt, dann sind ABC und $A_2B_2C_2$ kollinear, das Kollineationscentrum ist der Schnittpunkt T der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der entsprechenden angeschriebenen Kreise (von Spieker 5. merkwürdiger Punkt, sonst auch Nagel'scher Punkt, genannt), die Kollineationsachse ist senkrecht ST (S Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks).

Beweis: (H. B., P. L.); auch durch (R.) zu beweisen. Vergl. B § 1 Nr. 140—141.

(378) FUHRMANN XV, 194. XV, 519.

31. Welche Beziehung findet zwischen zwei Punkten statt, welche die Eigenschaft haben, dafs die Fufspunkte der von ihnen auf die Seiten eines Dreiecks gefällten Senkrechten zwei ähnliche Dreiecke bilden?

Auflösung: (G. T.); (P. G.).

(278) KIEHL XIV, 99. XIV, 520.

---

§ 7. Besondere Gerade des Dreiecks.

1.*) Zieht man durch die Ecken eines Dreiecks ABC Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten, welche den Umkreis (Mittelpunkt M) bzw. in A', B', C' treffen, so geht die Gerade,

*) Vergl. B § 13 Nr. 26 und F II Nr. 15.

welche den Schwerpunkt S von $\triangle ABC$ mit M verbindet, durch den Mittelpunkt des Inkreises von $A'B'C'$.

Beweis: (G.) auch durch (K. M.) ausführbar.

(975) Kücker XXI, 428. XXII, 192.

2. a) In welchem Verhältnis schneidet die durch den Schwerpunkt S, den Mittelpunkt M des Umkreises und den Höhenschnittpunkt H gelegte (Euler'sche) Gerade die drei Seiten des Dreiecks?*)

b) Welche Bedingung mufs erfüllt sein, damit die Euler'sche Gerade einer Seite des Dreiecks parallel ist?**)

Beweis: a) (T. R.); (R. K.); (K. M. 2). b) (G. T. 2).

(1017ab) v. Jettmar. XXII, 505.

3. Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks, so ist die Euler'sche Gerade

$$MSH = \sqrt{\frac{a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)+b^2(b^2-a^2)(b^2-c^2)+c^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}.$$

Beweis: (T. R.); (G. T.).

(1197) Weinmeister XXIV, 271. XXV, 45.

4.***) Im $\triangle ABC$ sei H der Höhenschnittpunkt und P ein beliebiger Punkt der Peripherie des umgeschriebenen Kreises (hier auf Bogen BC); ferner sei $PD \perp BC$, $PE \perp AC$ und $PF \perp AB$, so dafs also EDF die zum Punkte P gehörende Fufspunktlinie ist; dieselbe schneide PH in Q; dann ist $PQ = QH$.

Beweis: (G.).

(*268*) Journ. élém. XVI, 504.

5. Bewegt sich in Nr. 4 P auf der Peripherie des umgeschriebenen Kreises, so bewegt sich Q auf der Peripherie des Feuerbach'schen Kreises.

Beweis: (G.).

(*269*) Journ. élém. XVI, 504.

6. In einem Dreieck ABC schneiden sich die beiden zu zwei diametral gegenüberliegenden Punkten P und P' (P auf Bogen BC, P' auf Bogen AB) gehörenden Fufspunktlinien EDF und $E'F'D'$ (PD und $P'D' \perp BC$, PE und $P'E' \perp AC$, PF und $P'F' \perp AB$) rechtwinklig in G und zwar liegt G auf dem Feuerbach'schen Kreise.

Beweis: (G.).

(*270*) Nouv. Ann. XVI, 504.

---

*) Wird AB von MSH in Z geschnitten, so ist

$$AZ : BZ = \cos\alpha \sin(\beta - \gamma) : \cos\beta \sin(\alpha - \gamma).$$

**) Es mufs $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 3$ sein.

***) Aufgaben über Fufspunktlinien siehe B § 9 Nr. 123, 181—183.

7. a) Sind A', B', C' die Projektionen der Ecken des Dreiecks ABC auf eine beliebige Gerade L seiner Ebene, so schneiden sich die von A', B', C' bezw. auf BC, CA, AB gefällten Senkrechten in einem Punkte D.

b) Durch D gehen auch (wenn L den Umkreis schneidet) die Fufspunktlinien der Durchschnittspunkte des Umkreises mit L.

Beweis: a) und b) (G.).

(*551*) Journ. élém. XXIII, 514.

8. Errichtet man auf den Seiten eines Dreiecks ABC in den Punkten, in welchen sie von einer beliebigen Transversale L geschnitten werden, Senkrechte, so entsteht ein neues Dreieck $A'B'C'$. Zu beweisen ist, dafs sich AA', BB', CC' in dem einen Durchschnittpunkt M der Umkreise beider Dreiecke schneiden, dafs die Fufspunktlinien in Bezug auf beide Dreiecke parallel sind und dafs sich die Umkreise beider Dreiecke in M rechtwinklig schneiden.

Beweis: (P. G.).

(*552*) Mathesis. XXIII, 515.

9. Wenn zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ in demselben Kreise liegen und die Lote von A auf B_1C_1 und von A_1 auf BC sich auf dem Umkreise schneiden, so sind

a) die Fufspunktlinien (Wallace'sche Geraden) eines beliebigen Punktes P des Kreises für beide Dreiecke parallel;

b) die sechs Fufspunktlinien, welche den Ecken jedes Dreiecks in Bezug auf das andere entsprechen, schneiden sich in demselben bestimmten Punkte;

c) Die Umkreise aller Dreiecke, welche von irgend drei der Seiten von ABC und $A_1B_1C_1$ gebildet werden können, schneiden sich in einem Punkte.

Beweis: a), b) und c) (G.).

(1111) Kücker XXIII, 194. XXIII, 586.

10. Wenn zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ in demselben Kreise liegen und wenn die einem beliebigen Punkte des Kreises entsprechenden Fufspunktlinien beider Dreiecke aufeinander senkrecht stehen, so liegen die beiden Dreiecke, welche die Fufspunktlinien der Ecken von ABC und $A_1B_1C_1$ bilden, in demselben Kreise.

Beweis: (G.).

(1112) Kücker XXIII, 194. XXIII, 586.

11. Wenn die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ in demselben Kreise liegen, wenn ferner ABC fest ist und $A_1B_1C_1$ alle möglichen Lagen einnimmt, so beschreibt der Mittelpunkt des Um-

kreises desjenigen Dreiecks, dessen Seiten die Fufspunktlinien von $A_1B_1C_1$ für ABC und umgekehrt sind, einen bestimmten Kreis.*)

Beweis: (G.).

(1122) Kücker XXIII, 271. XXIV, 20.

12. (Verallgemeinerung von Nr. 10.) Wenn zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ in demselben Kreise liegen, dann liegen die beiden Dreiecke, welche gebildet werden durch die Fufspunktlinien von ABC in Bezug auf $A_1B_1C_1$ und umgekehrt in demselben Kreise.

Beweis: (G.).

(1178) Kücker XXIV, 104. XXIV, 454.

13. D und E seien die Endpunkte eines Durchmessers des Umkreises von $\triangle ABC$. Dann schneiden die Fufspunktlinien von D und E in Bezug auf $\triangle ABC$ jede Seite in zwei Punkten, welche symmetrisch gegen die Seitenmitte liegen. Die Fufspunktlinien sind die Asymptoten einer um ABC beschriebenen gleichseitigen Hyperbel, deren Gleichung $xy = k \cdot k'$ ist, wenn k und k' die Abstände der Punkte D und E von den zugehörigen Fufspunktlinien bedeuten.

Beweis: (G. T.); (R. K.).

(1179) Kücker XXIV, 104. XXIV, 455.

14. ABC ist ein Dreieck, H sein Höhenschnittpunkt, D ein beliebiger Punkt des Umkreises und E der Mittelpunkt von HD; dann ist E auch der Mittelpunkt jeder Strecke, welche auf der zu D gehörenden Fufspunktlinie von einem beliebigen Paare aufeinander senkrecht stehender Fufspunktlinien begrenzt wird.

Beweis: (G.); (R. K.).

(1180) Kücker XXIV, 104. XXIV, 456.

15. Wenn sich zwei Seitengegengeraden eines Dreiecks lotrecht schneiden, so sind sie Fufspunktlinien (d. h. die in ihren Schnittpunkten mit den Dreiecksseiten zu diesen errichteten Lote treffen sich in einem Punkte).

Beweis: (G. 2); (R. K.):

(1223) Kücker XXIV, 459. XXV, 271.

16. Die Dreiecke ABC und STU liegen in einem Kreise und S_1, T_1, U_1 sind die zweiten Endpunkte der durch S, T, U gehenden Durchmesser. Ist nun die zu S gehörende Fufspunktlinie für $\triangle ABC$ parallel TU, so bilden die den sechs Punkten

*) Der Satz behält seine Gültigkeit, auch wenn die verschiedenen Dreiecke $A_1B_1C_1$ nicht kongruent sind, wenn sie nur die Bedingung erfüllen, dafs die Summe der Quadrate der Seiten eine feste Gröfse ist.

S, T, U, S_1, T_1, U_1 entsprechenden Fufspunktlinien die Seiten und Höhen eines Dreiecks.

Beweis: (G.); (R. K.).

(1224) KÜCKER XXIV, 459. XXV, 272.

17. Giebt es Punkte auf dem Umkreise eines Dreiecks, dessen Fufspunktlinien durch den Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises gehen? und wo liegen sie?*)

Auflösung: (G.); (R. K.)

(1225) STOLL XX, 459. XXV, 237.

18. Die Fufspunktlinien zweier diametral gegenüberliegender Umkreispunkte P und P' schneiden sich bekanntlich rechtwinklig in einem Punkte S des Umfanges des Feuerbach'schen Kreises; wenn sich nun P auf dem Umkreise mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit bewegt, so geschieht die Umdrehung von S auf dem Feuerbach'schen Kreise in entgegengesetzter Richtung und mit doppelter Winkelgeschwindigkeit.

Beweis: (G.), auch durch (K. M.) ausführbar).

(1300) STOLL XXV, 351. XXVI, 108.

19. $\triangle A_1B_1C_1$ sei das Brocard'sche Dreieck von $\triangle ABC$ und AB_1 schneide BA_1 in C', BC_1 schneide CB_1 in A' und CA_1 schneide AC_1 in B'. Dann gehen AA', BB' und CC' durch einen Punkt D', welcher auf der Verbindungslinie des Grebe'schen Punktes K und des Mittelpunktes M des Umkreises liegt.**)

Beweis: (H. B.).

(1290) BÜCKING XXV, 279. XXVI, 104.

20. Man ziehe in einem Dreieck die Verbindungslinie der Mittelpunkte M des Inkreises und O des Umkreises; durch M wird der Durchmesser des Umkreises in zwei Teile geteilt. Trägt man den einen Teil auf den Höhen ab und zwar von den Ecken gerechnet, so liegen die drei erhaltenen Punkte auf einer Geraden. Dasselbe gilt, wenn man den zweiten Teil ebenso abträgt. Diese beiden Geraden stehen aufeinander senkrecht und gehen durch M.

Beweis: (G.); (K. M.).

(821) FUHRMANN XIX, 589. XX, 345.

---

*) Es giebt drei Fufspunktlinien im $\triangle A_1A_2A_3$, welche den Feuerbach'schen Kreis des Dreiecks berühren. (Vergl. Nr. 17.)

(1336) BÜCKING XXV, 514. XXVI, 422.

**) Der Satz ist eine Umformung des Satzes: Der Winkelgegenpunkt D' des Punktes D liegt auf MK.

21. In jedem Dreieck steht die Verbindungslinie des Höhenschnittpunktes mit dem Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises senkrecht zur Harmonikalen G des Höhenschnittpunktes H.*)

Beweis: (K. M); (H. B. 2) mit (T. R.).

(809) v. Miorini XIX, 509. XX, 194 (798 statt 809).

22. a) Durch ein Dreieck lassen sich sechs Transversalen XYZ legen, für welche $AY = BZ = CX$ ist. Die drei Schnittpunkte je zweier entsprechenden Transversalen haben die barycentrischen Koordinaten $b, c, -a \equiv P_a$; $b, -c, a \equiv P_b$; $-b, c, a \equiv P_c$. Bezüglich der Bedingung $AZ = BX = CY$ ergeben sich Punkte mit den Koordinaten $c, -a, b \equiv Q_a$; $c, a, -b \equiv Q_b$; $-c, a, b \equiv Q_c$.

b) Die Mittelsenkrechten auf P_aQ_a, P_bQ_b, P_cQ_c schneiden sich im Höhenschnittpunkt. Durch letzteren Punkt geht auch die Mittelsenkrechte auf PQ, wo P und Q Punkte mit den Koordinaten b, c, a und c, a, b bedeuten.

Beweis: (K. M.).

(1062) Glaser XXII, 436. XXIII, 190.

23. Zieht man durch die Eckpunkte des Dreiecks ABC die Parallelen zu der Brocard'schen Geraden OO' und bestimmt die bezüglich der Parallelen zu den entsprechenden Höhen symmetrisch gelegenen Geraden, so gehen letztere durch einen Punkt auf dem Umkreise.

Beweis: (H. B.); (G. 2).

(1113) Meyer XXIII, 195. XXIII, 588.

---

§ 8. Besondere Kreise.

a. Die Apollonischen Kreise.

1. a) Halbiert man in einem Dreieck ABC die inneren und äußeren Winkel durch AD und AD', BE und BE', CF und CF', und beschreibt die Kreise durch je eine Ecke und die Punkte, in welchen die Halbierungslinien der Winkel die Gegenseiten treffen, also durch A, D, D' u. s. w., so schneiden sich die drei Kreise in zwei Punkten P und P'. Fällt man von diesen Punkten die Lote P_a und P'_a, P_b und P'_b, P_c und P'_c auf die Seiten, so sind die Dreiecke P_a, P_b, P_c und P'_a, P'_b, P'_c gleichseitig.

b) Auf PP' liegt der Mittelpunkt H des umgeschriebenen Kreises und der Grebe'sche Punkt K.

Beweis: a) (G. 2). b) (G.). Vergl. § 2 Nr. 9.

(352—353) Fuhrmann XV, 39. XV, 352—353.

---

*) Ist G die Harmonikale eines Punktes der Kiepert'schen Hyperbel Γ, so ist $SH \perp G$, wo S der Schwerpunkt von ABC ist.

2. (Im Anschlufs an § 8 Nr. 1, a.) Beschreibt man an einem Dreieck die Kreise durch je eine Ecke und die Punkte, in welchen die Halbierungslinien der Winkel die Gegenseiten treffen, und projiziert die Mittelpunkte der drei Kreise auf die Seiten des Dreiecks, so liegen die 6 Projektionen auf zwei Geraden.

Beweis: (G. T.); (K. M.).

(446) Weber XV, 613. XVI, 268.

3. Die drei Kreise, welche durch je eine Ecke des Dreiecks ABC und diejenigen Punkte der Gegenseite gehen, welche letztere im Verhältnis der anliegenden Seiten teilen, schneiden sich auf der Centrale des Umkreises und des Brocard'schen Kreises in zwei Punkten P und P' (vergl. § 8 Nr. 1). Ist nun K der Grebe'sche Punkt, O einer der beiden Brocard'schen Punkte des Dreiecks ABC, so ist $\sphericalangle POK = P'OK = 60^0$.

Beweis: (H. B. 2) mit (T. R.).

(833) Emmerich XX, 33. XX, 429.

4. a) Legt man in den Punkten P und P', in denen sich die drei Apollonischen Kreise (Mittelpunkte M_a, M_b, M_c und Radien r_a, r_b, r_c), welche die Seiten eines Dreiecks im Verhältnis der anliegenden Seiten teilen (vergl. § 8 Nr. 1) Tangenten an die Kreise, so schneiden sich je zwei dieser Tangenten unter einem Winkel von 60^0.

b) Ist $\alpha = 120^0$, so liegt P auf BC und P' auf der Verlängerung der Mittellinie zu BC; ist $\beta = 60^0$, so liegt P auf der Mittellinie zu AC und P' auf der Verlängerung von AC.

Beweis: a) (G. T); (G. 2). b) (K. M.); (G.).

(919) Glaser XXI, 31. XXI, 423.

5. a) Ist P der Punkt im Dreieck ABC, aus welchem die Seiten des Dreiecks unter gleichen Winkeln erscheinen, und sind D, E und F die Fufspunkte der Lote von P auf die Seiten des Dreiecks, so schneiden sich die Apollonischen Kreise des Dreiecks DEF, d. h. diejenigen, welche jede Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilen, in P.

b) Ist P' der Winkelgegenpunkt des in a) genannten Punktes, so ist das Fufspunktdreieck von P' gleichseitig. Siehe Emmerich, Die Brocard'schen Gebilde. § 49, 1.

Beweis: a) (G. T.). b) (G.).

(1279) Bücking XXV, 192. XXVI, 20.

b. Die sechs Kreise, die sich zu je dreien in den Segmentärpunkten schneiden.

6. a) Die Mittelpunkte α_1, β_1, γ_1 der um die Dreiecke OBC, OAC, OAB beschriebenen Kreise bestimmen ein Dreieck, dessen

einer Segmentärpunkt der Mittelpunkt H des um ABC beschriebenen Kreises ist. Ebenso bestimmen die Mittelpunkte α_2, β_2, γ_2 der um die Dreiecke $O'BC$, $O'AC$, $O'AB$ beschriebenen Kreise ein Dreieck, dessen einer Segmentärpunkt ebenfalls der Punkt H ist.

b) Die Dreiecke $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, ABC sind ähnlich.

c) Die Dreiecke $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ sind perspektivisch; ihr Projektionscentrum ist H.

Beweis: a) (G. 2). b) (G. 2); (G. T.). c) (G.).

(299—301) Dewulf XIV, 270—271. XV, 33—34.

7. Der Mittelpunkt des Kreises OCA sei α_1, der von OAB sei β_1, der von OBC sei γ_1; ferner der von $O'AB$ sei α_2, der von $O'BC$ sei β_2 und der von $O'CA$ sei γ_2; BC werde von $\beta_1\gamma_1$ und $\beta_2\gamma_2$ resp. in L_1 und L_2, CA von $\gamma_1\alpha_1$ und $\gamma_2\alpha_2$ resp. in M_1 und M_2, AB von $\alpha_1\beta_1$ und $\alpha_2\beta_2$ resp. in N_1 und N_2 geschnitten. $\beta_1\gamma_1$ und $\beta_2\gamma_2$ schneiden sich in α_3, $\gamma_1\alpha_1$ und $\gamma_2\alpha_2$ in β_3, $\alpha_1\beta_1$ und $\alpha_2\beta_2$ in γ_3.

Dann gelten folgende Relationen:

a) $OA = \frac{b \sin \vartheta}{\sin \alpha}$, $O'A = \frac{c \sin \vartheta}{\sin \alpha}$.

b) $AN_1 = \frac{OA}{2 \cos \vartheta} = \frac{b \operatorname{tg} \vartheta}{2 \sin \alpha}$, $AM_2 = \frac{c \operatorname{tg} \vartheta}{2 \sin \alpha}$, also $\frac{AN_1}{AM_2} = \frac{b}{c}$.

c) $\triangle AM_2N_1 \sim ABC$; $\triangle BN_2L_1 \sim CL_2M_1 \sim ABC$.

d) $M_2N_1 = N_2L_1 = L_2M_1 = r \operatorname{tg} \vartheta$; $CL_2 : AN_1 = a : c$.

e) $L_2N_1 \parallel CA$; $M_2L_1 \parallel AB$; $N_2M_1 \parallel BC$.

Die Entfernung der beiden Parallelen L_2N_1 und CA ist $AN_1 \sin \alpha = \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \vartheta$, d. h. sie ist gleich sowohl der Entfernung des Punktes K, als auch des Punktes B_1 von CA.

f) L_2N_1 geht durch K und B_1; M_2L_1 geht durch K und C_1; N_2M_1 geht durch K und A_1.

g) $L_2K = N_1B_1$; $M_2K = L_1C_1$; $N_2K = M_1A_1$.

h) $CM_1N_1B_1$ ist ein Parallelogramm und $\sphericalangle AM_1N_1 = ACB_1 = \vartheta$, ebenso $\sphericalangle BN_1L_1 = CL_1M_1 = AN_2M_2 = BL_2N_2 = CM_2L_2 = \vartheta$.

Beweise einfach, zum Teil (G. T.).

(Vorbemerkungen zu den Sätzen 332—341) XV, 285.

8. Die Vierecke $\beta_3\gamma_3\alpha_2\alpha_1$, $\gamma_3\beta_2\alpha_3\beta_1$, $\alpha_3\gamma_2\beta_3\gamma_1$ sind centrisch und die ihnen umgeschriebenen Kreise schneiden sich in dem Mittelpunkte Z von HK (H Mittelpunkt des Umkreises von ABC; K der Grebe'sche Punkt). (Z ist der Mittelpunkt des Brocardschen Kreises.)

Beweis: (G.).

(333) Stoll XIV, 598. XV, 287.

9. Die Dreiecke $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ sind kongruent und verhalten sich zum Dreieck ABC, das ihnen ähnlich ist, wie $1 : 4 \sin \vartheta^2$.

Beweis: Vergl. Nr. 6b (G.).

(334) ARTZT und STOLL XIV, 598. XV, 287.

10. Die Mittelpunkte H, H_1 und H_2 der Kreise um ABC, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ liegen auf einer zu OO' parallelen Geraden; H halbiert H_1H_2, und es ist $HO^2 = HH_2 \cdot OO'$.

Beweis: (G.), auch durch (R.) ausführbar.

(335) ARTZT und STOLL XIV, 598. XV, 287.

11. Der Punkt O ist der erste Segmentärpunkt des Dreiecks $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, der Punkt O' ist der zweite Segmentärpunkt des Dreiecks $\alpha_2\beta_2\gamma_2$; ferner ist die Mitte von HK (vergl. Nr. 8) der Grebe'sche Punkt für die beiden Dreiecke $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$.

Beweis: (G.).

(336) ARTZT und STOLL XIV, 598. XV, 287.

12. Die Kollineationsachse der Dreiecke $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ fällt mit HK zusammen.

Beweis: (K. M.); (G.).

(437) STOLL XV, 524. XVI, 202.

13. Dreht man $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ um den Punkt O, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ um O', beide um $90^0 - \vartheta$, aber ersteres in der Richtung ABC, das andere in der Richtung ACB, so liegen die drei Dreiecke ähnlich; O ist dann Ähnlichkeitspunkt der Dreiecke $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und ABC, O' der von $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ und ABC, der unendlich ferne Punkt auf OO' der von $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$.

Beweis: Folgerung aus Nr. 11 und Nr. 40.

(340) ARTZT XIV, 598. XV, 288.

14. Hat $\triangle\, abc$ den Punkt O zum ersten und H_1 (Mittelpunkt des Umkreises von $\alpha_1\beta_1\gamma_1$) zum zweiten Segmentärpunkt und ist $abc \sim \alpha_1\beta_1\gamma_1$, so steht ersteres zum letzteren in derselben Beziehung, wie $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ zu ABC. Denkt man sich nun diese Reihe der ähnlichen Dreiecke ABC, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, abc, von denen jedes nachfolgende zum vorhergehenden in derselben Beziehung steht wie $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ zu ABC in infinitum nach vorwärts und rückwärts fortgesetzt, so liegt jede Reihe homologer Punkte etwa A, α_1, a etc. auf einer Spirale. Die Gleichung der entsprechenden Spirale zu bestimmen.

Beweis: (G. T.)

(341) ARTZT XIV, 598. XV, 288.

Fernere Sätze über die Kreise, die sich zu je dreien in den Segmentärpunkten schneiden, sind in c) unter Nr. 30—37.

c. Der Brocard'sche Kreis.

15. Folgende sieben Punkte eines Dreiecks liegen auf einem Kreise:

1) Die beiden Segmentärpunkte O und O', d. h. die beiden Durchschnittspunkte der über den Seiten als Sehnen nach innen konstruierten Kreisbogen, welche die Supplemente der anliegenden Dreieckswinkel als Peripheriewinkel fassen, also

$$\sphericalangle COA = 2R - \alpha,\ AOB = 2R - \beta,\ BOC = 2R - \gamma,$$
$$AO'B = 2R - \alpha,\ BO'C = 2R - \beta,\ CO'A = 2R - \gamma.$$

2) Die drei Punkte A_1, B_1, C_1, in denen sich bezüglich BO und CO', CO und AO', AO und BO' schneiden.

3) Der Mittelpunkt H des um $\triangle ABC$ geschriebenen Kreises.

4) Der Punkt K, in welchem sich die drei durch A_1, B_1, C_1 bezüglich zu BC, CA, AB gezogenen Parallelen schneiden. Ferner ist $\sphericalangle OHO' = 2\vartheta$ ($\vartheta = \sphericalangle OAB = OBC$ u. s. w.) und $\triangle OHO'$ gleichschenklig.*)

Beweis: (G.).

(133) Brocard XI, 434. XII, 263.

16. Es sei D der Situationspunkt der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$; Punkt D' sei so bestimmt, daſs $\sphericalangle DBA = D'BC$, $\sphericalangle DCB = D'CA$ und $\sphericalangle DAC = D'AB$ ist, so ist D' Pol der Sehne OO' des Kreises der 7 Punkte (von Herrn Neuberg der Brocard'sche Kreis genannt).

Beweis: (G.); (H. B.); (K. M.).

(234) Brocard XIII, 207. XIV, 97.

17. Ist H' der Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks ABC, so ist $HD' \parallel H'D$.

Beweis: (G.).

(235) Brocard XIII, 207. XIV, 98.

18. Die Punkte H' und D' und der Punkt N, in welchem DH den umgeschriebenen Kreis schneidet, liegen in gerader Linie.**)

Beweis: (P. L.); (G. T.).

(329) Fuhrmann XIV, 526. XV, 193.

---

*) HK ist ein Durchmesser dieses Kreises, ferner steht $KH \perp OO'$. Stoll. Der Radius des Brocard'schen Kreises ist $\varrho = \frac{r}{2}\sqrt{1 - 3\operatorname{tg}\vartheta^2}$.

**) Es ist $$HD' = \frac{r\cos\vartheta}{\cos 2\vartheta}\sqrt{1 - 4\sin\vartheta^2}$$
und $$H'D = 2r\cos\vartheta\sqrt{1 - 4\sin\vartheta^2}.$$

19. Ist C_2 der Durchschnittspunkt des Kreises HAB und des Brocard'schen Kreises, so geht C_1C_2 durch die Mitte von A_1B_1.
Beweis: (G. 2); (K. M.).
(314) TARRY XIV, 357. XV, 121.

20. Läfst man in entsprechender Weise wie C_2 auch A_2 und B_2 entstehen, so liegen die Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_1B_1C_1$ perspektivisch; ihr Projektionscentrum ist der Schwerpunkt E des gegebenen Dreiecks und die Kollineationsachse steht senkrecht auf EZ (Z Mittelpunkt des Brocard'schen Kreises).
Beweis: (G.). Vergl. B. § 1 Nr. 141.
(315) TARRY XIV, 357. XV, 122.

21. Die Mittellinie nach BC trifft den umgeschriebenen Kreis in einem Punkte T, dessen Symmetriepunkt in Bezug auf $CB(A_3)$ sei. Bestimmt man ebenso die Punkte B_3 und C_3, so befindet sich $\triangle A_3B_3C_3$ mit $A_2B_2C_2$ in Ähnlichkeitslage. (Vergl. die beiden vorigen Sätze.)
Beweis: (P. L.) und (K. M.).
(327) TARRY XIV, 526. XV, 191.

22. (Ergänzung zu 19 und 20.) Die Chordale zum Brocard-schen und umgeschriebenen Kreise ist die Polare des Grebe'schen Punktes K zum umgeschriebenen Kreise.
Beweis: (G. T.) und (H. B.)
(366) FUHRMANN XV, 125. XV, 435.

23. Die Entfernung des Mittelpunktes des umgeschriebenen Kreises (Radius r) von der Radikalachse dieses Kreises und des Brocard'schen ist $\frac{r}{\sqrt{1-3\operatorname{tg}\vartheta^2}}$.
Beweis: (G. T. 2); (K. M.).
(355) BROCARD XV, 39. XV, 353.

24. Der Mittelpunkt von KE und die drei Punkte F, E, Z sind die Ecken eines Parallelogramms. (F Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises, Z Mittelpunkt des Brocard'schen Kreises).
Beweis: (G.); (K. M.).
(468) STOLL XVI, 26. XVI, 353.

25. Die Verbindungslinien H_1O und H_2O' schneiden sich im Pole D' der Sehne OO' des Brocard'schen Kreises. Vergl. b. Nr. 10.)
Beweis: (G.).
(337) STOLL XIV, 598. XV, 288.

26. Die Geraden $D'H_1$ und $D'H_2$, welche den Brocard'schen Kreis berühren, gehen aufserdem durch die Punkte O_1 und O_1'.
Beweis: Vergl. § 5 Nr. 32.
(384) BROCARD XV, 195. XV, 522.

27. Schneidet G*) den Kreis um ABC in G und G', so ist RG^2 oder RG'^2 die Potenz von R für den Brocard'schen Kreis.**)
Beweis: (G. 3). Vergl. § 5 Nr. 16 und 22.
(495) Artzt XVI, 273. XVI, 587.

28. Schneiden die Tangenten in A, B, C an den Kreis um ABC die Gegenseiten des Dreiecks ABC in α, β, γ, so ist bekanntlich $\alpha\beta\gamma$ eine Gerade; diese Gerade, die Achse G und die gemeinsame Sehne des Kreises ABC und des um G umgeklappten Brocard'schen Kreises gehen durch einen Punkt.
Beweis: (G.); (K. M.).
(496) Artzt XVI, 273. XVI, 587.

29. Auf der in dem vorigen Satze genannten Sehne liegt auch der homologe Punkt der beiden ähnlichen Dreiecke ABC und $A_5B_5C_5$. (Vergl. § 5 Nr. 21).***)
Beweis: (G.).
(497) Artzt XVI, 273. XVI, 588.

30. Die sechs Kreise um BOC, COA, AOB und $BO'C$, $CO'A$, $AO'B$, welche sich zu je dreien in O und O' schneiden, schneiden sich zu je zweien in den Punkten A_2, B_2, C_2, welche auf dem Brocard'schen Kreise liegen. NB. G. Tarry hat A_2, B_2, C_2 gefunden als Durchschnittspunkte der drei Kreise um HBC, HCA, HAB mit dem Brocard'schen Kreise (vergl. Nr. 20 und 21).
Beweis: (G.); (G. T.); (K. M.).
(357) Böklen XV, 39. XV, 355.

31. Die Mittelpunkte dieser sechs Böklen'schen Kreise fallen mit den Eckpunkten der Dreiecke $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ zusammen. (Vergl. § 6 Nr. 6. § 5 Nr. 12 und § 8 Nr. 1a.)
Beweis: Vergl. die angeführten Sätze.
(436) Stoll XV, 524. XVI, 202.

32. AA_2, BB_2, CC_2 gehen durch K und A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 durch den Schwerpunkt E.
Beweis: (G.); (G. T.); (K. M.).
(358) Böklen und Stoll XV, 39. XV, 356.

33. A_2, B_2, C_2 sind die Brennpunkte von drei Parabeln, von denen jede zwei Seiten von ABC in den Endpunkten der dritten Seite berührt.

---

*) G ist die Kollineationsachse der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$.

**) UR und KR werden beide durch G halbiert, falls U der Schnittpunkt von HR mit dem Brocard'schen Kreise ist. Artzt.

***) Ist das Kollineationscentrum zweier perspektivisch liegenden gleichwendig ähnlichen Dreiecke der eine Schnittpunkt ihrer Umkreise, so ist der homologe Punkt dieser Dreiecke der zweite Schnittpunkt. Artzt.

Beweis: (P. G.); (G.); (K. M.). (Vergl. Progr. d. Gymn. zu Recklinghausen 1884. p. 4—10.)
(359) BÖKLEN XV, 39. XV, 356.

34. Die sechs Kreise schneiden sich aufserdem zu je zweien in drei weiteren Punkten A_3, B_3, C_3, die auf einem Kreise liegen, dessen Durchmesser EH' ist. (H' Durchschnittspunkt der Höhen ABC.)
Beweis: (G.); (K. M.). Vergl. B § 1 Nr. 141. (A_3 ist identisch mit G'.)
(360) BÖKLEN XV, 40. XV, 357.

35. AA_3, BB_3, CC_3 schneiden sich in E.
Beweis: Vergl. Nr. 34.
(361) BÖKLEN XV, 40. XV, 358.

36. a) Die Punkte A_2, B_2, C_2 sind Winkelgegenpunkte von A_3, B_3, C_3.
b) A_2, B_2, C_2 liegen auf den Ecktransversalen des Grebe'schen Punktes K; A_3, B_3, C_3 auf den Ecktransversalen des Schwerpunktes E.
Beweis: Vergl. Nr. 30, 32 und 34.
(779) GLASER XIX, 273. XX, 110.

37. Auf den sechs Kreisen liegen die Brennpunkte aller Parabeln, welche eine Seite von ABC in ihrem Endpunkte und eine andere Seite berühren.
Beweis: (G.).
(362) BÖKLEN XV, 40. XV, 358.

d. Der erste Lemoine'sche Kreis, die Tucker'schen Kreise; der Taylor'sche Kreis.

Bezeichnungen siehe b Nr. 7.

38. Die sechs Punkte L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2 liegen auf einem Kreise, der mit dem Brocard'schen Kreise des Dreiecks ABC koncentrisch ist und den Radius $\frac{1}{2} r \sec \vartheta$ hat.*)
Beweis: (G. T. 3). Vergl. b. Nr. 7.
(332) STOLL XIV, 598. XV, 285.

39. Die Verbindungslinien L_1M_2, M_1N_2, N_1L_2 gehen durch den Grebe'schen Punkt K des Dreiecks ABC; und die Dreiecke $L_1M_1N_1$ und $L_2M_2N_2$ sind deshalb perspektivisch und haben K zum Projektionscentrum.
Beweis: Vergl. b Nr. 7 f.
(338) STOLL XIV, 598. XV, 288.

*) Lemoine, Nouv. Ann. 1873, S. 364—366.

40. Die Dreiecke $L_1M_1N_1$ und $L_2M_2N_2$ sind unter sich kongruent und ähnlich dem Dreieck ABC.

Beweis: (G. T.). Vergl. b Nr. 7h und 7e.

(339) Stoll XIV, 598. XV, 288.

41. Die Segmente L_1L_2, M_1M_2, N_1N_2 sind proportional den Kuben der Seiten des Dreiecks ABC. Der konstante Faktor ist $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$.

Beweis: (T. R.).

(381) Tucker XV, 195. XV, 521.

42. a) K ist der zweite Segmentärpunkt des Dreiecks $L_1M_1N_1$ und der erste des Dreiecks $L_2M_2N_2$, während O der erste Segmentärpunkt von $L_1M_1N_1$ und O' der zweite von $L_2M_2N_2$ ist.

b) Sind K_1 und K_2 die Grebe'schen Punkte der beiden Dreiecke $L_1M_1N_1$ und $L_2M_2N_2$, so ist K_1KK_2 eine Gerade, $HK \perp K_1K_2$, $KK_1 = KK_2$, OK_1 und $O'K_2$ schneiden sich in D', dem Pole der Sehne OO' des Brocard'schen Kreises.

Beweis: a) und b) (G.).

(382) Stoll XV, 195. XV, 521.

43. Schneiden sich L_1M_1 und L_2N_2 in A_4, M_1N_1 und M_2L_2 in B_4, N_1L_1 und N_2M_2 in C_4, so sind die Seiten des Dreiecks $A_4B_4C_4$ parallel denen von ABC. Der Ähnlichkeitspunkt ist der Winkelgegenpunkt S' vom Mittelpunkte S von OO'.*)

Beweis: (G. T.); (K. M.); (G. 2).

(408) Fuhrmann XV, 359. XVI, 17.

44. Die Kollineationsachse der Dreiecke $L_1M_1N_1$ und $L_2M_2N_2$ steht senkrecht auf HK.

Beweis: (K. M.); (G.).

(438) Stoll XV, 524. XVI, 203.

45. Die Schnittpunkte von M_1L_2 und L_1N_2, L_1N_2 und N_1M_2, N_1M_2 und M_1L_2 bilden ein neues Dreieck PQR, das mit ABC projektivisch ist; das Projektionscentrum ist der Grebe'sche Punkt K.

Beweis: (G. 2); (P. L.); (K. M.).

(469) Stoll XVI, 26. XVI, 353.

46. a) In das Sechseck $L_1L_2M_1M_2N_1N_2$ läſst sich eine Ellipse beschreiben, deren Mittelpunkt in die Mitte von FZ fällt.

b) Die Verbindungslinien von A, B, C mit den Berührungspunkten auf BC, CA, AB schneiden sich im Punkte S' und die Verbindungslinien von P, Q, R mit den Berührungspunkten auf

---

*) 1) S' liegt auf der Geraden ZH', da Z Höhenschnittpunkt von $A_4B_4C_4$ ist. 2) $S'Z : S'H' = A_4B_4 : AB = 1 : 4\cos\vartheta^2$.

QR, RP, PQ schneiden sich in einem Punkte T, der mit K und S' auf derselben geraden Linie liegt.

Beweis: a) (G.); (K. M.); b) (H. B.); (K. M.).

(470) Stoll XVI, 26. XVI, 354.

47. Die Schnittpunkte von M_1N_1 mit M_2N_2, N_1L_1 mit N_2L_2 und L_1M_1 mit L_2M_2 seien resp. A_6, B_6, C_6; dann schneiden die Geraden AA_6, BB_6, CC_6 sich in D', dem Pol von OO' in Bezug auf den Brocard'schen Kreis.

Beweis: (G. T.); (K. M.).

(553) Fuhrmann XVI, 503. XVII, 356.

48. Schneiden diese Linien die Seiten von PQR (Bezeichnungen wie Nr. 45—47) resp. in A_7, B_7, C_7 und sind Z_a, Z_b, Z_c die Fufspunkte von Z auf die Seiten von ABC, so gehen A_7Z_a, B_7Z_b, C_7Z_c durch K. Sonach ist K, da auch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der in Nr. 46 genannten Ellipse mit den resp. Seiten von ABC und PQR durch K gehen, der Schnittpunkt von 24 Geraden; 10 Gerade giebt Kiehl in seinem Programm (Bromberg 1881) an, dann

1) L_1M_2, M_1N_2, N_1L_2.
2) A_4A_6, B_4B_6, C_4C_6.
3) Die drei letztgenannten Berührungssehnen.
4) A_7Z_a, B_7Z_b, C_7Z_c.
5) DS' und NZ'.

Beweis: (G.); (K. M.).

(554) Fuhrmann XVI, 504. XVII, 357.

49. Unter welcher Bedingung ist ein Tucker'scher Kreis zugleich ein Steiner'scher Kreis? Bem.: Man erhält sechs Punkte eines Steiner'schen Kreises, wenn man von zwei Winkelgegenpunkten eines Dreiecks Lote auf die Seiten fällt. (S. Steiner *Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques*. Werke I, S. 191,) — Die Seiten eines Dreiecks, welches zu $\triangle ABC$ ähnlich liegt in Bezug auf dessen Grebe'schen Punkt als Ähnlichkeitspunkt, treffen den Umfang des Dreiecks ABC in sechs Punkten eines Tucker'schen Kreises (Lemoine 1873).

Auflösung: (G. T.); (G.).

(1152) Emmerich XXIII, 511. XXIV, 269.

50. ω sei der Brocard'sche Winkel eines Dreiecks ABC, ϑ der Winkel, unter welchem die Randdiagonalen eines eingeschriebenen Tucker'schen Sechsecks symmetrisch gegen die Seiten des Dreiecks geneigt sind. Falls nun ϑ nicht gröfser ist als der

kleinste Winkel von $\triangle ABC$, so gilt für das Sechseck die Inhaltsformel $S = \triangle \frac{\sin\omega \sin(\omega + 2\vartheta)}{\sin(\omega + \vartheta)^2}$.

Beweis: (G. T. 2).

(1153) Emmerich XXIII, 591. XXIV, 335.

---

51. ABC sei ein spitzwinkliges Dreieck (für ein stumpfwinkliges erfahren die Beweise kleine Änderungen). Die Fuſspunkte der Höhen seien A', B', C'; die Seiten des Höhendreiecks a', b', c'; die Mitten derselben resp. D, E, F; DF schneide AB in G und CB in H; FE schneide AC in I und AB in K; DE schneide AC in L und CB in N. Dann ist

a) $GH = IK = LN$. Beweis: (G.).

b) $\triangle ABC = r \cdot GH$. ($r$ Radius des um ABC beschriebenen Kreises.) Beweis: (T. R.); (R.); (G. T.).

c) G, H, I, K, L, N liegen auf der Peripherie eines Kreises. Beweis: (G. 2).

d) Der dem Dreieck DEF eingeschriebene Kreis ist koncentrisch mit dem Kreise in c). Beweis: (G.).*)

(121—124) Kiehl XI, 315. XII, 109.

52. Die Projektionen der Höhenfuſspunkte A', B', C' eines Dreiecks auf die Seiten desselben liegen auf einem Kreise (dem Taylor'schen Kreise).**)

Beweis: (G.).

(*378*) Mathesis. XX, 34.

53. Im Dreieck ABC seien die Fuſspunkte der Höhen mit A', B', C', die Mittelpunkte von $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ bezw. mit A'', B'', C'' bezeichnet, und es treffe $B''C''$ die Seite AC in B_a, die Seite AB in C_a, ferner treffe $C''A''$ die Seite BA in C_b, die Seite BC in A_b und endlich treffe $A''B'$ die Seite CB in A_c, die Seite CA in B_c. Dann sind nach Kiehl (vergl. Nr. 51) und Progr. d. Friedr. Wilh. Realg. in Stettin 1886, § 55 und 56)

---

*) Zusatz: „Ist $\sphericalangle A$ ein stumpfer, so halbiert die Mittelsenkrechte von LG den Winkel D, die Mittelsenkrechten von KN und IH dagegen halbieren die Nebenwinkel von E und F, so daſs der Kreis G, H, I, K, L, N concentrisch mit dem EF angeschriebenen Kreise ist.
Stoll. Glaser.

**) Mit Benutzung dieses Satzes kann der von Bleicher XIX, 415 aufgestellte Satz: „Beschreibt man über den Höhen eines Dreiecks als Durchmessern Kreise K_h und über denjenigen Segmenten der Höhen, welche zwischen den Ecken des Dreiecks und dem Höhenschnittpunkt liegen, als Durchmessern Kreise K_s, so liegen die sechs weiteren Schnittpunkte, welche die drei Kreise K_h mit den drei Kreisen K_s gemeinschaftlich haben, auf einer neuen Kreisperipherie K" bewiesen werden.

die Transversalen $B_a C_a$, $C_b A_b$, $A_c B_c$ einander gleich und ihre sechs Endpunkte liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Inkreises von $A''B''C''$ zusammenfällt; hinzufügen läſst sich noch, daſs das Quadrat des Halbmessers dieses Kreises gleich ist der Summe der Quadrate des Inkreishalbmessers und des Umfanges von $A''B''C''$. Bewiesen soll werden:

a) A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b sind die Projektionen der Fuſspunkte der Höhen auf die Seiten, der Kiehl'sche Kreis ist also identisch mit dem in dem vorigen Satze behandelten Taylorschen Kreise.

b) Der Mittelpunkt T dieses Kreises liegt auf HK (H Mittelpunkt des Umkreises, K Grebe'scher Punkt des Dreiecks ABC) und zwar in der Richtung HK, so daſs, wenn man den Radius des Brocard'schen Kreises mit $\mathfrak{R}$, den des Inkreises von $A''B''C''$ mit $\mathfrak{r}$, den des Umkreises von ABC mit r bezeichnet, $KT = 2\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{r} : r$ ist.*)

Beweis: a) (G.). b) (P. L.); (K. M.).

(941ab) Stoll XXI, 194. XXI, 584.

e. Die Neuberg'schen Kreise.**)

54. Die Summe S der Flächen der den Seiten des Dreiecks zugeordneten Neuberg'schen Kreise ist $S = \pi(a^2 + b^2 + c^2)\frac{e^2}{1 - e^2}$, wenn mit e die Excentricität der Brocard'schen Ellipse bezeichnet wird.

Beweis: (G. T.).

(932) Beyens XXI, 115. XXI, 516.

55. Wenn M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte der Neuberg'schen Kreise des Dreiecks ABC bezeichnen, so schneiden sich die Verlängerungen von $M_1 A$, $M_2 B$, $M_3 C$ im Tarry'schen und die entsprechend an die Neuberg'schen Kreise in A, B, C gelegten Tangenten im Steiner'schen Punkte des Dreiecks ABC.

Beweis: (K. M.).

(1183) Stoll XXIV, 189. XXIV, 603.

---

*) Ist $\triangle ABC$ spitzwinklig, so liegt K zwischen H und T. Ist $\triangle ABC$ rechtwinklig, so wird $\mathfrak{r} = 0$, T fällt mit K zusammen in die Mitte der Hypotenusenhöhe. Ist $\triangle ABC$ stumpfwinklig, so liegt T zwischen H und K und der Kreis $(T, \mathfrak{r})$ wird der Ankreis von $A''B''$.

**) Neuberg'sche Kreise sind die Örter der Spitzen von Dreiecken mit fester Grundlinie und konstantem Brocard'schen Winkel. Vergl. XXI, 115 Anmerk.

§ 9. Besondere Kegelschnitte.

a. Kegelschnitte, erzeugt durch projektivische Punktreihen und Strahlenbüschel.

1. Die veränderlichen Punkte b_0 und c_0 liegen auf den Seiten CA und AB des Dreiecks ABC und genügen der Bedingung $\frac{Cb_0}{Ab_0} = \frac{Ac_0}{Bc_0}$. Die Reihen (b_0) und (c_0) sind ähnlich und ihre Projektionsstrahlen berühren die Parabel $(b_0 c_0)$

a) Die Elemente dieser Parabel sind zu bestimmen.

b) a_0, b_0, c_0 sind die Halbierungspunkte der Dreiecksseiten BC, CA, AB; $(a), (b), (c)$ deren Mittelsenkrechten; a, b, c Punkte auf den letzteren und genügen der Bedingung $a_0 a : b_0 b : c_0 c = BC : CA : AB$. Die Reihen $(a_0 a)$, $(b_0 b)$, $(c_0 c)$ sind ähnlich und bestimmen die Parabeln (ab), (bc), (ca); ihre Elemente sind zu bestimmen.

Bemerkung. Die Reihen sind so zu wählen, daſs die Büschel $A(b_0 b)$ und $A(c_0 c)$ gegenläufig sind u. s. w.

c) Welche Tangenten berühren die Parabel (bc) auf der Geraden AH_1 (H_1 Höhenpunkt von ABC) und welche auf der Geraden HA_2? (über A_2 vergleiche § 8 Nr. 21).

d) A ist für Parabel (bc) der Pol von HA_2. (H Mittelpunkt des Kreises um ABC).

e) Der Halbierungspunkt von $B_1 C_1$, der von bc und der Mittelpunkt F des Feuerbach'schen Kreises für ABC liegen auf einer Geraden.

f) Ist α der Fokus von (bc), so ist $\triangle\, abc \sim ABZ$, in welchem $\sphericalangle ABZ = 2R - A$ und $BZ \parallel CA$.

g) Jedes Dreieck der Schar abc liegt perspektivisch zu ABC, der Ort des Kollineationscentrums D ist zu bestimmen.

h) Zu bestimmen die Kurve, welche die Kollineationsachse $\mathfrak{A}$ einhüllt.

i) $HD \perp \mathfrak{A}$.

Beweis: Vergl. Progr. d. Gymn. zu Recklinghausen*) 1884. (399—407) Artzt XV, 359. —

2. Die Gerade $A_1 B_1 C_1$, auf welche sich das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ der Sätze in § 5 Nr. 4—6 reduziert, geht durch den Schwer-

*) Artzt: Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks und auf deren Mittelsenkrechten, sowie über kongruente Strahlenbüschel aus den Ecken desselben; ein Beitrag zur Geometrie des Brocard'schen Kreises. Vergl. XV, 460—465. Ferner Artzt: Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umgeschrieben sind, nebst einer Anwendung auf die Gerade der zwölf harmonischen Punktreihen und ihre beiden Gegenbilder, die Ellipse und den Kreis der zwölf harmonischen Punktsysteme. Vergl. XVIII, 94—106.

punkt E und ist gemeinsame Tangente der drei Parabeln in § 9a Nr. 1b.

Beweis: (G.), Vergl. Brocard: *Propriétés de l'hyperbole des neuf points* und Artzt: Progr. Recklinghausen 1884.

(522) BROCARD XVI, 357. XVII, 33.

3. Die durch den Schwerpunkt E zu dieser Geraden gezogene Senkrechte tangiert ebenfalls diese drei Parabeln.

Beweis: (G.).

(523) BROCARD XVI, 357. XVII, 33.

4. (Im Anschluſs an die Sätze § 9 Nr. 1.) Man konstruiere über den Seiten eines Dreiecks ABC die gleichseitigen Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1, deren Mittelpunkte A_2, B_2, C_2 seien. Dann schneiden sich AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkte P_1, AA_2, BB_2, CC_2 in einem Punkte P_2. Dies ist bekannt. Daran schlieſsen sich noch folgende Eigenschaften:

a) M, P_1, P_2 liegen in einer Geraden (M Mittelpunkt des Umkreises).

b) ABC und $A_1B_1C_1$ haben dieselbe Kollineationsachse wie ABC und $A_2B_2C_2$.

c) Diese Kollineationsachse ist senkrecht zu MP_1P_2.

d) P_2 ist Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises zu $A_1B_1C_1$.

e) Der Winkelgegenpunkt von P_1 im Dreieck $A_2B_2C_2$ ist M.*)

Beweis: a) (H. B.); (G.). b), c), d), e) (G.); a), c) und d) auch durch (K. M.) ausführbar. Vergl. B § 1 Nr. 165—167.

(655) FUHRMANN XVIII, 37. XVIII, 442.

5. Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten (vergl. § 9a Nr. 2 und 3) der drei durch ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks bestimmten Parabeln sind parallel den Asymptoten der Hyperbel der neun Punkte (vergl. Nr. 10—13).

Beweis: (G. T.); (G.). Vergl. Artzt: Progr. Recklinghausen p. 11.

(625) KIEHL XVII, 447. XVIII, 195 und XIX, 31.

6. (Im Anschluſs an den vorigen Satz.) Sind A_2, B_2, C_2 die Brennpunkte der drei Parabeln, welche durch ähnliche Punktreihen auf den Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC erzeugt werden, und verbindet man dann den Schwerpunkt E mit A und A_2 resp. mit B und B_2, C und C_2, so sind die Halbierungslinien

---

*) Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks je zwei gleichschenklige Dreiecke, bei denen sich die Basiswinkel zu 90° ergänzen und deren Spitzen resp. A', A'', B', B'', C', C'' sind, so schneiden sich AA', BB', CC' in einem Punkte P' und AA'', BB'', CC'' in einem Punkte P''; $MP'P''$ liegen auf einer Geraden und die Dreiecke ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ haben dieselbe Kollineationsachse. FUHRMANN.

der Winkel AEA_2, BEB_2, CEC_2 die gemeinschaftlichen Tangenten T und T' der drei Parabeln.*)

Beweis: (G.).

(678) FUHRMANN XVIII, 198. XVIII, 600.

7. Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten der drei Parabeln in Nr. 5 halbieren den Winkel HEZ und seinen Nebenwinkel. (H Mittelpunkt des Umkreises, Z der des Brocard'schen Kreises, E Schwerpunkt).

Beweis: (G.); (K. M.).

(681) STOLL XVIII, 277. XIX, 25.

8. Die Parabel P_a der Brocard'schen Gruppe (vergl. Progr. des Realg. zu Bromberg 1888. § 15) steht in derselben Beziehung zu einer Parabel $\mathfrak{R}_a$, welche die Dreiecksseiten AB und AC in den Endpunkten der Verlängerungen von AH_c, AH_b, (H_b, H_c Höhenfufspunkte) um sich selbst berührt, wie die Parabel $\mathfrak{Q}_a$ der zweiten Artzt'schen Gruppe zur Parabel $\mathfrak{P}_a$ der ersten Artzt'schen Gruppe (ibid. oder Progr. des Gymn. zu Recklinghausen 1884, § 1 a, § 2 a).

Zusatz: A_3 (Projektion des Höhenschnittpunktes auf die Mittellinie AS_a) ist der Brennpunkt von $\mathfrak{R}_a$; die Achse verläuft parallel AK, der Parameter ist $\frac{\Delta^3}{t_a^3}\cos\alpha$.

Beweis: (G.).

(899) EMMERICH XX, 511. XXI, 275.

9. Im $\triangle ABC$ schneiden sich die Ecktransversalen AA', BB', CC' in γ, β, α und die Seiten BC, CA, AB so, dafs $\lambda = \frac{CB'}{AB'} = \frac{AC'}{BC'} = \frac{BA'}{CA'}$; E ist der Schwerpunkt von ABC, A'' liegt so auf AE, dafs $AE = EA''$ u. s. w.

a) Es ist $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot A + \cot B + \cot C$; speziell: $\cot A + \cot B + \cot C = \cot(180^0 - BEC) + \cot(180^0 - CEA) + \cot(180^0 - AEB)$.

b) $\cot B'BC + \cot C'CA + \cot A'AB = \frac{2+\lambda}{\lambda}(\cot A + \cot B + \cot C)$ und $\cot B'BA + \cot C'CB + \cot A'AC = (2\lambda + 1) \cdot (\cot A + \cot B + \cot C)$.**)

*) Auf T und T' liegen die Achsen der Ellipse ABC, deren Centrum in E fällt, und die Achsen dieser Ellipse sind den Asymptoten der Hyperbel der neun Punkte parallel.

**) Wenn man die Seiten eines Dreiecks fortlaufend um sich selbst verlängert und die erhaltenen Endpunkte mit den bezüglichen Gegenecken verbindet, so haben die Winkel, die hierdurch an der Ecke so entstehen, dafs man zu dem äufseren Winkel noch den Dreieckswinkel hinzufügt, die Eigenschaft, dafs die Summe ihrer Cotangenten gleich

c) α liegt auf der Ellipse um BCE mit dem Centrum A'' u. s. w. ABC gehört zur Schar $(\alpha\beta\gamma)$, E ist ihr Nulldreieck. $\alpha\beta\gamma = \text{Max} = 4\,ABC$, wenn $\beta\gamma \parallel BC$ u. s. w.

Beweis: a) und b) (G. T. 2). c) (P. G.)

(635ab und 636) ARTZT XVII, 526. XVIII, 274—276.

b. Kegelschnitte, die dem Dreieck umgeschrieben oder eingeschrieben sind.

10. Die neun Punkte A, B, C, D, F, S', Z', H', N (Bezeichnungen siehe § 6 Nr. 22 Anmerkung) liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel Γ, deren Mittelpunkt W die Mitte von $H'N$ ist und auf der Mediane des Trapezes $DH'EZ'$ liegt.*)

Beweis: (G. T.); (K. M.).

(395) BROCARD XV, 290. XV, 609.

11. Die in dem vorigen Satze erwähnte Mediane ist parallel HD, sie geht durch die Mitte o von HH', den Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises, und durch S, den Mittelpunkt von OO'.

Beweis: (G.).

(396) BROCARD XV, 290. XV, 611.

12. Die Asymptoten von Γ sind die Sehnen Wm_1, Wm_2 des Feuerbach'schen Kreises, wo $m_1 m_2$ der mit HD', DH', EZ' parallele Durchmesser des Feuerbach'schen Kreises ist.

Beweis: (P. G.); (G. 2).

(397) BROCARD XV, 290. XV, 611.

13. φ und ψ seien die Winkel, welche von den Verlängerungen der Seiten des vollständigen Vierecks $ABCN$ gebildet werden. Die Halbierungslinien von φ und ψ stehen auf einander senkrecht und sind den Achsen der gleichseitigen Hyperbel Γ parallel.**)

Beweis: Vergl. Fuhrmann: Anal. Geom. der Kegelschnitte. § 158. (G.).

(398) BROCARD XV, 290. XV, 612.

Null ist, d. h. die Summe ber Cotangenten der Winkel, welche die Mittellinien eines Dreiecks mit den betreffenden Seiten bilden, ist Null. (Vergl. auch C. § 1 Nr. 53.) FUHRMANN.

*) Vergl. BROCARD: *Hyperbole des neuf points, nouvelle analogie entre l'hyperbole équilatère et le cercle. Journ. de math. spéc.* 1884.

**) Die Halbierungslinien der Winkel resp. Nebenwinkel $(AB, B_1 A_1)$, $(BC, C_1 A_1)$ und $(CA, C_1 A_1)$ sind den Asymptoten parallel. (ARTZT, STEGEMANN.)

14. Die Gerade HH' ist die Polare des Punktes K in Bezug auf die Hyperbel Γ.*)

Beweis: (H. B.); (K. M.).

(453) STEGEMANN XV, 614. XVI, 271.

15. a) E ist der Schwerpunkt des Dreiecks $RH'N$, daher liegen R, E, W in gerader Linie und es ist $RE = 2\,WE$.

b) Die Punkte R, S und S' liegen in gerader Linie.**)

Beweis: a) (G.); b) (H. B.); (K. M.).

(604ab) STOLL XVII, 288. XVIII, 35.

16. a) Die Punkte D, F, Z' (F Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises) liegen in gerader Linie und es ist $DF = 3\,FZ'$.

b) Die Punkte N, S', F liegen in gerader Linie.

Beweis: a) (G.); (K. M.). b) (H. B.) mit Bezug auf 15b. (G.); (K. M.).

(605ab) STOLL XVII, 288. XVIII, 35.

17. a) Die Senkrechten von den Mittelpunkten S_a, S_b, S_c der Seiten des Dreiecks ABC auf die entsprechenden Seiten von $A_1B_1C_1$ schneiden sich in einem Punkte T, der die Strecke RH' halbiert und mit N, Z und E in gerader Linie liegt. Auch T, F (Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises), S und W (Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel der neun Punkte) bilden eine gerade Linie und WT ist ein Durchmesser des Feuerbach'schen Kreises.

b) Die Geraden KF, DH' und NE schneiden sich in einem Punkte V, welcher der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ ist.***)

Beweis: a) und b) (G.); (K. M.).

(665ab) STOLL XVIII, 132. XVIII, 503.

18. Die gleichseitige Hyperbel Γ_1 durch A_1, B_1, C_1 und den Schwerpunkt E des Dreiecks ABC geht auch durch den Mittelpunkt H des Umkreises dieses Dreiecks.

Beweis: (G.).

(1023) BÜCKING XXII, 197. XXII, 588.

19. Verbindet man den Mittelpunkt M_0 der $C^2\,(ABCOO')$ mit dem Schwerpunkt E des Dreiecks ABC und macht $M_0E : ET' = 1 : 2$ (M_0ET' eine Gerade), so liegt T' auf der Hyperbel der neun Punkte und der Winkelgegenpunkt T ist Pol von OO' für den Kreis ABC.

Beweis: (G.); (K. M.).

(1024) BÜCKING XXII, 197. XXII, 588.

---

*) D' ist der Pol von FZ, S der Pol der durch F zu HK gezogenen Parallele, Z der Pol von FD', H der Pol von FK und F der Pol von HK. (Bezeichnungen siehe § 6 Nr. 32 Anmerkung.)

**) S, I, S', R liegen harmonisch. (I Schnittpunkt von HH' und DD'.)

***) N, V, H, H' liegen auf einem Kreise.

20. Die Punkte A, B, C, O, O' bestimmen eine Hyperbel, welche auch durch das perspektivische Centrum S' des Dreiecks ABC und desjenigen Dreiecks geht, dessen Ecken die Seitenmitten des Brocard'schen Dreiecks $A_1B_1C_1$ sind.*)

Beweis: (G.); (K. M.).

(1025) Bücking XXII, 197. XXII, 589.

21. Der Mittelpunkt M_0 der C^2 $(ABCOO')$ ist die Mitte von RS'.

Anmerkung: Der Satz gilt für O und O' als beliebige Winkelgegenpunkte und R als den Winkelgegenpunkt des unendlich entfernten Punktes der Geraden OO'.

Beweis: (H. B.); (K. M.).

(1035) Bücking XXII, 274. XXIII, 41.

22. OO' ist parallel den Tangenten in R und S' an die C^2 $(ABCOO'RS')$.

Anmerkung: Der Satz gilt nur, wenn O und O' die Brocard-schen Punkte sind.

Beweis: Folgerung a. d. vorigen Satz.

(1036) Bücking XXII, 274. XXIII, 42.

23. Die Tangenten der C^2 $(ABCOO')$ in A, B, C findet man, indem man die Schnittpunkte der Dreiecksseiten und OO' mit den bezw. gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks verbindet und die Gegentransversalen dieser Verbindungslinien bestimmt. Analog bestimmt man die Tangenten der Hyperbel der neun Punkte durch KH in A, B, C.

Beweis: (G.); (K. M.). O und O' können beliebige Winkelgegenpunkte sein.

(1037) Bücking XXII, 274. XXIII, 42.

24. Die Verbindungslinien A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 der Ecken der beiden Brocard'schen Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ schneiden sich bekanntlich im Schwerpunkt des Dreiecks ABC, die beiden Brocard'schen Dreiecke sind also unter sich kollinear. Es soll bewiesen werden, daſs die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Kiepert'schen und Jerabek'schen Hyperbel ihre Kollineationsachse ist.

Beweis: (K. M.).

(1184) Stoll XXIV, 189. XXIV, 604.

25. Die Inverse irgend eines Durchmessers des Umkreises eines Dreiecks ist eine gleichseitige, dem Dreieck umgeschriebene Hyperbel, deren Asymptoten die Fuſspunktlinien der Endpunkte des Durchmessers sind.

---

*) Die Hyperbel geht auch durch den Steiner'schen Punkt R, da dieser der Winkelgegenpunkt des unendlich fernen Punktes auf OO' ist.
Meyer.

Beweis: Vergl. Progr. d. Friedr. Wilh. Realgymn. Stettin 1888. § 129 und Fuhrmann: Synth. Beweise § 86.
(1301) Stoll XXV, 351. XXVI, 109.

---

26. Zeichnet man in eine Ellipse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ Dreiecke von größtem Inhalt (so daſs der Mittelpunkt der Ellipse Schwerpunkt des Dreiecks wird), so haben alle denselben Brocard'schen Winkel.*)

Beweis: (G. T.); (P. G.); (K. M.)
(802) Fuhrmann XIX, 430. XX, 268 (808 statt 802).

27. a) Bewegt sich ein Punkt auf dem Umkreise eines Dreiecks, so drehen sich die zugehörigen Harmonikalen um den Grebe'schen Punkt.

b) Die Harmonikale des Steiner'schen Punktes (vergl. Progr. des Friedr. Wilh. Realg. 1887. § 95) geht durch den Grebe'schen Punkt und den Schwerpunkt.

c) Die zuletzt genannte Gerade ist der Ort der Punkte, deren Winkelgegenpunkte und Seitengegenpunkte mit dem Schwerpunkt in gerader Linie liegen.

Beweis: a) Spezieller Fall von G § 5 Nr. 12. b) und c) (K. M.); (P. G.).
(950) Glaser XXI, 280. XXII, 21.

28. Zieht man zu irgend einem Punkte P der dem Dreieck $A_1A_2A_3$ umschriebenen Ellipse kleinsten Flächeninhaltes die drei Ecktransversalen A_1P, A_2P, A_3P, welche die Gegenseiten bezw. in den Punkten A_1', A_2', A_3' schneiden, teilt man ferner die drei Seiten des Dreiecks durch A_1'', A_2'', A_3'' in reciprokem Verhältnis, so daſs $A_2A_1' : A_1'A_3 = A_3A_1'' : A_1''A_2$ u. s. w., so ist

$$A_1A_1'' \parallel A_2A_2'' \parallel A_3A_3''.$$

Beweis: (K. M.); (R.); (P. G.).
(1056) v. Jettmar XXII, 435. XXIII, 186.

29. Zieht man zu irgend einem Punkte P einer Geraden G die Ecktransversalen A_1P, A_2P, A_3P, welche die Gegenseiten bezw.

---

*) Dieser Satz ist ein spezieller Fall des folgenden Satzes: Zeichnet man in eine Ellipse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ein n Eck vom gröſsten Inhalt, so hat dessen Brocard'scher Winkel ϑ einen konstanten Wert, wenn man unter cot ϑ den Quotienten aus der Summe S^2 der Quadrate der Seiten des n Ecks und dessen vierfachem Inhalt f versteht. Es ist

$$\cot\vartheta = \frac{S^2}{4f} = \operatorname{tg}\frac{2}{n}R \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Vergl. Artzt: Beiträge zur Geometrie des Brocard'schen Kreises.

in den Punkten A_1', A_2', A_3' schneiden und teilt die Seiten des Dreiecks durch die Punkte A_1'', A_2'', A_3'' bezw. in reciprokem Verhältnis, so gehen die Ecktransversalen A_1A_1'', A_2A_2'', A_3A_3'' durch einen Punkt P' eines dem Dreieck $A_1A_2A_3$ umschriebenen Kegelschnitts. (Kürzer: Der Seitengegenpunkt eines in einer Geraden G bewegten Punktes bewegt sich auf einem durch die Eckpunkte des Dreiecks gehenden Kegelschnitt.)

Beweis: (K. M.). Verallgemeinerung d. vorigen Satzes.

(1057) v. Jettmar XXII, 435. XXIII, 187.

30. Die Harmonikalen der in der Harmonikalen des Höhenschnittpunktes liegenden Punkte umhüllen denjenigen Kegelschnitt, welcher die Dreiecksseiten in den Höhenfußspunkten berührt.*)

Beweis: (K. M.); (P. G.).

(1058) v. Jettmar XXII, 435. XXIII, 187.

31. Die Achsen der um das Dreieck ABC beschriebenen Ellipse, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC ist (Steiner'sche Ellipse) sind parallel den Asymptoten der Kiepertschen Hyperbel.

Beweis: (G.). Vergl. Fuhrmann: Synth. Beweise. Anh. Nr. 87—89.

(1204) Stoll XXIV, 343. XXV, 109.

32. Die Asymptoten einer beliebigen durch A, B, C gehenden gleichseitigen Hyperbel schneiden eine Seite des $\triangle ABC$ in U und V; dann ist das Maximum von UV gleich dem Durchmesser des Kreises ABC.

Beweis: (R. K.); (G.).

(1335) Bücking XXV, 514. XXVI, 422.

33. Es giebt drei gleichseitige durch A, B, C gehende Hyperbeln, deren Asymptoten jedesmal ein Durchmesser und eine Tangente des Feuerbach'schen Kreises des $\triangle ABC$ sind.

Beweis: Ein besonderer Fall von Nr. 25.

(1337) Bücking XXV, 515. XXVI, 422.

---

*) 1. Die Harmonikale eines Punktes P ist Tangente des Inkreises, wenn P ein Punkt auf der Harmonikalen des Grebe'schen Punktes ist. Meyer.

2. Ist ein Kegelschnitt K_u um ein Dreieck und K_i in dasselbe beschrieben, und ist die Paskal'sche Gerade p des Dreiecks in Bezug auf K_u zugleich Harmonikale des Brianchon'schen Punktes P des Dreiecks für K_i, so ist p die Polare von P für beide Kegelschnitte. — Die Harmonikalen aller Punkte von p umhüllen K_i, die harmonischen Pole aller Geraden durch P liegen auf K_u. — Die Harmonikalen aller Punkte von K_u gehen durch P, die harmonischen Pole aller Tangenten von K_i liegen auf p. Holländer.

34. A_2 sei die Projektion des Umkreismittelpunktes eines Dreiecks auf die Gegenmittellinie AK_a, A_3 sei die Projektion des Höhenschnittpunktes auf die Mittellinie AS_a. Die Winkelgegenpunkte A_2, A_3 sind die Brennpunkte einer Ellipse, welche die Brocard'sche Ellipse in K_c berührt.

Beweis: (G. 2); (K. M.).

(886) Emmerich XX, 434. XXI, 189.

S. ferner Böklen: Einige Sätze, die mit dem Aufgaben-Repertorium in naher Verwandtschaft stehen. XV, 21—23. In diesen Sätzen werden Eigenschaften von Dreiecken angegeben, die einer Ellipse (Halbachsen a und b) umgeschrieben und einem Kreise um den Mittelpunkt O der Ellipse (Radius $a \pm b$) eingeschrieben sind.

F.

Geometrische Örter und Umhüllungskurven.

I. Geometrische Örter.

§ 1. Gerade Linien sind gegeben.

a. Der Ort ist eine Gerade.

1. Gegeben eine Gerade AB und auf ihr ein beweglicher Punkt C; über AC und BC konstruiert man nach derselben Seite die gleichseitigen Dreiecke ACD und CBE. Gesucht wird

1) der geometrische Ort der Mitte F der Seite DE;

2) der Ort des Schwerpunktes S von $\triangle CDE$;

3) der Ort für den Durchschnittspunkt O der Höhen des Dreiecks CED;

4) der Ort M des um CDE beschriebenen Kreises (M hat eine konstante Lage).

Lösungen: (G.).

(*153*) Journ. élém. XIV, 358—359.

2. Durch die Ecke C eines gleichseitigen Dreiecks ABC zieht man eine beliebige Gerade, welche von den auf AB in A und B errichteten Senkrechten resp. in P und Q getroffen wird; über PQ sind zwei gleichseitige Dreiecke beschrieben. Zu beweisen, dafs sich ihre Spitzen D und E auf AB und einer Parallelen zu AB bewegen.

Beweis: (G.).

(*99*) Journ. élém. XIII, 126.

3. Dreieck ABC sei seinem Schwerliniendreieck ähnlich und $a \gtrless c \gtrless b$. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes M des Umkreises von ABC, wenn die Punkte A und B fest sind, C veränderlich ist?

Lösung: (G.).

(736b) Stegemann XIX, 32. XIX, 420.

b. Der Ort ist ein Kreis.

4. Auf der gegebenen Strecke AB sind in A und B nach derselben Seite hin zwei Senkrechte AC und BD so errichtet, dafs der Inhalt des Trapezes $ABCD$ den konstanten Wert m^2 hat. Von der Mitte E von AB sei auf CD die Senkrechte EF gefällt. Gesucht wird der Ort für F.
Lösung: (G.).
(*154*) Nouv. Ann. XIV, 359.

5. Auf zwei Parallelen, deren Entfernung AB gegeben ist, sind auf derselben Seite der letzteren die Strecken AA' und BB' so angenommen, dafs $AA' \cdot BB' = AB^2$; AB' und BA' schneiden sich in M. Gesucht wird der Ort für M, wenn AA' sich verändert.
Lösung: (G.).
(*155*) Nouv. Ann. XIV, 359.

6. Wenn die Fufspunkte A', B', C' der von einem Punkte O auf die Seiten eines Dreiecks ABC gefällten Perpendikel in gerader Linie liegen, so ist der Ort dieses Punktes der dem Dreieck umgeschriebene Kreis.
Lösung: (G.).
(166) Stoll XII, 266. XIII, 119.

7. Den Ort für den Mittelpunkt O eines gleichseitigen Dreiecks ABC zu finden, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte P, Q, R gehen. (P auf BC, Q auf CA, R auf AB.)
Lösung: (G.).
(*156*) Journ. élém. XIV, 360.

8. Durch die Spitze C eines gleichschenkligen Dreiecks ABC zieht man eine beliebige Gerade CL und nimmt den zu B symmetrischen Punkt M in Beziehung auf CL. Der Ort des Punktes P, in welchem sich CL und AM schneiden, wird gesucht.
Lösung: (G.).
(*157*) Journ. élém. XIV, 360.

9. Von den Ecken A und C eines Dreiecks ABC fällt man auf eine sich um B drehende Gerade die Senkrechten AE und CD; man verbindet E mit der Mitte K von AB, und D mit der Mitte I von BC; gesucht wird der Ort für M, in welchem sich KE und DI schneiden.
Lösung: (G.).
(*160*) Journ. élém. XIV, 361.

10. Dreieck ABC sei seinem Schwerliniendreieck ähnlich und $a \gtrless c \gtrless b$. Welches ist der geometrische Ort des Schwer-

punkts S des Dreiecks, wenn die Punkte A und B fest sind und C veränderlich ist?

Lösung: (G.).

(736 b) Stegemann XIX, 32. XIX, 420.

11. a) In Bezug auf ein Dreieck ist der Umkreis Ort der Winkelgegenpunkte unendlich weit entfernter Punkte.

b) Liegen verschiedene Punkte auf einem Kreise, welcher durch zwei Ecken eines Dreiecks geht, so befinden sich die bezüglichen Winkelgegenpunkte ebenfalls auf einem Kreise, der durch die nämlichen zwei Ecken geht.

Lösung: (G.); (K. M.).

(754 ab) Glaser XIX, 98. XIX, 504.

12. Der Ort für die Spitzen aller Dreiecke von gemeinsamer Basis BC, in welchen die Cotangente des Brocardschen Winkels doppelt so grofs ist wie die Cotangente des Winkels an der Spitze, ist ein Kreis um die Mitte von BC mit $\frac{1}{2} BC\sqrt{5}$.

Lösung: (G. T.); (R. K.).

(1005) Emmerich XXII, 26. XXII, 430.

13.*) Wenn sich zwei Gerade um zwei feste Punkte drehen, so dafs sie aus einer Lage in die andere übergehend in derselben Richtung gleiche Winkel beschreiben, welchen Ort beschreibt ihr Schnittpunkt? Vergl. Aufgabe Nr. 47.

Lösung: (G.); (P. G.).

(1072 a) Ritsert XXII, 511. XXIII, 265.

14. Den Ort eines Punktes P in der Ebene eines Dreiecks ABC zu bestimmen, für welchen $\sphericalangle PBC = PCA$ ist.

Lösung: Liegt P innerhalb des Dreiecks, so ist der Ort ein Kreis**), liegt P aufserhalb des Dreiecks, so ist er eine gleichseitige Hyperbel. Vergl. Nr. 13 und Nr. 47.

Lösung: (G.) und (K. M.).

(1246) Emmerich XXV, 48. XXV, 425.

15. Welches ist der Ort für den Höhendurchschnitt H***) des Dreiecks ABC, wenn die Grundlinie c und der Radius r des Umkreises gegeben sind?

Lösung: (G.); (R. K.).

(1237) Steckelberg XXIV, 608. XXV, 345.

---

*) Die Aufgabe ist identisch mit der Aufgabe: Den geometrischen Ort für die Spitze eines Dreiecks zu bestimmen, wenn gegeben die Grundlinie AB und die Summe der Winkel an der Grundlinie oder der Winkel an der Spitze. Vergl. Aufgabe Nr. 46.

**) Zweite Lösung Zeile 3 lies γ statt α.

***) Vergl. B. § 1. Nr. 78, wo noch andere Örter für H und den Schwerpunkt des Dreiecks in Form von Sätzen angegeben sind.

16. Sind A_0, B_0, C_0 die Mitten der Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC, ist ferner D der Schwerpunkt und P ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks, so schneiden sich die Parallelen durch A zu A_0P, durch B zu B_0P und durch C zu C_0P in einem Punkte Q, und zwar bewegt sich,

a) wenn P eine Gerade durchläuft, Q auf einer Geraden, die dieser parallel ist;

b) wenn P den Umkreis des Dreiecks durchläuft, Q auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Höhenschnittpunkt und dessen Radius gleich dem Durchmesser des Umkreises ist;

c) wenn P einen Kreis durchläuft, der um den Schwerpunkt konstruiert ist, Q auf einem concentrischen Kreise mit doppeltem Radius.

Lösung: (R. K.). Vergl. B. § 1. Nr. 77.

(62) Schlömilch IX, 286. X, 419.

17. Die Mittelpunkte aller Rechtecke, deren Seiten durch vier feste Punkte gehen, liegen auf einem Kreise.*)

Beweis: (G.); (R. K.).

(697) Sporer XVIII, 357. XIX, 94.

18. Gegeben Rhombus $ABCD$, in welchem die Diagonale BD gleich einer Seite ist; eine durch C gezogene Gerade trifft AB in P und AD in Q. Gesucht wird der Ort für den Durchschnittspunkt M von PD und QB, wenn sich PQ um C dreht.

Lösung: (G.).

(53) Journ. élém. XII, 39.

19.**) In dem Viereck $ABCD$, dessen drei Ecken A, B, C fest liegen, hat $AD^2 + BD^2 + CD^2$ einen unveränderlichen Wert s^2. Welches ist der Ort für D?

Lösung: (R. K. 2).

(1154) Glaser XXIII, 591. XXIV, 336.

20. Welches ist der Ort aller Punkte, für welche $\alpha r^2 + \beta r_1^2 = k^2$, wo k konstant ist, r und r_1 die Abstände von zwei festen Punkten sind? Läfst sich das Resultat in derselben Form auf n Punkte ausdehnen, bez. auf die Potenzen von n Kreisen?

Lösung: (R. K.).

(1236) Bökle XXIV, 608. XXV, 345.

---

*) Der Satz gilt für jedes Parallelogramm mit gegebenem Winkel.

**) Verallgemeinerung für ein n Eck: Der Ort eines Punktes, für den die Summe der Quadrate der Abstände von einer beliebigen Anzahl von Punkten (bez. multipliciert mit gewissen Konstanten) konstant ist, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt des Systems ist. Vergl. Casey: *A sequel to the first six books of the elements of Euclid.* p. 27. Cor. I. (1884).

c. Der Ort ist eine Parabel.

21. Gegeben $\triangle ABC$; BC auf der Linie OP und MN durch A parallel OP; AD beliebig (z. B. $\sphericalangle ADB = w$); EGF, parallel AD, schneide CA in G und BA in F, so dafs $AD : FG = p : n$, also $FG = \frac{n}{p} AD$ ist. Man nehme Punkt A_1, A_{11} u. s. w. beliebig auf MN an (sowohl nach der Richtung M als N hin); ziehe A_1B und A_1C; $A_1D_1 \parallel AD$; konstruiere $E_1G_1F_1 \parallel A_1D_1$, so dafs $F_1G_1 = \frac{n}{p} A_1D_1$ $\left(\text{also gleich } \frac{n}{p} AD\right)$ wird; verfahre ebenso mit den anderen Punkten A_{11}, A_{111} u. s. w. Es soll der geometrische Ort für die Punkte G, G_1, G_{11} u. s. w. und ebenso für die Punkte F, F_1, F_{11} u. s. w. gesucht werden. Wie sind die Örter, wenn $\frac{n}{p} = 1$ oder $w = 90^0$ ist?

Lösung: (R. K.).
(70) Emsmann X, 118. XI, 30—31.

22. Gegeben sind die beiden Parallelen L und L' und ein fester Punkt O (O liege aufserhalb L und L', näher an L); durch O ist die bewegliche Gerade L'' gezogen, welche L in A und L' in B trifft; gesucht wird der Ort für den Durchschnittspunkt M der von A auf L' gefällten und auf L'' in B errichteten Senkrechten.

Lösung: (R. K.).
(*561*) Journ. élém. XXIV, 25.

23. Von einem Dreieck ABC kennt man die Seite $AB = c$ und die zugehörige Höhe $CD = h$. Gesucht wird der Ort für den Höhenschnittpunkt H.

Lösung: (R. K.).
(*563*) Mathesis. XXIV, 26.

24. Von einem Dreieck ABC ist die Grundlinie $AB = 2c$ und der untere Abschnitt $HD = m$ der Höhe h_c gegeben. Welches ist der Ort für C?

Lösung: (R. K.).
(1258) Steckelberg XXV, 50. XXV, 507.

25. Welche Kurven werden durch die Seiten und durch die merkwürdigen Punkte eines Dreiecks von konstanter Gestalt erzeugt, wenn die Ecken des Dreiecks drei feste Gerade durchlaufen?

Lösung: (P. G. 2); auch durch (K. M.) leicht ausführbar.
(186) Kiehl XII, 432. XIII, 276.

26.*) In einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC wird durch A eine Transversale gezogen, welche die gegenüberliegende

*) Das Dreieck kann auch ein beliebiges Dreieck sein.

Kathete a in D schneidet. Durch D wird eine Parallele zur Hypotenuse c gezogen, welche die Kathete b in E trifft, und durch E eine Parallele zur Kathete a, welche AD in P schneidet. Was für eine Kurve beschreibt P, wenn die Transversale variiert?

Lösung: (R. K.); (P. G.).

(867) Rulf XX, 275. XXI, 29.

27.*) In einem Rechteck $ABCD$ wird durch A ein Strahl gezogen, der CD in E schneidet; durch E wird eine Parallele zur Diagonale BD gezogen bis BC in F geschnitten wird und durch F eine Parallele zu AB gezeichnet, welche den Strahl AE in P trifft. Was für eine Kurve beschreibt P, wenn der Strahl variiert?

Lösung: (R. K.); (P. G.).

(873) Rulf XX, 350. XXI, 109.

28.**) Ein Rechteck $ABCD$ mit den Seiten $AB = a$, $BC = b$ ist gegeben. Durch A wird ein Strahl gezogen, welcher CD in E schneidet, und zu BE wird durch D eine Parallele gezogen, die den Strahl AE in P trifft. Was für eine Kurve beschreibt P, wenn der Strahl variiert?

Lösung: (R. K.); (P. G.).

(897) Rulf XX, 511. XXI, 273.

29. Bleiben zwei Ecken eines Dreiecks fest, und bewegt sich die dritte Ecke auf einer Geraden, so beschreibt der Höhenschnittpunkt einen Kegelschnitt. Derselbe ist eine Parabel, wenn die Gerade parallel zur Verbindungslinie der festen Ecken läuft.

Lösung: (R. K.) und (P. G.). Vergl. Beyel: 70 Sätze über das orthogonale Viereck. (Schlömilch: Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. XXXIV.)

(1320) Bökle XXV, 432. XXVI, 273.

d. Der Ort ist eine Ellipse.

30.***) Es soll der geometrische Ort für die Scheitel aller harmonischen Büschel, deren Strahlen durch die Ecken eines gegebenen Rechtecks gehen, gefunden werden.

Lösung: (R. K.); (P. G.).

(75) v. Schäwen X, 197. X, 347—348. XI, 31.

---

*) Die Aufgabe ist dieselbe, wenn an Stelle des Rechtecks ein Trapez mit den parallelen Seiten AB und CD tritt. Ferner kann die Aufgabe zur Vereinfachung der Parabelkonstruktion dienen, wenn der Scheitel, die Achse und ein Punkt gegeben sind.

**) Die Aufgabe kann verallgemeinert werden, indem man das Reckteck durch ein beliebiges Parallelogramm ersetzt.

***) Die Aufgabe ist ein specieller Fall des Satzes: Der Ort eines Punktes, dessen Verbindungslinien mit 4 festen Punkten 4 harmonische

31. In jedem Dreieck MNP liegen bekanntlich der Mittelpunkt U des umgeschriebenen Kreises, der Höhendurchschnittspunkt V und der Schwerpunkt S in einer Geraden. Denkt man sich die Ecken M und N als fest, P dagegen als beweglich auf einer Kurve, so wird auch die Transversale UV ihre Lage kontinuierlich ändern. Es wird nun gefragt, auf welcher Kurve P fortrücken mufs, wenn UV eine parallele Verschiebung zu sich selbst erleiden soll.

Lösung: (R. K.). Ist γ der Winkel zwischen SV und der Abscissenachse MN, so ist für $\gamma < 60^0$ der Ort eine Ellipse, für $\gamma > 60^0$ eine Hyperbel und für $\gamma = 60^0$ erhält man zwei Paare von parallelen geraden Linien.

(86) Schlömilch X, 351. XI, 196.

32.*) Dreieck ABC sei seinem Schwerliniendreieck ähnlich und $a \gtrless c \gtrless b$. Welches ist der geometrische Ort des Grebe'schen Punktes K, wenn die Punkte A und B fest sind, C veränderlich ist?

Lösung: (R. K.).

(736b) Stegemann XIX, 32. XIX, 420.

33. Von einem Dreieck ist die Grundlinie und der gegenüberliegende Winkel gegeben; es soll der Ort des Grebe'schen Punktes gesucht werden.

Lösung: (R. K.); (P. G.).

(1346) Stoll XXV, 590. XXVI, 428.

34. Liegt die Grundlinie BC eines Dreiecks fest, so sind die Endpunkte K_b, K_c der von B und C ausgehenden Gegenmittellinien gefesselt an die Ellipse, deren Brennpunkte B und C sind und von deren Nebenscheiteln aus die Seite BC unter rechten Winkeln erscheint.

Lösung: (R. K.); (R.).

(852) Emmerich XX, 196. XX, 587.

35. Auf welchen Kurven wandern die Punkte K_b, K_c, in welchen die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks von den zugehörigen Gegenmittellinien getroffen werden, wenn die Basis festliegt?

Lösung: (R. K.).

(875a) Emmerich XX, 350. XXI, 111.

Strahlen sind, besteht aus drei Kegelschnitten, welche durch die 4 Punkte gehen und harmonische Kegelschnitte heifsen. (Vergl. Steiner: Vorlesungen über synth. Geometrie bearb. v. Schröter. 1. Aufl. § 27.)

*) Die Ellipse ist der Grenzwall für K. (Vergl. Progr. d. Realgymn. in Mülheim a. d. Ruhr 1887.)

36. Einen Ort für die Spitzen aller Dreiecke zu finden, welche über $BC = a$ so konstruiert werden können, dafs

a) der Höhenschnittpunkt H in der Mitte der Höhe AD liegt;
b) dafs $AD : HD = m : n$ ist.

Lösung: (G.) und (R. K. 3).

(979) Salomon XXI, 429. XXII, 195.

37.*) Ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Grundlinie $2a$ und der Höhe b ist gegeben. Es wird eine Parallele zur Höhe gezogen, welche die Grundlinie AB in D, AC in E und BC in F schneidet. Die Verbindungslinien AF und BE schneiden sich in P. Welche Kurve beschreibt P, wenn die Parallele variiert?

Lösung: (R. K.) und (P. G.).

(854) Rulf XX, 196. XX, 589.

38. a) Fällt man von dem beliebigen Punkt P auf die Dreiecksseiten Lote, so ist bekanntlich $AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2 = AB_1^2 + CA_1^2 + BC_1^2$, wo A_1, B_1, C_1 die Fufspunkte jener Lote bedeuten. Hat $AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2$ einen konstanten Wert s^2, so ist der Ort für P eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Umkreismittelpunkt ist.

b) Hat $PA_1^2 + PB_1^2 + PC_1^2$ einen konstanten Wert s^2, so ist der Ort für P eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Grebe'sche Punkt ist.

c) Sämtliche Ellipsen in a) und b), welche den verschiedenen Werten von s entsprechen, sind ähnlich und in ähnlicher Lage. Das Achsenverhältnis ist $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{r+e}{r-e}}$, wo e die Entfernung des Schwerpunktes vom Umkreismittelpunkt ist.

Lösung: (R. K.); (P. G.).

(1206) Glaser XXIV, 343. XXV, 110.

39. Welches ist bei festliegender Grundlinie AB eines Dreiecks ABC der geometrische Ort des dritten Eckpunkts C, des Schwerpunkts S und des Höhenschnittpunkts H, wenn MS (M Mittelpunkt des Umkreises) parallel AB ist.

Lösung: (R. K.). Alle drei Ellipsen sind ähnlich.

(1017c) v. Jettmar XXII, 106. XXII, 505.

---

*) Die Ortslinie von P ist auch dann noch eine Ellipse, wenn $\triangle ABC$ ein ganz beliebiges ist und FD die Richtung der zu AB gehörenden Mittellinie annimmt. Diese Aufgabe liefert eine recht einfache Konstruktion einer Ellipse, deren Achsen bekannt sind.

e. Der Ort ist eine Hyperbel.

40. Zieht man durch zwei Gegenecken A und C eines Parallelogramms $ABCD$ die sich in O schneidenden Geraden AO und CO so, dafs $\sphericalangle BAO = BCO$ ist, so ist der geometrische Ort des Punktes O eine gleichseitige Hyperbel.

Lösung: (G.); (P. G.).

(190b) Bermann XII, 432. XIII, 279.

41. Eine Seite $AD = a$ eines Quadrats $ABCD$ bewegt sich mit ihren Endpunkten A und D auf zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden OA und OD, und berührt einen Kreis (P, r), der diese beiden Geraden berührt. Gesucht werden die Örter für die Punkte B und C.

Lösung: (R. K.).

(577) Educ. Times. XXIV, 192.

42. Den geometrischen Ort für die Spitze C eines Dreiecks von konstanter Grundlinie AB zu bestimmen, wenn der Mittelpunkt F des Feuerbach'schen Kreises die Seiten des Dreiecks durchläuft.

Lösung: 2 Fälle: 1) F durchlaufe AB. (R. K.); (P. G.). Gleichseitige Hyperbel. 2) F durchlaufe eine der Seiten z. B. BC. (R. K. 2). Kurve dritter Ordnung.

(185) Kiehl XII, 432. XIII, 275.

43.*) Vom $\triangle ABC$ ist $\sphericalangle \gamma$ und der Inkreis mit dem Mittelpunkt O festgelegt. Welches ist der Ort für den Halbierungspunkt M von AB?

Lösung: (G.); (K. M.).

(933) Simon XXI, 115. XXI, 517.

44.**) Im gleichschenkligen Dreieck ABC (C Spitze) wird nach BC die Ecktransversale AD gezogen, dann $DE \perp AC$ und $EF \perp AB$ gefällt; AD und EF schneiden sich in P. Welches ist der Ort für P, wenn D den Schenkel BC durchläuft?

Lösung: (R. K.); (P. G.).

(1227) Steckelberg XXIV, 459. XXV, 274.

---

*) Die Aufgabe ist ein besonderer Fall des Satzes: Die Punkte, welche die zwischen zwei bestimmten Tangenten eines Kegelschnitts gelegenen Abschnitte der übrigen Tangenten in einem konstanten Verhältnis teilen, liegen auf einer Hyperbel, welche mit der Kurve den Mittelpunkt und eine doppelte Berührung gemein hat und deren Asymptoten parallel den beiden Tangenten laufen.

**) Diese Aufgabe kann in derselben Weise für ein beliebiges Dreieck behandelt werden.

45.*) a) Der Ort für die Spitze eines Dreiecks ABC mit fester Grundlinie $AB = c$, in welchem die Höhe CD und der Radius CM des Umkreises aufeinander senkrecht stehen, ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt die Mitte von AB und deren Hauptachse $= c$ ist.

b) Dieselbe Hyperbel wird auch von dem Höhenschnittpunkt H beschrieben und zwar durchläuft H den unteren Ast der Hyperbel, wenn C auf dem oberen Ast wandert und umgekehrt.

c) Der Schwerpunkt S von ABC beschreibt ebenfalls eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt die Mitte von AB und deren Durchmesser $= \frac{1}{3} c$ ist.

d) Endlich beschreibt auch der Mittelpunkt N des Inkreises eine gleichseitige Hyperbel, deren Durchmesser $\frac{c}{\sqrt{2}}$ ist und mit AB im Mittelpunkt einen Winkel von $22^0 30'$ bildet.

Lösungen: (R. K.).

(1081) Koebke XXII, 595. XXIII, 345.

46. Ein veränderliches rechtwinkliges Dreieck bewegt sich so, dafs die rechtwinklige Ecke fest ist, die Hypotenuse beständig durch einen zweiten festen Punkt geht und eine spitze Ecke auf der Halbierungslinie der Strecke der beiden festen Punkte verbleibt. Was für eine Kurve beschreibt die freie spitze Ecke desselben?

Lösung: (R. K.); (P. G.).

(1348) Rulf XXV, 590. XXVI, 429.

47.**) Wenn sich zwei Gerade um zwei feste Punkte drehen, so dafs sie aus einer Lage in die andere übergehend in entgegengesetzter Richtung gleiche Winkel beschreiben, welchen Ort beschreibt ihr Schnittpunkt?

Lösung: (P. G.). Vergl. Rulf: Elemente d. projekt. Geometrie.

(1072b) Ritsert XXII, 511. XXIII, 265.

f. Der Ort ist eine Kurve höherer Ordnung.

48. Den geometrischen Ort der Punkte zu finden, von welchem aus zwei beliebige auf einer Geraden liegende Strecken unter gleichen Winkeln gesehen werden.

(36) Stammer VI, 299. —

---

*) Die Voraussetzung, dafs AB fest ist und $\alpha - \beta = 90^0$ ist, kann dahin verallgemeinert werden, dafs $\alpha - \beta = \delta$ konstant bleibt.

**) Die Aufgabe stimmt mit der folgenden überein: Den geometrischen Ort für die Spitze eines Dreiecks zu bestimmen, wenn gegeben die Grundlinie AB und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie. (Vergl. Fort und Schlömilch: Anal. Geom. § 33, 1; Koppe: Anal. Geom. § 168, 6.)

49. Eine Gerade AB von konstanter Länge stützt sich auf zwei rechtwinklige Achsen OX, OY; einen Ort für den Punkt M dieser Geraden zu finden, so daſs $MA \cdot AO = MB \cdot BO$ ist.

(25_1) Nouv. Ann. X, 112. —

50. Dreieck ABC sei seinem Schwerliniendreieck ähnlich und $a \gtrless c \gtrless b$; welches ist der geometrische Ort des Höhenschnittpunktes H, wenn die Punkte A und B fest sind, C veränderlich ist?

Lösung: (R. K.). Centrische Curve vierten Grades.

(736) Stegemann XIX, 32. XIX, 420.

51. Auf welchen Kurven wandern die Punkte K_b, K_c, in welchen die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks von den zugehörigen Gegenmittellinien getroffen werden, wenn die Basishöhe festliegt?

Lösung: (R. K.). Kurve aus d. Geschlecht d. Cissoiden.

(875) Emmerich XX, 350. XXI, 111.

52.*) a) Der Ort der Spitze eines Dreiecks ABC, dessen Grundlinie BC festliegt und in welchem die Mittellinie AS_a und die Gegenmittellinie AG_a aufeinander senkrecht stehen, ist die Lemniskate, deren Achse die Grundlinie ist.

b) Welche Kurve wird von der Gegenmittellinie umhüllt?

c) Welche Bahn beschreibt der Grebe'sche Punkt?

Lösung: a) (R. K.); (K. M.). Lemniskate. b) (R. K.). Gleichseitige Hyperbel. c) (R. K.) Kurve 4ten Grades.

(865) Emmerich XX, 274. XXI, 26.

53.**) (Im Anschluſs an Nr. 52.) Zieht man von einem Punkte P aus Gerade gleicher Neigung δ gegen die Tangenten

---

*) Hieraus ergeben sich leicht folgende Sätze: 1) Jede Tangente einer gleichseitigen Hyperbel ist Gegenmittellinie in allen Dreiecken, deren Ecken der Berührungspunkt und die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers sind. Und: Für alle Dreiecke mit fester Mittellinie und auf ihr senkrechten Gegenmittellinie liegen die Endpunkte der Grundlinie auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren halbe Hauptachse die Mittellinie ist. — 2) Alle Kreise, deren Durchmesser die Halbmesser einer gleichseitigen Hyperbel sind, haben als Einhüllungskurve diejenige Lemniskate, deren Achse die Hauptachse der Hyperbel ist. — 3) Lemniskate und gleichseitige Hyperbel stehen in der Beziehung zu einander, daſs jede die Polarfigur der andern in Bezug auf den Kreis vom Mittelpunkte S_a und Halbmesser a ist. — 4) Sind B, C die Scheitel, A ein beliebiger Punkt einer Lemniskate oder gleichseitigen Hyperbel, so schneiden sich die beiden Parabeln, die den Mittelpunkt zum Brennpunkt haben und AC und AB in A berühren, in einem Punkte, welcher auf einer gleichseitigen Hyperbel resp. Lemniskate liegt. Kücker.

**) Die Umkehrung des Satzes lautet: Bewegt sich der Scheitel eines Winkels δ auf einer beliebigen Kurve K, während der eine Schenkel

einer Kurve C, so liegen die Treffpunkte auf einer neuen Kurve K, die sich auch als Fufspunktkurve erhalten läfst. Man braucht nur die gegebene Kurve C um den Pol P um einen Winkel $90^0 - \delta$ zu drehen und ihre Dimensionen im Verhältnis $\frac{1}{\sin\delta}:1$ zu vergröfsern.

Lösung: (G.).

(1028) Dorn XXII, 197. XXII, 591.

54. Den geometrischen Ort eines Punktes P zu bestimmen, von dem aus die Seiten a und b des Dreiecks ABC unter gleichen Winkeln gesehen werden.

Lösung: (K. M.); (P. G,). Kurve dritter Ordnung.

(1051) Ritsert XXII, 351. XXIII, 121.

55.*) Der Ort für die Spitze C eines Dreiecks ABC mit festliegender Grundlinie c, in welchem der Winkel γ durch die Höhe CD und den Radius des Umkreises CM in drei gleiche Teile geteilt wird, ist eine Kurve dritter Ordnung.

Lösung: (R. K.).

(1082) Koebke XXII, 595. XXIII, 347.

56. Von einem Dreieck ist gegeben ein Winkel und die Summe der einschliefsenden Seiten; es soll der Ort des Grebeschen Punktes gefunden werden.

Lösung: (R. K.). Kurve dritter Ordnung.

(1347) Stoll XXV, 590. XXVI, 428.

57. Die Ecken B und C eines Dreiecks bleiben fest, auch wenn sich A auf einer Parallelen zu BC bewegt. Man macht AX auf $AB = AC$. Welches ist der Ort für X?

Lösung: (R. K.); (P. G.). Kurve dritter Ordnung.

(1350) Böklen XXV, 590. XXVI, 494.

58. Welche Kurve hat die Eigenschaft, dafs die von je einem Punkte derselben nach den Eckpunkten des Dreiecks ABC gezogenen Strahlen unter sich die Winkel x, y, z bilden mit der Eigenschaft, dafs $m \cot x + n \cot y + p \cot z = 0$, wo m, n, p beliebige Koefficienten sind?

Lösung: (K. M.). Kurve vierter Ordnung, die für $n = -m$, $p = 0$ in die Kurve dritter Ordnung übergeht, die sich aus Aufgabe Nr. 54 ergiebt.

(1061) Ritsert XXII, 436. XXIII, 189.

---

durch einen festen Punkt P geht, so erzeugt der andere Schenkel eine Kurve, deren Gestalt ganz unabhängig von δ ist; nur die Dimensionen der Enveloppe und ihre Lage werden durch die Gröfse des Winkels bestimmt. Dorn.

*) Das Wesen dieses Satzes beruht auf dem Abhängigkeitsverhältnis der Winkel α und β, dafs nämlich $2\alpha - \beta = \delta$, also gleich einer konstanten Gröfse ist. Kücker.

59.*) Den geometrischen Ort der Punkte innerhalb des Dreiecks ABC zu bestimmen, welche die Bedingung $\cot x + \cot y + \cot z = \cot(\alpha - x) + \cot(\beta - y) + \cot(\gamma - z)$ erfüllen, wo x, y, z die Winkel bedeuten, welche die von einem beliebigen Punkt der Kurve nach den Ecken gezogenen Strahlen mit den Seiten einschliefsen.

Lösung: (R. K.); (K. M.). Kurve dritter Ordnung.

(1319) JUNKER XXV, 432. XXVI, 272.

---

60. Eine Schar Dreiecke ist einem Kreise ein-, einem anderen umgeschrieben. Man macht AX auf AB gleich AC. Welches ist der Ort für X?

(1351) BÖKLEN XXV, 590. Nicht gelöst.

---

§ 2. Ein Kreis ist gegeben.

a. Der Ort ist eine Gerade.

1. Auf der gegebenen Geraden AB bewegt sich der Punkt C; über AC und BC als Durchmesser werden die Kreise K und K' beschrieben. Eine an beide gelegte gemeinschaftliche äufsere Tangente schneidet die Tangenten in A und B in den Punkten P und Q. Gesucht wird der Ort für den Durchschnittspunkt M der Linien PK und QK'.

Lösung: (G.).

(*48*) Journ. élém. XII, 38.

2. Gegeben zwei Kreise K und K' und eine Senkrechte zur Centrallinie; durch jeden Punkt Q derselben zieht man an beide Kreise Tangenten; die beiden Berührungssehnen schneiden sich in einem Punkte P, dessen Ort gesucht wird.

Lösung: (P. G.).

(*52*) Journ. élém. XII, 39.

3. Eine Gerade schneidet zwei Kreise K und K' so, dafs die abgeschnittenen Sehnen AB und CD einander gleich sind. Gesucht wird der geometrische Ort der Mitte von AD.

Lösung: (G.).

(*84*) Journ. élém. XII, 434.

---

*) Auf der Kurve, die sich aus dieser Aufgabe ergiebt, liegen die Ecken des Dreiecks, die Mitten der Seiten, die Mittelpunkte des Umkreises, des Inkreises und der Ankreise, der Höhenschnittpunkt und der Schwerpunkt. Für $\alpha = \beta$ zerfällt die Kurve in die Höhe und eine Hyperbel, die durch A und B geht; für $\alpha = \beta = \gamma$ wird sie durch die drei Höhen dargestellt.

4. An einen Kreis K sind in den Endpunkten des Durchmessers AB Tangenten a und b gelegt. Die Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitelpunkt A ist, schneiden b in C und D; von C und D sind an K zwei Tangenten gelegt, welche sich in P schneiden. Gesucht wird der Ort für P, wenn sich der rechte Winkel um A dreht.

Lösung: (G.).

(*152*) Journ. élém. XIV, 358.

5. Gegeben Kreis K und zwei senkrechte Durchmesser AA' und BB'; von A zieht man eine Gerade, welche die Tangente in A' in D und BB' in E trifft; von D zieht man die zweite Tangente DG; AG trifft BB' in F. Der geometrische Ort des Durchschnittspunktes I von $A'F$ und AD wird gesucht.

Lösung: (G.).

(*165*) Journ. élém. XIV, 362.

6. Gegeben Kreis K (Radius r) mit einer festen Tangente in F; auf dieser Tangente nimmt man zwei bewegliche Punkte A und B so an, daſs $AF \cdot BF = p^2$ konstant ist. Gesucht wird der Ort des Durchschnittspunktes C der von A und B an K gezogenen Tangenten.

Lösung: (G.).

(*57*) Journ. élém. XII, 113.

b. Der Ort ist ein Kreis.

7. Gegeben ein Kreis S, ein ihm eingeschriebenes Dreieck ABC und zwei Peripheriepunkte P und P'. Bekanntlich liegen die Fuſspunkte der von P und P' auf die drei Seiten gefällten Senkrechten auf zwei Geraden D und D'. 1) Zu beweisen, daſs der Schnittpunkt der Geraden D und D' einen Kreis S' beschreibt, wenn die Punkte A, B, P, P' eine feste Lage beibehalten und C sich auf der Peripherie bewegt. 2) Den Ort für die Mittelpunkte der Kreise S' zu bestimmen, wenn die Punkte A und B fest bleiben und die Punkte P und P' ihre Lage derart verändern, daſs der Bogen PP' eine konstante Länge beibehält.

(2_2) Nouv. Ann. X, 353. —

8. Gegeben sind auf einem Kreise zwei diametral gegenüberliegende Punkte A und B; man nimmt auf diesem Kreise irgend einen Punkt C an und trägt auf der Geraden AC zu beiden Seiten des Punktes C gleiche Längen CD und CD' ab, so daſs das Verhältnis einer jeden zur Länge CB einem gegebenen Verhältnis gleich ist. Man läſst nun den Punkt C sich auf dem Umfange bewegen und sucht 1) die Örter der Punkte D und D'; 2) die Örter des Durchschnittspunktes der Höhen des Dreiecks ABD

und des Durchschnittspunktes der Höhen des Dreiecks ABD'; 3) den Ort für den Mittelpunkt des dem Dreieck BDD' eingeschriebenen Kreises; 4) die Örter der Mittelpunkte der zu demselben Dreieck BDD' gehörenden äufseren Berührungskreise.

(22_2) Nouv. Ann. XI, 109. —

9. Gegeben zwei Kreise K und K', welche sich in A von aufsen berühren; durch A zieht man in beiden Kreisen zwei Sehnen AB und AC, welche auf einander senkrecht stehen. Gesucht wird der Ort für M, welcher BC so teilt, dafs $BM : CM = m : n$.

Lösung: (G.).

(*49*) Journ. élém. XII, 38.

10. Gegeben Kreis K mit Sehne AB; von irgend einem Punkte C des Kreises als Mittelpunkt beschreibt man einen Kreis, welcher AB berührt. Gesucht wird der Ort für den Durchschnittspunkt P der von A und B an diesen Kreis gelegten Tangenten AD und BE.

Lösung: (G.).

(*50*) Journ. élém. XII, 38.

11. Gegeben sind zwei sich von aussen in A berührende Kreise K und K' mit den Radien r und r'. Durch A zieht man in K eine beliebige Sehne AB, und in K' die Sehne AC senkrecht zu AB. Gesucht wird der Ort 1) der Projektion P des Punktes A auf die Hypotenuse BC, wenn sich das veränderliche Dreieck ABC um A dreht; 2) der Mitte M der Hypotenuse BC; 3) des Schwerpunktes S von ABC.

Lösung: (G.).

(*54*) Journ. élém. XII, 112.

12. Gegeben Kreis K und Punkt P; man zieht durch P zwei Sekanten PAA', $PB'B$. Die um die Dreiecke PAB und $PA'B'$ beschriebenen Kreise schneiden sich aufser in P noch in M. Gesucht wird der durch M beschriebene geometrische Ort, wenn man die eine der beiden Sekanten sich verändern läfst.

Lösung: (H. B.).

(*55*) Journ. élém. XII, 112.

13. Gegeben Kreis K und zwei Punkte A und B auf demselben Durchmesser (A innerhalb, B aufserhalb des Kreises); die Verbindungslinien PA und QB von A und B mit den Endpunkten eines beweglichen Durchmessers PQ schneiden sich in M. Gesucht wird der Ort für M, wenn sich PQ bewegt.

Lösung: (P. L.).

(*56*) Journ. élém. XII, 113.

14. Gegeben ein Kreis mit dem Durchmesser AB und Mittelpunkt K; man zieht eine beliebige Sehne AC und verlängert sie

über C bis D, so dafs $CD = AC$ ist. Gesucht wird der Ort des Durchschnittspunktes E von BC und DK.

Lösung: (G.).

(*158*) Journ. élém. XIV, 360.

15. Gegeben eine Gerade und auf ihr zwei feste Punkte A und B. Man konstruiere zwei Kreise, welche sich unter einander und die Gerade in A und B berühren; ferner konstruiere man die zweite gemeinschaftliche äufsere Tangente CD. Gesucht wird der Ort der Mitte M von CD, wenn sich die beiden Kreise verändern.

Lösung: (G.).

(*159*) Journ. élém. XIV, 360.

16. Gegeben ist der Kreis O mit den zu einander senkrechten Radien OX und OY; ferner sei auf OX der Punkt C gegeben und auf OX in C sei die Senkrechte CL errichtet. Eine an den Kreis gelegte Tangente berühre ihn in P, schneide OX in A und OY in B; die Senkrechte auf AB in A schneide CL in R. Gesucht wird der Ort für den Durchschnittspunkt M von BR und OP, wenn P variiert.

Lösung: (G.).

(*649*) Mathesis. XXV, 197.

17. Auf einem Kreise (M, r) ist ein Punkt A und auf dem Durchmesser desselben ein Punkt B gegeben. Durch A wird eine Sekante gezogen, die den Kreis in C schneidet und auf derselben der Punkt D so bestimmt, dafs $BD = BC$ ist. Was für eine Kurve beschreibt D, wenn die Sekante variiert?

Lösung: (G.); (R. K.).

(808) Rulf XIX, 509. XX, 194 (797 statt 808).

18. Gegeben ein Kreis O mit einer festen Sehne AB. Man ziehe durch A die beliebige Sehne AM, verbinde M mit B und errichte auf MB in ihrer Mitte N die Senkrechte bis zum Schnittpunkt mit der verlängerten AM in P. Welchen Ort bestimmt P, wenn M den gegebenen Kreis beschreibt?

Lösung: (G.); (R. K.); (P. G.).

(987) Leuzinger XXI, 520. XXII, 269.

19. Welches ist der geometrische Ort eines Punktes, für welchen als Inversionscentrum zwei gegebene Kreise in gleich grofse Kreise invertiert werden?

Lösung: (R. K.). Vergl. Geiser: Einl. in d. synth. Geom. § 28. Fuhrmann: Einl. i. d. neuere Geom. p. 60. Lieber u. v. Lühmann: Geom. Konstr.-Aufg. § 96.

(608) Meyer XVII, 365. XVIII, 126, 188.

20. Der Ort für den Schwerpunkt eines Dreiecks, das in den Kreis um *ABC*, dessen Mittelpunkt *H*, beschrieben ist und mit *ABC* die Summe der Quadrate der Seiten gemein hat, ist der Kreis um *H* mit *HE*.*)

Lösung: (G.).

(780b) ARTZT XIX, 346. XX, 111.

c. Der Ort ist eine Parabel.

21. Ein Kreis mit veränderlichem Radius geht durch einen gegebenen Punkt und berührt eine gegebene Gerade. Man soll den Ort derjenigen Punkte des Kreises finden, für welche die Tangente senkrecht auf der gegebenen Geraden steht.

(13_2) Nouv. Ann. X, 354. —

22. Gegeben die Gerade *AB* und auf ihr Punkt *K*; um *K* schlägt man mit einem willkürlichen Radius einen Kreis, welcher *AB* in *C* und *C'* schneidet. Von *C* aus trägt man nun nach dem Mittelpunkte zu *CD* gleich der gegebenen Strecke *a* ab. Gesucht wird der Ort für *M* und *M'*, in welchem die auf *AB* in *D* errichtete Senkrechte den Kreis trifft.

Lösung: (R. K.).

(*51*) Journ. élém. XII, 39.

23. An einen Kreis *O* ist in dem Endpunkt *B* des Durchmessers *AB* eine Tangente gelegt, welche von einer an den Kreis in dem beliebigen Punkt *M* gelegten Tangente in *C* getroffen wird; gesucht wird der Ort des Durchschnittspunktes *I* von *OM* und der Senkrechten auf *BC* in *C* (identisch mit No. 24).

Lösung: (G.).

(*163*) Journ. élém. XIV, 361.

24. Gegeben ist der Kreis *O* mit dem Durchmesser *AOB* und der Tangente *AT*; die Tangente in einem Punkt *C* des Kreises trifft *AT* in *D*; und die Parallele durch *D* zu *AB* trifft *OC* in *P*. Gesucht wird der Ort für *P*, wenn sich *C* auf dem Kreise bewegt.

Lösung: (R. K.).

(*320*) Mathesis. XVIII, 200.

25. Gegeben Kreis *K* mit dem Durchmesser *AB* und der Tangente *AL*; man konstruiert eine unendliche Menge von Kreisen

---

*) Ist ein Brennpunkt eines Kegelschnitts der Mittelpunkt eines Kreises und seine Hauptachse der Radius desselben, so kann man unendlich viele Dreiecke in den Kreis beschreiben, deren Seiten den Kegelschnitt berühren. In allen Dreiecken ist die Summe der Quadrate der Seiten konstant. FUHRMANN.

K', welche durch Punkt K gehen und AL berühren. Einer der Durchschnittspunkte von K und K' sei M; in M werde an K eine Tangente gelegt, welche K' in I trifft. Der Ort von I wird gesucht.

Lösung: (G.).

(*164*) Journ. élém. XIV, 361.

26. Eine gegebene Gerade AB werde von einem Kreise K in A berührt; eine Senkrechte auf AB in A treffe den Kreis in D. Von dem festen Punkt P auf AB zieht man an K die Tangente PE, welche eine Parallele durch D zu AB in I trifft. Gesucht wird der Ort des Punktes I, wenn sich der Kreis verändert.

Lösung: (G.).

(*166*) Journ. élém. XIV, 362.

27. Gegeben ist ein Kreis O (Radius r) mit den zueinander senkrechten Durchmessern AA' und BB'; D sei die Projektion eines beliebigen Punktes C des Kreises auf BB'. Gesucht wird der Ort des Durchschnittspunktes M der Geraden OC und AD.

Lösung: (R. K.).

(*321*) Mathesis. XVIII, 200.

28. In einem gegebenen Kreise O sind zwei zueinander senkrechte Radien OA und OB gezogen und von dem auf dem Bogen AB beweglichen Punkt M ist $MC \perp OB$ gefällt. Gesucht wird der geometrische Ort für den Durchschnittspunkt J von OM und AC (identisch mit No. 27).

Lösung: (G.).

(*562*) Journ. élém. XXIV, 26.

29. Eine Gerade G, ein Kreis K und im Umfange des letzteren zwei Punkte A und B sind gegeben. Durch A wird ein Strahl gezogen, welcher G in X und K in Y schneidet. Welche Kurve hüllt die durch X zu BY gezogene Parallele T ein, wenn der Strahl AY variiert?

Lösung: (G.); (R. K.); (P. G.).

(978) Rulf XXI, 429. XXII, 194.

d. Der Ort ist eine Ellipse.

30. Gegeben Kreis O und Durchmesser PQ; von dem Punkte A, welcher sich auf dem Kreise bewegt, fällt man $AB \perp PQ$ und schlägt mit AB um A einen Kreis, welcher den Kreis O in C und D schneidet; AB und CD schneiden sich in I; gesucht wird der Ort für I.

Lösung: (G.).

(*217*) Journ. élém. XV, 363.

31. Gegeben ein Kreis (O, r) und in demselben der Durchmesser AB. Gesucht wird der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche AB berühren und den Kreis in zwei Punkten schneiden, deren Verbindungslinie Durchmesser des beweglichen Kreises ist.
Lösung: (R. K.).
(*566*) Nyt Tidsskrift. XXIV, 27.

e. Der Ort ist eine Hyperbel.

32. AA' und BB' seien zwei zueinander senkrechte Durchmesser des Kreises O, und CC' sei eine mit AA' parallele Sehne. Gesucht wird der Ort des Durchschnittspunktes von AC und BC', wenn sich CC' bewegt.
Lösung: (R. K.).
(*322*) Mathesis. XVIII, 200.

33. Es soll der Ort für die Mittelpunkte M aller Kreise bestimmt werden, die einen festen Kreis (K, r) berühren und eine feste Gerade L so schneiden, dafs die abgeschnittene Sehne von M aus unter einem konstanten Winkel 2α erscheint.
Lösung: (R. K.).
(1349) Handel XXV, 59. XXVI, 494.

f. Der Ort ist eine Kurve höherer Ordnung.

34. Gegeben die Gerade T, auf ihr Punkt A und aufserhalb C. Von A werden an alle Kreise, welche durch C gehen und T berühren, Tangenten AP gelegt. Gesucht wird der Ort von P.
Lösung: (R. K.). Kurve vom 6ten Grade.
(206) Weinmeister XIII, 34. XIII, 362.

35.*) Gegeben ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und eine Gerade L, welche von einer durch O gezogenen Geraden in X getroffen wird; ferner errichtet man in X auf L eine Senkrechte, welche den Kreis in Y trifft und zieht durch Y die Parallele zu L, welche OX in Z schneidet. Gesucht wird der geometrische Ort des Punktes Z.
Lösung: (R. K.). Kurve vom vierten Grade.
(451) Haag XV, 613. XVI, 271.

---

*) Nimmt man statt des Mittelpunktes O einen andern Punkt und statt L einen Kreis, so erhält man für die verschiedenen Lagen leicht diskutierbare Kurven dritten und vierten Grades, darunter die Konchoide.

§ 3. Eine Parabel ist gegeben.

1. Eine Gerade SA ($y = mx$) dreht sich um den Scheitel S einer Parabel ($y^2 = 2px$, Brennpunkt F); von A, dem Durchschnittspunkte von SA und der Parabel fällt man AP senkrecht auf die Scheiteltangente; D sei der Durchschnittspunkt der Directrix und Achse. 1) PD und AS schneiden sich in M. 2) PF und AS schneiden sich in N. 3) $PQ \perp AS$. 4) PQ sei über Q um sich selber verlängert bis R. Zu beweisen, dafs 1) M eine Hyperbel, 2) N eine Ellipse, 3) Q einen Kreis, 4) R eine Strophoide beschreibt.

Lösung: Teils (R. K.), teils (G.).

(*88*) Nouv. Ann. XII, 435.

2. Den geometrischen Ort der Brennpunkte sämtlicher Parabeln zu finden, welche drei gegebene Gerade berühren.

Lösung: Kreis. (G.); (P. G.).

(128) Schlömilch XI, 433. XII, 358.

3.*) Den geometrischen Ort der Brennpunkte sämtlicher Parabeln zu finden, welche durch drei gegebene Punkte gehen.

Lösung: Kurve achter Ordnung. (R. K.).

(181) Kiehl XII, 181. XIII, 200.

4. Gegeben eine Parabel; von einem Punkt derselben fällt man auf die Directrix die Senkrechte MC und von C auf den Radiusvektor FM die Senkrechte CA. Gesucht wird der Ort für A.

Lösung: Kreis. (G.).

(*161*) Journ. élém. XIV, 361.

5. Gegeben eine Parabel; durch den Durchschnittspunkt O der Directrix und Achse zieht man eine Sekante OAB; C sei die Mitte der Sehne AB; D sei die Projektion von C auf die Direktrix; ferner sei $DG \perp OAB$; gesucht wird der Ort von G.

Lösung: Kreis. (G.).

(*162*) Journ. élém. XIV, 361.

6. Gegeben eine Parabel $y^2 = 2px$ mit dem Scheitel S; auf der Achse nimmt man den Punkt D so, dafs $SD = 2p$ ist; eine Senkrechte auf SD in D trifft die Parabel in C; auf CD nimmt man den beliebigen Punkt B an und zieht durch B eine Parallele zur Achse, welche die Parabel in A trifft. Gesucht wird der Ort

*) Besonderer Fall der Aufg. 8. Art. 310 in Salmon-Fiedler: Annal. Geom. (3. Aufl.).

für den Mittelpunkt des um SAB beschriebenen Kreises, wenn B die Gerade CD durchläuft.

Lösung: Parabelachse. (G.).

(*212*) Journ. élém. XV, 361.

7. Ein Dreieck bewegt sich so, dafs sich zwei seiner Ecken auf den Tangenten einer Parabel befinden, während die Verbindungslinie derselben selbst Parabeltangente ist. Es soll bewiesen werden, dafs der Ort der dritten Ecke eine gerade Linie ist (resp. vier gerade Linien), wenn sich das bewegliche Dreieck ähnlich bleibt.

Lösung: (G. 3); auch durch (P. G.) und (R.) ausführbar.*)

(520) Sporer XVI, 357. XVII, 31.

---

§ 4. Eine Ellipse ist gegeben.**)

1. Für eine Ellipse sei a die grofse, b die kleine Halbachse und zur Abkürzung $\sqrt{a^2 + b^2} = c$; durch einen Ellipsenpunkt P, dessen Centralvektor r heissen möge, ist die zugehörige Ellipsennormale gelegt, welche die grofse Achse in Q, die kleine in R schneidet; endlich hat man zwischen Q und R den Punkt S so eingeschaltet, dafs die Strecke $PS = s$ das geometrische Mittel zwischen PQ und PR bildet.***) Unter dieser Voraussetzung ist erstens

$$r^2 + s^2 = c^2;$$

wenn zweitens P die Ellipse durchläuft, so beschreibt S einen Kreis, welcher mit der Ellipse konzentrisch ist und den Radius $a - b$ besitzt.

Beide Sätze zusammen liefern eine einfache Konstruktion des Punktes S.

(80) Schlömilch X, 197. X, 349.

2. Gegeben ist eine Ellipse mit dem Mittelpunkt O, F sei ein Brennpunkt, M sei der Berührungspunkt einer Tangente, auf welche die Senkrechte FP_1 gefällt ist; eine durch O zu MF gezogene Parallele treffe P_1F in P. Zu beweisen, dafs der Ort für P ein Kreis ist.

Lösung: (G.).

(*215*) Tidsskrift. XV, 363.

---

*) Im dritten Beweise ist mit Ausnahme von Zeile 2 überall „F“ statt „B“ zu lesen.

**) Vergl. G. § 3 Nr. 3, 5, 21.

***) Trägt man das geometrische Mittel zwischen PQ und PR auf der Normale von P aus nach entgegengesetzter Richtung bis S' ab, so dafs PS' aufserhalb der Ellipse liegt, so spielt der Punkt S' eine ähnliche Rolle wie S. Durchläuft P die Ellipse, so beschreibt S' einen Kreis, der mit der Ellipse konzentrisch ist und den Radius $a + b$ besitzt.

3. a) Die Seiten aller in eine Ellipse eingeschriebenen Dreiecke gröfsten Flächeninhalts berühren eine zweite der ersten ähnliche und ähnlich liegende Ellipse, deren Achsen halb so grofs sind wie die der ersten, und werden durch die Berührungspunkte halbiert.

b) Die Mittelpunkte der Umkreise aller dieser Dreiecke liegen auf einer Ellipse, deren Gleichung ist: $a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{1}{16}(a^2 - b^2)^2$.

c) Die Grebe'schen Punkte aller dieser Dreiecke liegen auf einer Ellipse, deren Gleichung ist: $a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2(a^2 - b^2)^2}{4(a^2 + b^2)^2}$.

Lösung: a) (P. G.); (K. M); b), c) (R. K.).

(898) Stoll XX, 511. XXI, 273.

4.*) Ein Durchmesser $AA' = 2a'$ einer Ellipse (Achsen $2a$ und $2b$) ist der Gröfse und Lage nach gegeben, sein konjugierter $2b'$ nur der Gröfse nach. Den Ort der Brennpunkte F und F' zu finden.

Lösung: Cassinische Linie. (G.).

(87) Journ. élém. XII, 435.

5. Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, denen die Eigenschaft zukommt, dafs die von ihnen auf eine Ellipse gefällten Normalen vier harmonische Strahlen bilden?

Lösung: Kurve sechster Ordnung. (R. K.).

(1158) Kosch XXIII, 591. XXIV, 339.

---

§ 5. Eine Hyperbel ist gegeben.

1. Gegeben ist ein bei O rechtwinkliges Dreieck AOB; man betrachtet alle Hyperbeln, welche durch die Punkte A und B gehen und deren Asymptoten parallel den Seiten OA und OB sind.

1) Die allgemeine Gleichung dieser Hyperbeln aufzustellen.

2) Die Gleichung des Ortes für die Scheitel dieser Hyperbeln aufzustellen und diesen Ort zu konstruieren.

3) Wenn man einen Punkt P auf dem gefundenen Ort annimmt, diejenige der betrachteten Hyperbeln zu konstruieren, welche einen Scheitel in P hat; und zu untersuchen, auf welchem Teile des Ortes P liegen mufs, damit A und. B entweder ein und demselben Zweige oder beiden Zweigen dieser Hyperbel angehören.

(17_1) Nouv. Ann. X, 110. —

2. Gegeben die Achsen-Gleichung $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ einer Hyperbel und die Koordinaten (μ, ν) eines Punktes M ihrer Ebene. Durch

---

*) Sucht man den Ort für eine Hyperbel, wo die Gröfse des konjugierten imaginären Durchmessers gegeben ist, so erhält man dieselbe Kurve.

den Punkt M sind zwei Tangenten an die Hyperbel gezogen, welche sie in den Punkten A und B berühren; die Gleichung des Kreises zu finden, welcher durch die Punkte A und B und den Mittelpunkt O der Hyperbel geht. Dieser Kreis schneidet die Hyperbel in zwei Punkten C und D, welche von A und B verschieden sind; die Gleichung der Geraden CD zu finden. Wenn der Punkt M eine Gerade der Ebene beschreibt, so werden den verschiedenen Lagen des Punktes M verschiedene Lagen der Geraden CD entsprechen; welches ist der Ort der Fuſspunkte der Perpendikel, welche vom Mittelpunkt der Hyperbel auf diese Geraden gefällt sind?

(21_1) Nouv. Ann. X, 111. —

3. 1) Gegeben ist in einer Ebene eine Gerade P und ein Punkt F auſserhalb derselben in einer Entfernung a von dieser Geraden. Die allgemeine Gleichung der Hyperbeln aufzustellen, welche den Punkt F zu einem ihrer Brennpunkte und die Gerade P zu einer ihrer Asymptoten haben.

2) Vom Mittelpunkt einer jeden dieser Hyperbeln fällt man auf die Gerade P eine Senkrechte, welche man bis zu ihrem Durchschnitt M mit der dem Brennpunkt F entsprechenden Leitlinie verlängert; die Gleichung der Kurve zu finden, welche ein Ort der Punkte M ist und die Lage dieser Kurve zu bestimmen.

3) Die Gleichung der Projektionen des Brennpunktes F auf die zweite Asymptote einer jeden der betrachteten Hyperbeln aufzustellen.

(15_2) Nouv. Ann. X, 355. —

4. Auf einer gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ ist der Punkt P (m, n) gegeben, während A und B die Endpunkte eines beweglichen Durchmessers sind. Gesucht wird der geometrische Ort für den Umkreismittelpunkt von ABP.

Lösung: Gleichseitige Hyperbel. (R. K.).

(574) Nyt Tidsskrift. XXIV, 191.

5. Gegeben sind zwei gleichseitige Hyperbeln, welche dieselben Asymptoten haben. Ein veränderliches Dreieck PQR bewegt sich so, daſs P stets auf der einen Hyperbel liegt, Q und R auf der andern liegen und daſs PQ und PR den Asymptoten parallel sind. Es soll der geometrische Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten bestimmt werden, welche in Q und R an der Hyperbel konstruiert sind, auf der diese Punkte liegen.

Lösung: Gleichseitige Hyperbel, (R. K.).

(576) Nyt Tidsskrift. XXIV, 191.

6. a) Der Ort der Mittelpunkte aller in ein Dreieck eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln ist derjenige Kreis, für welchen die Ecken des Dreiecks die Pole der Gegenseiten sind.

b) Nur in ein stumpfwinkliges Dreieck kann eine gleichseitige Hyperbel eingeschrieben werden.

Lösung: Milinowski: Element.-synth. Geom. d. gleichs. Hyperbel p. 21 u. 33.

(1233ab) Stoll XXIV, 608. —

7. Der Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche dasselbe Polardreieck haben, ist der Umkreis desselben.

Lösung: Milinowski: Element.-synth. Geom. d. gleichs. Hyperbel p. 33 u. 34.

(1234) Stoll XXIV, 608. —

---

§ 6. Ein Kegelschnitt ist gegeben oder erst zu bestimmen.

1. Gegeben ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit der Höhe $2h$, der halben Summe der Grundlinien $2a$ und dem stumpfen Winkel α. Man betrachtet alle diesem Trapez umgeschriebenen Kegelschnitte.

1) Die allgemeine Gleichung dieser Kegelschnitte aufzustellen.

2) Den Ort der Berührungspunkte der Tangenten zu finden, welche an einen jeden von ihnen parallel der Seite BC gezogen sind, und diesen Ort zu konstruieren, nachdem nachgewiesen ist, daſs die Seite BC demselben angehört.

3) Wenn ein Punkt dieses Ortes gegeben ist, die Art des dem Trapez eingeschriebenen Kegelschnittes zu untersuchen, welcher durch diesen Punkt geht.

(18_1) Nouv. Ann. X, 110. —

2. Ein der Gestalt und Gröſse nach gegebener Kegelschnitt bewegt sich so, daſs jeder seiner Brennpunkte auf einer gegebenen Geraden bleibt. In jeder Lage zieht man an den Kegelschnitt Tangenten parallel der Geraden, welche der eine Brennpunkt beschreibt. Den Ort der Berührungspunkte zu bestimmen.

(20_1) Nouv. Ann. X, 111. —

3. Man betrachtet alle Kegelschnitte, welche einem bei A rechtwinkligen Dreieck ABC so umgeschrieben sind, daſs die in B und C an diese Kegelschnitte gelegten Tangenten sich auf der Höhe des Dreiecks schneiden. Gesucht wird:

1) Der Ort des Durchschnittspunktes der Normalen, welche in B und C an diese Kegelschnitte gelegt sind.

2) Der Ort der Mittelpunkte dieser Kegelschnitte; zu unterscheiden sind die Punkte des Ortes, welche Mittelpunkte der Ellipsen sind, von denen, welche Mittelpunkte der Hyperbeln sind.

3) Der Ort der Pole irgend einer Geraden D. Dieser Ort ist ein Kegelschnitt; zu untersuchen sind alle Geraden D', für welche dieser Kegelschnitt eine Parabel ist; und zu suchen ist der Ort der Projektionen des Punktes A auf diese Gerade.

(22_1) Nouv. Ann. X, 111. —

4. In einer Ebene sind eine Gerade LL', ein Punkt F und ein Punkt A gegeben; man betrachtet alle Kegelschnitte, für welche der Punkt F ein Brennpunkt und die Gerade LL' die entsprechende Leitlinie ist. Durch den Punkt A zieht man an alle diese Kegelschnitte Tangenten, und man verlangt

1) den Ort der Projektionen des Punktes A auf alle Berührungssehnen;

2) den Ort der Berührungspunkte.

Dieser letztere Ort ist ein Kegelschnitt; man soll untersuchen, von welcher Art er je nach der Lage des Punktes A ist, und für eine gegebene Lage dieses Punktes durch einfache Konstruktionen eine Zahl von Punkten und Tangenten zu erhalten suchen, welche hinreichend sind, um den Kegelschnitt zu bestimmen.

(14_2) Nouv. Ann. X, 354. —

5. Von einem Kegelschnitt mögen F und G die Brennpunkte sein, P bedeute einen beliebigen Peripheriepunkt, Q den Mittelpunkt des in das Dreieck FGP beschriebenen Kreises; es soll nun untersucht werden, welche Kurve der Punkt Q beschreibt, sobald P den gegebenen Kegelschnitt durchläuft.

Ferner soll eine gleiche Untersuchung angestellt werden über die Mittelpunkte der drei Kreise, welche je eine Seite des Dreiecks FGP und die Verlängerungen der beiden andern Seiten berühren.

Die Aufgabe läfst sich noch dahin verallgemeinern, dafs man statt der Brennpunkte F und G zwei andere feste Punkte nimmt, welche auf der Hauptachse des Kegelschnitts und in gleichen Entfernungen von dessen Centrum liegen.

Lösung: (R. K.).

(60) Schlömilch IX, 285. X, 416—418.

6. Von einem beliebigen Punkte P sind an einen gegebenen Kegelschnitt Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte Q und R heifsen mögen, ferner bezeichne S den Fufspunkt der Senkrechten von P auf QR, also die Projektion des Pols auf seine Polare. Durchläuft nun P eine bestimmte Linie, so wird S eine gewisse andere Linie beschreiben, deren Natur untersucht werden soll.

Da der Ort von S meistens zu den Kurven höherer Grade gehört, so mögen folgende einfache Fälle untersucht werden.

a) Ist der Kegelschnitt eine Parabel, und der Weg von P parallel zu deren Directrix, so beschreibt S einen Kreis, dessen

Centrum im Brennpunkte liegt, und dessen Radius gleich ist dem Abstande des Polwegs von der Directrix.

b) Der Kegelschnitt sei zweitens eine Ellipse mit den Brennpunkten F, G, und es beschreibe P eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse geht und deren Peripherie in den Punkten H, I schneidet; die Projektion S bewegt sich dann auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche mit der Ellipse koncentrisch ist und durch die vier Punkte F, G, H, I geht.

Bezeichnet a die grofse, b die kleine Halbachse der Ellipse, h deren Halbparameter, e ihre lineare Excentricität, γ den Winkel zwischen a und dem Polwege HI, ferner δ den Winkel zwischen a und der oberen Hyperbelasymptote, endlich a_1 die Halbachse der Hyperbel, so gelten die leicht konstruierbaren Formeln

$$\tan\delta = \frac{a}{h}\tan\gamma, \qquad a_1 = e\sqrt{\sin 2\delta}.$$

Im speziellen Falle $\tan\gamma = \frac{h}{a}$ wird $\delta = 45^0$ und a_1 der Gröfse und Lage nach identisch mit e.

Für die Hyperbel bestehen ähnliche Sätze wie für die Ellipse.

Lösung: (R. K.).

(81) Schlömilch X, 198. XI, 268.

7. a) Die drei Paare von Punkten, in welchen die Seiten eines vollständigen Vierecks von einer Geraden geschnitten werden, bilden bekanntlich eine Involution. Rückt die Gerade parallel weiter, so ist der Ort der bezüglichen Centralpunkte eine dem Viereck umschriebene Hyperbel.

b) Für jede Hyperbel giebt es zwei verschiedene Scharen von Geraden, durch die sie erzeugt werden kann. Den beiden Scharen gehören auch die Asymptoten an. In einem Viereck, dessen Gegenseiten senkrecht aufeinanderstehen, ist die Hyperbel gleichseitig.

c) Der Ort der Mittelpunkte aller möglichen Hyperbeln ist ein dem Dreieck der Diagonalpunkte umschriebener Kegelschnitt. Bei konvexen Vierecken ist er eine Hyperbel, bei konkaven eine Ellipse, bei einem Viereck mit senkrechten Gegenseiten ein Kreis.

d) Der Mittelpunkt des Kegelschnitts in (c) ist der Punkt, in dem sich die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten des Vierecks schneiden.

Lösung: (P. G.); (K. M.).

(989) Glaser XXI, 520. XXII, 270, 516 Berichtigung.

8. a) Teilt man in einem Kegelschnitt die auf der Hauptachse senkrecht stehenden Sehnen nach dem goldenen Schnitt, so liegen die Teilpunkte auf einem neuen Kegelschnitt derselben Art, welcher mit dem gegebenen die Hauptachse gemein hat.

b) Teilt man die durch den Scheitel eines Kegelschnitts gezogenen Sehnen nach dem goldenen Schnitt so, dafs der gröfsere Abschnitt demselben anliegt, so liegen die Teilpunkte auf einem ähnlichen Kegelschnitt.

Lösung: (G.); (K. M.).

(909) Rulf XX, 594. XXI, 349.

9. Welchen Ort beschreibt der Schwerpunkt S des in eine Kurve II. O. konstruierten Dreiecks ABC, wenn sich C auf der Kurve bewegt?

Lösung: Eine Kurve, die mit der ersten in der Ähnlichkeitslage sich befindet. (G.)

(1009) Meyer XXII, 26. XXII, 433.

10. Wenn der eine Brennpunkt F einer veränderlichen Kurve II. O., welche stets die Seiten eines Dreiecks ABC berührt, eine durch A und B gehende Kurve II. O. λ durchläuft, dann bewegt sich der andere Brennpunkt F' auf einer ebenfalls durch A und B gehenden Kurve II. O. λ', welche in besonderen Fällen mit λ zur Deckung kommt. — Beschreibt hingegen F eine durch A, B und C gehende Kurve II. O., dann durchläuft F' eine Gerade.

Lösung: (P. G.); (K. M.).

(1096) Meyer XXIII, 50. XXIII, 429.

---

§ 7. Physikalische Gesetze sind zu beachten.*)

1. Auf einem ebenen Felde hört man den Knall des Gewehrs und das Einschlagen der Kugel in die Scheibe zu gleicher Zeit. Den Ort des Hörers zu finden.

Lösung: Hyperbel.

(*167*) Educ. Times. XIV, 362.

2. Von einem Schiefsstande A wird gleichzeitig nach den Scheiben B und C gefeuert ($AB = r_1$, $AC = r_2$). Die Geschofsgeschwindigkeiten seien resp. v_1 und v_2. Auf welcher Kurve liegt A, wenn das Einschlagen des einen Geschosses um t Sekunden früher in A gehört werden soll, als das des anderen?

Lösung: Kurve vierter Ordnung. Ist $v_1 = v_2$, eine Hyperbel.

(368) Sievers XV, 125. XV, 436.

3. Auf welcher Kurve bewegt sich ein Punkt P, wenn er von zwei Lichtquellen A und B verschiedener Intensität immer dieselbe Lichtmenge empfängt?

Lösung: Kugel. (G.)

(369) Sievers XV, 125. XV, 437.

---

*) Vergl. J § 2 Nr. 3, 8, 9.

4. In einer vertikalen Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben. Es soll der geometrische Ort aller Punkte P bestimmt werden, denen die Eigenschaft zukommt, daſs die Verbindungslinien PA und PB von einem Massenpunkt in gleicher Zeit durchfallen werden.

Lösung: Gleichseitige Hyperbel. (G. 2); (R. K.).
(1170) Kosch XXIV, 23. XXIV, 449.

II. Umhüllungskurven.*)

1. Ein fester, auf der Peripherie eines Kegelschnitts liegender Punkt O sei der Scheitel eines Winkels, dessen Schenkel die Kurve auſser in O noch in P und Q schneiden. Wenn sich nun der Winkel um den Punkt O dreht, ohne seine Gröſse zu ändern, so bewegt sich die Sehne PQ so, daſs sie immer einen zweiten Kegelschnitt berührt.**) (Vergl. No. 2.)

Beweis synthetisch.
(51) Schlömilch IX, 22. X, 115—118; X, 412.

2. Eine Kegelschnittssehne bewege sich so, daſs sie an einem festen Peripheriepunkt einen Winkel von unveränderlicher Gröſse spannt. Welche Kurve wird von ihr eingehüllt und welche Sätze erhält man aus dem Ergebnis mittelst Kollineation und Korrelation? (Vergl. No. 1.)

Lösung: Kegelschnitt. (P. G. 2).
(311) Weinmeister XIV, 357. XV, 118.

3. Der Mittelpunkt eines Kreises O von konstantem Radius bewegt sich in seiner Ebene auf dem Umfange eines festen Kreises O'. Zu suchen die Umhüllungskurve der Polaren eines festen Punktes P in Bezug auf den Kreis O.

(24_1) Nouv. Ann. X, 112. —

---

*) Vergl. G § 2 Nr. 17, 23, 24. § 3 Nr. 19. § 4 Nr. 9. G II Nr. 4 und J § 8 Nr. 9.

**) Die Untersuchung des Kegelschnitts führt zu dem Satze: Bewegt sich ein konstanter Winkel mit seinem Scheitel im Brennpunkte eines Kegelschnitts, so schneiden seine Schenkel den Kegelschnitt in vier Punkten, welche ein demselben eingeschriebenes Viereck bilden, dessen gegenüberliegende Seiten einen und denselben Kegelschnitt berühren. Man erhält also zwei Kegelschnitte, welche nur für den Fall identisch werden, als der konstante Winkel gleich einem Rechten wird. Vergl. Fiedler: Darstellende Geometrie. 1871. p. 110; ferner Poncelet: *Traité des propr. proj. des fig.* Sect. IV, Chap. I. Art. 453, 457, 461, 480—483, 486, 491. Rulf und Nachschrift d. Red. X, 117—118; X, 412.

4. Ein centrischer Kegelschnitt $A(x-u)^2 + B(y-v)^2 = 1$ werde parallel zu sich selbst so verschoben, daſs seine Achsen unverändert bleiben und sein Mittelpunkt uv eine feste Gerade $Mu + Nv = L$ durchlaufe. Welche Kurve berühren die zum Koordinatenanfangspunkt gehörigen Polaren?

Lösung: Parabel. (R. K.). Erörterung eines Spezialfalles.

(112) SCHLÖMILCH XI, 272. XII, 196.

5. Ein centrischer Kegelschnitt $Ax^2 + By^2 = 1$ dreht sich um seinen Mittelpunkt. Welche Kurve wird von den Polaren eines festen Punktes gh berührt?

Lösung: Centrischer Kegelschnitt und zwar Hyperbel, wenn der rotierende Kegelschnitt eine Ellipse ist, und umgekehrt. Für $B = -A$ wird die erhaltene Kurve ein Kreis. (R. K.).

(113) SCHLÖMILCH XI, 272. XII, 197.

6. Ändert ein centrischer Kegelschnitt $Ax^2 + By^2 = 1$ seine Achsen so, daſs deren geometrisches Mittel konstant bleibt ($AB = C^2$), so berühren die Polaren eines festen Punktes gh eine koncentrische gleichseitige Hyperbel.

Lösung: (R. K.).

(114) SCHLÖMILCH XI, 273. XII, 197.

7.*) Der Mittelpunkt eines Kreises uv durchlaufe eine feste Ellipse $\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1$, während seine Peripherie immer durch den Ellipsenmittelpunkt geht; die Polaren eines festen Punktes gh berühren alsdann einen Kegelschnitt, welcher eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel darstellt, je nachdem der Pol innerhalb, auf oder auſserhalb der gegebenen Ellipse liegt.

Lösung: (R. K.).

(115) SCHLÖMILCH XI, 273. XII, 198.

8. Bei unveränderter Lage der Achsen durchlaufe der Mittelpunkt eines centrischen Kegelschnittes einen festen Kreis; zugleich aber werde ihm eine solche Drehung um seinen Mittelpunkt erteilt, daſs seine Hauptachse immer Tangente an diesem Kreise bleibe. Gesucht wird die Kurve, welche von sämtlichen Polaren eines gegebenen Punktes berührt wird.

(162) CAPELLE XII, 202. —

---

*) Diese Untersuchungen Nr. 4—7 gestatten eine weitere Ausführung, wenn die in den vorigen Beispielen angegebenen oder ähnliche Änderungen des Kegelschnitts gleichzeitig vorgenommen werden. Man könnte nämlich den Mittelpunkt des Kegelschnitts längs einer Kurve C fortrücken lassen, dabei dem Kegelschnitt eine Drehung erteilen (etwa so, daſs seine Hauptachse immer Tangente an C bleibt), und endlich die Kegelschnittachsen nach einem bestimmten Gesetze ändern. Jedenfalls werden sich durch passende Wahl der Leitkurve C u. s. w. auch hier einfache Sätze finden lassen. SCHLÖMILCH XI, 274.

9. Drei koncentrische Kegelschnitte $Ax^2 + By^2 = 1 + k$ (1), $Ax^2 + By^2 = 1$ (2) und $Ax^2 + By^2 = \frac{1}{1+k}$ (3) sind gegeben (k ist eine beliebige absolute Zahl). Von einem Punkt P von (1) sind die Tangenten PT_1 und PT_2 an (2) gezogen; p sei der Abstand des Poles von der Polare T_1T_2, q die Entfernung des Kegelschnittcentrums von T_1T_2, dann ist $p = kq$ und T_1T_2 berührt (3).

Lösung: (R. K.).

(208) Schlömilch XIII, 34. XIII, 363.

10. Eine Gerade AD schneidet zwei Kreise K und K' so, dafs die abgeschnittenen Sehnen AB und CD einander gleich sind; gesucht wird die Umhüllungskurve der Geraden AD.

Lösung: Parabel. (G.).

(*84b*) Journ. élém. XII, 434.

11. Welches ist die Umhüllungskurve der Polaren eines festen Punktes als Pol in Bezug auf einen Kreis, der auf der Peripherie eines festen Kreises rollt?

Lösung: Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Pol innerhalb, auf der Peripherie oder aufserhalb des Hülfskreises liegt. (R. K.).

(209) Budde XIII, 34. XIII, 363.

12. Auf der Seite AB eines Dreiecks ABC ist ein fester Punkt D und auf AC ein fester Punkt E gegeben, durch welche b und c immer gehen sollen. Welche Kurve berührt a, wenn $\triangle ABC$ gedreht wird?

Lösung: (G. 2); auch leicht durch (K. M.) ausführbar. Kreis.

(493) Adami XVI, 205. XVI, 501.

13. Dreht sich ein rechter Winkel um den Mittelpunkt eines Kegelschnitts, so bestimmen dessen Schenkel auf dem Kegelschnitt Sehnen, die einen Kreis umhüllen.

Beweis: (R. K.).

(723) Sporer XVIII, 505. XIX, 270.

14. Durch einen Punkt einer Seite eines Dreiecks wird eine Transversale so gezogen, dafs sie in jenem Punkt halbiert wird. Welche Kurve umhüllt die Transversale, wenn der Punkt die Seite der ganzen Länge nach durchläuft?

Lösung: Parabel. (K. M.); (P. G.).

(1137) Steckelberg XXIII, 430. XXIV, 185.

15. Welche Kurven umhüllen alle Euler'schen Geraden MSH unter der Bedingung, dafs zwei Ecken eines Dreiecks fest bleiben

und die dritte Ecke sich auf einer Geraden bewegt? (Einem **Punkte** M entsprechen zwei Punkte S und S_1, während einem S nur ein O entspricht.)

Lösung: Kurve vierter Ordnung. (R. K.).

(1321) Bökle XXV, 513. XXVI, 274.

16. Ein Winkel von konstanter Gröfse dreht sich um seinen Scheitelpunkt S und seine Schenkel treffen einen Kreis in den Punkten A und B, sowie A_1 und B_1. Welchen Ort umhüllen die Geraden AB und A_1B_1?

Lösung: (P. G.).*)

(1015) Meyer XXII, 105. XXII, 504.

---

*) In der Lösung ist nur die Enveloppe der Geraden AB und A_1B_1 in Betracht gezogen und dadurch ein Kegelschnitt K_1 erhalten. Man hätte auch die Enveloppe von AB_1 und A_1B suchen können und so nach derselben Methode einen zweiten Kegelschnitt K_2 erhalten. Analytisch gestaltet sich die Lösung folgendermafsen: Es sei SM Abscissenachse und die in M darauf errichtete Senkrechte Ordinatenachse; ferner sei $\sphericalangle ASB = \varphi$, $\sphericalangle BSM = \vartheta$, $\sphericalangle ASM = \vartheta' = \vartheta + \varphi$. Dann sind die Gleichungen von AB und A_1B_1:

$$\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ \lambda \sin\vartheta \cos\vartheta + \sin\vartheta \sqrt{r^2 - \lambda^2 \sin\vartheta^2} & -\lambda \sin\vartheta^2 + \cos\vartheta \sqrt{r^2 - \lambda^2 \sin\vartheta^2} & 1 \\ \lambda \sin\vartheta' \cos\vartheta' \pm \sin\vartheta' \sqrt{r^2 - \lambda^2 \sin\vartheta'^2} & -\lambda \sin\vartheta'^2 \pm \cos\vartheta' \sqrt{r^2 - \lambda^2 \sin\vartheta'^2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

wo für AB das obere, für A_1B_1 das untere Zeichen zu nehmen ist. Entwickelt man die Determinante für AB und entfernt die Irrationalitäten, so erhält man eine Gleichung 4ten Grades; dieselbe Gleichung erhält man aber auch, wenn man die 2te Determinante entwickelt, weil dann die Biformität der Wurzeln verschwindet. Diese Gleichung des 4ten Grades in x und y ist also das Produkt der Gleichungen von AB, A_1B_1, AB_1 und A_1B; bildet man ihre derivierte Gleichung nach ϑ und eliminiert ϑ, so mufs das Produkt der Gleichungen der Kegelschnitte K_1 und K_2 herauskommen. Da man aber bei der Ausführung der Rechnung das entwickelte Produkt erhält, so hat es den Anschein, die Enveloppe sei eine Kurve 4ter Ordnung. Stoll.

G.

Kegelschnitte und höhere Kurven.

I. Kegelschnitte*).

§ 1. Punktreihen und Strahlenbüschel.

1. Die Schnittpunkte A und B eines Kreises (Mittelpunkt O, Radius r) und einer Geraden sind mit einem dritten Punkte C des Kreises verbunden. Dreht man die Sekante um irgend einen ihrer Punkte, z. B. P, welcher durch $PO = d$ gegeben ist, so durchläuft bekanntlich das Paar der Verbindungssehnen einer Strahleninvolution. Die Potenz dieser Involution ist zu bestimmen.

Auflösung: (G. T.); $c = \frac{d - r}{d + r}$.**)

(609) Kober XVII, 365. XVIII, 127.

2. Die Potenzen c_1, c_2, c_3 der drei durch vier Strahlen bestimmten Strahleninvolutionen sind der Bedingung $c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = 2$ unterworfen.

---

*) Vergl. Erler: Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. VIII, 99—130. Martus: Bestimmung der Krümmungsradien. XX, 321 bis 326, ferner Bazzala (XXI, 19), Haluschka (XXI, 189), Strübing (XXI, 266), Hildebrandt (XXI, 575), Beiträge zur Kegelschnittslehre und Schlömilch: Über die Krümmungskreise der Kegelschnitte XXII, 161 bis 168. v. Jettmar: Ein Kapitel aus der analytischen Geometrie des ebenen Dreiecks XXV, 481—497. Thieme: Zur elementaren Kegelschnittlehre. XXV, 575—577.

**) Die Strahleninvolution ist hyperbolisch oder elliptisch ($c \gtrless 0$), je nachdem der Drehpunkt aufserhalb oder innerhalb des Kreises liegt ($d - r \gtrless 0$); insbesondere gleichseitig-hyperbolisch ($c = +1$), wenn der Drehpunkt unendlich entfernt ist ($d = \infty$); rechtwinklig-elliptisch ($c = -1$), wenn der Drehpunkt mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammenfällt ($d = 0$); parabolisch ($c = 0$), wenn der Drehpunkt ein Punkt des Kreises selbst ist ($d - r = 0$).

Beweis: Folgt aus dem vorigen Satz in Verbindung mit § 5 Nr. 21.

(786) KOBER XIX, 346. XX, 185.

3. Die Summe der reciproken Potenzen der drei durch vier Punkte bestimmten Punktinvolutionen ist gleich Null.

Beweis: (R. und G.). Vergl. Finsterbusch: Beitrag zur synth. Geom. eben. Kreissysteme. Progr. d. Realschule zu Werdau 1888.

(902) KOBER und STOLL XX, 512. XXI. 277.

4. a) Für die Höhenfuſspunkte des Diagonalendreiseits ist in Bezug auf ein vollständiges Vierseit die zugehörige Strahleninvolution eine gleichseitig-hyperbolische.

b) Für die zwei Schnittpunkte der über den Abständen der Gegenecken als Durchmessern beschriebenen drei Kreise ist in Bezug auf ein vollständiges Vierseit die zugehörige Strahleninvolution eine rechtwinklig-elliptische.

Beweis: a) Vergl. Schröter: Über eine besondere Kurve dritter Ordn. u. eine einfache Erzeugungsart d. allg. Kurve dritter Ordn. Math. Ann. Bd. 5 p. 50.

b) Vergl. Steiner-Schröter: Theorie der Kegelschnitte. § 18.

(641a,b) KOBER XVII, 597. —

5. Das harmonische Mittel h zwischen den n Gröſsen a_1, $a_2 \cdots a_n$ ist durch die Gleichung $\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n}\right)$ definiert. Es sei nun ein fester, aus den Strahlen AB_1, AB_2, $\cdots$ AB_n bestehender ebener Strahlenbüschel gegeben und auſserdem ein fester Punkt C; durch letzteren legt man eine beliebige Gerade, welche jene Geraden in P_1, P_2, $\cdots$ P_n schneidet, und nimmt auf derselben Transversalen den Abschnitt CQ gleich dem harmonischen Mittel zwischen CP_1, CP_2, $\cdots$ CP_n; dreht sich nun die Transversale um C, so beschreibt Q eine durch A gehende Gerade. — Um letztere rasch zu konstruieren, errichte man in A senkrecht zu AC die beliebige Strecke AD*) und ziehe durch D eine Parallele zu AC, welche AB_1, AB_2, u. s. w. in E_1, E_2, $\cdots$ und AQ in F schneidet; die Strecke DF ist dann das arithmetische Mittel zwischen DE_1, DE_2, $\cdots$ DE_n. — Sind diese Sätze synthetisch beweisbar und läſst sich das allgemeine harmonische Mittel durch den alleinigen Gebrauch des Lineals konstruieren?

(903) SCHLÖMILCH XX, 512. XXI, 278.

6. Sind zwei feste Strahlen OA und OB gegeben und bestimmt man zu einem variierenden durch O gezogenen Strahl OC einen vierten Strahl OC' so, daſs OC' und OA harmonisch von

*) AD braucht nicht senkrecht zu AC gezogen zu werden, sondern kann mit AC einen beliebigen Winkel bilden.

OC und *OB* getrennt werden, so bilden *OC* und *OC'* zwei koncentrische projektivische Strahlenbüschel mit den Doppelstrahlen *OA* und *OB*.

Beweis: (P. G. 2); (K. M.).

(1080) Rulf XXII, 595. XXIII, 344.

7. Entspricht dem Anfangspunkt einer Strecke der Endpunkt, dem Endpunkt der Mittelpunkt, dem Mittelpunkt der Anfangspunkt, so lassen sich die projektivischen Punktreihen durch Verschiebung der einen, einerlei nach welcher Seite, um $\frac{1}{3}$ der Strecke in involutorische Lage bringen.

Beweis: (G. R.).

(1114) Rulf XXIII, 195. XXIII, 589.

---

§ 2. Die Parabel.

a. Lehrsätze.*)

1. Jede durch den Brennpunkt einer Parabel gezogene Sehne ist gleich dem Vierfachen des Radius vector, welcher von dem Berührungspunkte der Tangente parallel dieser Sehne gezogen ist.

(*19*$_1$) Nouv. Ann. X, 111. —

2. Eine Parabel ist gegeben durch die Leitlinie und zwei Tangenten. Errichtet man im Schnittpunkte der Tangenten die Senkrechte auf die eine, und fällt vom Schnittpunkte der Senkrechten mit der Leitlinie das Lot auf die zweite, so schneidet dieses die erste Tangente im zugehörigen Berührungspunkte.

Beweis: (R. K.).

(172) Röllner XII, 267. XIII, 123.

3. Gegeben ist ein Teil eines in eine Parabel $y^2 = 2px$ so beschriebenen Polygons, daſs die Projektion einer jeden Seite auf die Direktrix $= k$ ist; verlängert man nun jede Seite über einen Eckpunkt, bis sie die durch den benachbarten Eckpunkt zur Achse gezogene Parallele trifft, so sind alle Abschnitte dieser Parallelen, welche zwischen dem Durchschnittspunkt und der Parabel liegen, einander gleich.

Beweis: (R. K.).

(*210*) Nouv. Ann. XV, 361.

4. Gegeben ist eine Parabel $y^2 = 2px$ mit dem Scheitel *A* und auf ihr Punkt *M*; die Normale in *M* trifft die Achse in *P* und die Parabel zum zweitenmal in *N*; *Q* sei die Mitte von *MN*;

---

*) Vergl. § 3 Nr. 8 Anmerk.; 17, 34. § 5 Nr. 1a.

auf eine durch Q zu AP gezogene Parallele sei die Senkrechte MR gefällt, welche AP in L trifft; dann ist $PR \perp MN$.

Beweis: (G.).

(*211*) Nouv. Ann. XV, 361.

5. Zwei zu einander senkrechte Gerade OX und OY werden von zwei beweglichen Punkten A und B durchlaufen; A durchläuft OX mit gleichförmiger Geschwindigkeit a, B dagegen OY mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit b. Zu beweisen, dafs AB stets Tangente an einer Parabel ist.

Beweis: (G.).

(*86*) Journ. élém. XII, 434.

6. Von einem Punkt A der Achse einer gegebenen Parabel sind an dieselbe die Tangenten AB und AC gezogen; aufserdem sind noch zwei beliebige Tangenten DE und FG gezogen, welche AB in D und F, AC in E und G treffen. Dann ist $DF = EG$.

Beweis: (G.).

(*317*) Nouv. Ann. XVIII, 199.

7. Durch den Punkt A einer Parabel zieht man die Sehne AB, welche gleichzeitig Normale der Parabel in A ist. Eine Tangente der Parabel parallel AB berührt die Parabel in D und trifft die Direktrix L in C; dann ist $AB = 4\,CD$.

Beweis: (G.).

(*318*) Journ. élém. XVIII, 199.

8. 1) In den Punkten M und M' einer Parabel, deren Brennpunkt F ist, sind zwei Tangenten gelegt, welche sich in P schneiden; zu beweisen, dafs $\frac{MP^2}{MF} = \frac{M'P^2}{M'F}$ ist.

2) Giebt es einen analogen Satz für die Ellipse und Hyperbel?

Beweis: (G.). Für die Ellipse wird $\frac{MP^2}{MF \cdot MF'} = \frac{M'P^2}{M'F \cdot M'F'}$ (F und F' Brennpunkte der Ellipse).

($214_{1,2}$) Journ. élém. XV, 362.

9. Von einem Punkt M zieht man an eine gegebene Parabel die Tangenten MA und MB, welche die Parabelachse bez. in A' und B' treffen; dann ist $MA : MB = MA' : MB'$.

Beweis: (G.).

(*564*) Journ. élém. XXIV, 26.

10. Projiziert man jene Stücke der Parabeltangenten, welche zwischen einer festen Tangente und der Scheiteltangente gelegen sind, auf die letztere, so erhält man lauter untereinander gleiche Strecken.

Beweis: (R. K.) und (G. 3).

(776) Rulf XIX, 273. XX, 31.

11. Durchläuft ein Punkt P die Scheiteltangente S einer Parabel und fällt man von ihm auf seine Polare B eine Senkrechte, so schneidet diese die Achse in einem festen Punkte C, welcher vom Scheitel A um p entfernt ist. (p Entfernung des Brennpunktes F von der Leitlinie.)*)

Beweis: (G.) und (R. K.).

(988) Rulf XXI, 520. XXII, 269.

12. Errichtet man im Mittelpunkt M einer Parabelsehne AB auf dieser eine Senkrechte, welche die Achse in Q trifft; fällt man ferner von M auf die Parabelachse die Senkrechte MN, so ist NQ gleich dem Abstande p des Brennpunktes von der Leitlinie.

Beweis: (G.); (R. K.).

(1156) Rulf XXIII, 591. XXIV, 338.

13. Zieht man durch den Mittelpunkt einer Parabelsehne eine zweite Sehne senkrecht zur Achse und beschreibt über derselben als Durchmesser einen Halbkreis, so ist die dem Mittelpunkt der ersten Sehne entsprechende Halbkreisordinate gerade so grofs wie der Abstand des Endpunktes der ersten Parabelsehne von ihrem konjugierten Durchmesser.

Beweis: (R. K.).

(1031) Rulf XXII, 198. XXII, 593.

---

14. Sind φ, ψ, ϑ die Winkel, welche zwei beliebige Parabeltangenten und ihre Berührungssehne mit der Direktrix bilden, so ist $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = 2\operatorname{tg}\vartheta$.

Beweis: (R. K.).

(*319*) Educ. Times. XVIII, 200.

15. Zieht man von einem gegebenen Punkte P die beiden Normalen PA und PB zu einer Parabel, macht $PC \perp AB$ und konstruiert den zu C in Bezug auf A und B konjugierten harmonischen Punkt D, so ist PD senkrecht zur Achse der Parabel.

Beweis: (H. B.).

(*83*) Nouv. Ann. XII, 434.

16. Zu beweisen, dafs zwei Schnittpunkte zweier Parabeln mit gemeinsamer Leitlinie auf dem Mittellot der Verbindungslinie ihrer Brennpunkte liegen.

Beweis: (G.); (R. K.).

(547) Weber XVI, 503. XVII, 286.

---

*) Anmerkung: 1) Ein ganz analoger Satz besteht für die Tangenten in den Endpunkten der Achsen von Ellipsen und Hyperbeln.

2) Jedes Dreieck, welches aus einer durch den Punkt $x = p$, $y = 0$ gehenden Parabelsehne und den beiden Tangenten in den Endpunkten der Sehne gebildet wird, hat den Scheitelpunkt der Parabel zum Höhenschnittpunkt und das Produkt der Höhenabschnitte ist p^2.

(Meyer.)

17. Wird eine Parabel parallel zu sich selbst so verschoben, dafs ihr Scheitel eine feste Gerade durchläuft, so berühren die Polaren eines festen Punktes eine Parabel von doppelt so grofsem Parameter, aber von entgegengesetzter Lage.

Beweis: (R. K.) mit Benutzung von Differentialrechnung.
(161) Budde XII, 202. XIII, 32.

---

18. Es seien A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 .... Parabelsehnen von der Art, dafs der Krümmungskreis an A_2 die Parabel zum zweiten Male in A_1 schneide, ebenso der Krümmungskreis an A_3, A_4, A_5 u. s. w. zum zweiten Male bezw. in A_2, A_3, A_4 u. s. w. Jede Sehne begrenzt mit dem Bogen, der ihre Endpunkte verbindet, ein Segment. Es soll berechnet werden, in welchem Flächenverhältnis eines dieser Segmente zur Summe der unendlich vielen kleineren steht.

Lösung: (R. K.). Geometrische Reihe. Das Verhältnis ist $1:26$.
(147) Weinmeister XII, 110. XII, 429.

19. Zwei Parabeln sind so konstruiert, dafs sie sowohl dieselbe Achse als dieselbe Direktrix besitzen, wobei a und $b > a$ die Abstände ihrer Brennpunkte von der Direktrix bezeichnen mögen. Diese Parabeln schneiden sich in zwei Punkten, deren Abscisse das arithmetische Mittel aus a und b ist und deren Ordinaten das positiv bez. negativ genommene geometrische Mittel aus a und b sind. Die mondförmige Fläche zwischen beiden Parabeln beträgt $^1/_3$ des Rechtecks aus $b - a$ und der gemeinschaftlichen Sehne der Parabeln.

Beweis: (R. K.) und (G.).
(171) Schlömilch XII, 267. XIII, 122.

20. Es soll der Satz: „Jeder Parabelsektor zwischen zwei Brennstrahlen hat halb so grofsen Flächeninhalt, als das ihm zugehörige gemischtlinige Trapez, welches den Bogen jenes Sektors, die aus den Endpunkten desselben auf die Leitlinie gefällten Perpendikel, und das zwischen diesen liegende Stück der Leitlinie zu Seiten hat" (Steiner I, Kap. 5, Schlufs) mittelst Affinität erweitert werden.

Beweis: (P. G. 2).
(223) Weinmeister XIII, 205. XIV, 90.

21. Betrachtet man immer je zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ABC als die Tangenten, die dritte Seite als die zugehörige Berührungssehne, so bilden die drei möglichen konfokalen

Parabeln ein krummliniges Dreieck $\alpha\beta\gamma$, dessen Fläche $\frac{5}{27}$ des gleichseitigen Dreiecks beträgt.*)

Beweis: (G.).

(1073) Rulf XXII, 511. XXIII, 266.

22. Zwei veränderliche Parabeln, deren Achsen parallel sind und die Entfernung b haben, liegen so, dafs sie sich in zwei Punkten rechtwinklig schneiden. Die Parameter derselben sind zu berechnen, wenn die zwischen ihnen liegende Fläche ein Minimum ist.

Lösung: (R. K.).

(*195*) Journ. spéc. XV, 42.

---

23. Drei gerade Linien schneiden sich in den Punkten A, B, C; auf der Geraden AB hat man den Punkt M willkürlich gewählt und aus ihm mit dem Radius MC einen Kreis beschrieben, welcher CA in P, CB in Q schneidet; durchläuft nun der Mittelpunkt M die Gerade AB, so bewegt sich die Gerade PQ so, dafs sie immer Tangente an einer Parabel bleibt, welche von den Geraden CA und CB in gewissen, noch zu bestimmenden Punkten berührt wird. Die Lagen der Achse sowie des Scheitels der Parabel sind gleichfalls zu ermitteln.

Lösung: (G.).

(77) Schlömilch X, 197. XI, 32.

24. Es sind drei unbegrenzte Gerade gegeben, welche sich in den Punkten A, B, C schneiden; jeder Punkt P der Geraden AB wird auf die beiden anderen Geraden CA und CB projiziert, wodurch die Punkte Q und R entstehen; die Gerade QR ist dann immer Tangente an einer gewissen Parabel. Nimmt man statt des willkürlichen Punktes P den Fufspunkt F der Senkrechten von C auf AB und bezeichnet die Projektionen von F auf CA und CB mit G und H, so ist GH die Scheiteltangente, F der Brennpunkt der Parabel.

Beweis: (P. G. 3).

(84) Schlömilch X, 350. XI, 107.

25. a) Von dem Punkte (a, b) lassen sich im allgemeinen drei Normalen an die Parabel $y^2 = 2px$ ziehen.

b) Die Schwerpunktskoordinaten ξ, η des Dreiecks zu berechnen, dessen Ecken die Durchschnittspunkte der drei Normalen mit der Parabel sind.

Lösung: a) (R. K.). b) $\xi = \frac{2}{3}(a - p)$; $\eta = 0$.

(*565*) Nyt Tidsskrift. XXIV, 26.

---

*) Der Satz gilt für jedes beliebige Dreieck; aufserdem gilt für jedes beliebige Dreieck noch die Beziehung $A\beta CA + B\gamma AB + C\alpha BC$ gleich dem parabolischen Dreieck. Stegemann.

26. Bilden die Brennpunkte dreier Parabeln die Ecken und die Leitlinien derselben die Seiten desselben gleichseitigen Dreiecks, so berühren sich die Parabeln gegenseitig und die von ihnen eingeschlossene Fläche ist ein Drittel von dem Dreieck.*)

Beweis: (G.); (R. K.).

(889) Rulf XX, 435. XXI, 192.

27. Haben zwei Parabeln zwei Tangenten mit parallelen Berührungssehnen gemeinschaftlich, so liegen ihre Brennpunkte in einer durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten gehenden Geraden, welche mit je einer der Tangenten denselben Winkel einschliefst wie die andere mit der beiden Parabeln gemeinschaftlichen Achsenrichtung.**)

Beweis: (P. L.).

(1008) Rulf XXII, 26. XXII, 433.

28. Alle dem Dreieck ABC eingeschriebenen Parabeln haben zum gemeinsamen Polardreieck dasjenige Dreieck $A'B'C'$, das entsteht, wenn man durch A, B, C Parallelen zu bez. BC, CA, AB legt.

Beweis: (G. 2); (K. M. 2).

(1217) Stoll XXIV, 458. XXV, 187.

29. Zieht man vom Eckpunkt A des Dreiecks ABC eine beliebige Transversale g bis zu ihrem zweiten Schnittpunkt mit dem Umkreise und betrachtet letzteren als Brennpunkt einer Parabel, die BC von aufsen, CA und AB von innen berührt, so ist die Achse dieser Parabel parallel der Winkelgegentransversale von g.

Beweis: (P. G.); (G.); (K. M.).

(1218) Stoll XXIV, 458. XXV, 188.

30. Je zwei Parabeln, welche die Seite BC des Dreiecks ABC von aufsen und CA, AB von innen berühren und so beschaffen sind, dafs je die Achse der einen der Verbindungslinie von A mit dem Brennpunkt der anderen parallel ist, schneiden sich in vier Punkten, welche zu je zwei auf zwei Geraden liegen, die den Winkelhalbierenden des Winkels BAC parallel sind und durch den vierten Eckpunkt des Parallelogramms gehen, das man erhält, wenn von B eine Parallele zu CA und von C eine Parallele zu AB gezogen wird.

Beweis: (G.); (K. M.).

(1219) Stoll XXIV, 458. XXV, 189.

---

*) Aus diesem Satze ergiebt sich die Lösung der Aufgabe: In ein gleichseitiges Dreieck drei sich gegenseitig berührende Parabeln zu zeichnen, von denen jede von zwei Dreiecksseiten berührt wird.

**) Zwei Winkelgegenpunkte eines Dreiecks sind stets Brennpunkte eines in das Dreieck beschriebenen Kegelschnitts.

b. Aufgaben*).

31. Der Scheitel einer gegebenen Parabel sei O, ihr Brennpunkt F und M ein Punkt der Achse; um M als Mittelpunkt ist ein Kreis beschrieben, welcher die Parabel in den vier Punkten P_1, P_2, Q_1, Q_2 schneidet, von denen P_1 und P_2 auf der einen, Q_1 und Q_2 symmetrisch entgegengesetzt auf der andern Seite der Parabelachse liegen. Man soll den Kreishalbmesser so wählen, dafs die Gerade P_1P_2 (selbstverständlich auch Q_1Q_2) durch denselben Punkt E geht, in welchem die Parabelachse von der Direktrix geschnitten wird.
Lösung: (R. K.).
(170) Schlömilch XII, 266. XIII, 122.

32. Einen Kreis zu konstruieren, welcher mit einer Parabel zwei gegebene Punkte gemein hat und dieselbe aufserdem noch in einem dritten Punkt berührt.
Lösung: (G.).
(646) Sporer XVII, 598. XVIII, 354.

33. In einer Parabel wird eine Sehne AB senkrecht zur Achse gezogen. Es sollen die zwei Kreise gezeichnet werden, welche diese Sehne und die Parabel doppelt berühren. Welche Entfernung mufs die Sehne mindestens vom Scheitel haben, damit der zwischen beide gelegte Kreis reell ist?
Lösung: (R. K.).
(826) Rulf XIX, 590. XX, 349.

34. Gegeben zwei Punkte $A\ (x_1y_1)$ und $B\ (x_2y_2)$ einer unbekannten Parabel und die Gerade $\triangle$ als ihre Achse; von A und B fällt man auf $\triangle$ die Senkrechten AA' und BB'; AB' und BA' schneiden sich in C; eine Parallele durch C zu $\triangle$ treffe AB in D, so ist D ein Punkt der Scheiteltangente. Hiernach kann die Parabel leicht konstruiert werden.
Lösung: (R. K.).
(*213*) Journ. spéc. XV, 362.

35. Eine Parabel zu konstruieren, wenn der Brennpunkt, ein Pol und seine Polare gegeben sind.
Lösung: (G.).
(127) Cardinaal XI, 433. XII, 198.

36. Eine Parabel zu konstruieren, von welcher die Achse und zwei Tangenten gegeben sind.**)
Lösung: (P. G.) und (G.).
(96) Kiehl XI, 33. XI, 362.

*) Vergl. § 5 Nr. 25a.
**) Die Aufgabe ist ein besonderer Fall der Aufgabe: Einen Kegel-

37. Von einer zu zeichnenden Parabel kennt man aufser der Länge des Parameters $2p$ den Brennpunkt F und a) einen Punkt P, b) eine Tangente T.

Lösung: (G.).

(752) Rulf XIX, 98. XIX, 503.

38. Von einer Parabel ist gegeben der Brennpunkt F und eine durch denselben gehende Sehne BC; man zeichne sie.

Lösung: (G. 2); (R. K.).

(1235) Rulf XXIV, 608. XXV, 344.

39. Gegeben ein Kreis und auf seiner Peripherie zwei Punkte. Durch diese Punkte eine Parabel zu legen, für welche der Kreis Krümmungskreis ist.

Lösung: (G.).

(148) Weinmeister XII, 110. XII, 430.

40. Gegeben ein Kreis, ein Punkt der Peripherie und ein Punkt aufserhalb. Durch diese Punkte eine Parabel zu legen, welche vom Kreis als Krümmungskreis im gegebenen Peripheriepunkte berührt wird.

Lösung: (G.).

(149) Weinmeister XII, 110. XII, 430.

41. Zwei konfokale Parabeln haben gemeinschaftlich

a) eine Tangente T und einen Punkt P; man zeichne den zweiten gemeinschaftlichen Punkt P derselben;

b) zwei Punkte P und Q; man zeichne ihre gemeinschaftliche Tangente.

Lösung: (G.).

(945) Rulf XXI, 195. XXI, 589.

---

§ 3. Die Ellipse.

a. Lehrsätze*).

1. Bei der Ellipse und Hyperbel sind bekanntlich zweierlei Radienvektoren zu unterscheiden, nämlich die von einem Brennpunkt ausgehenden Fokalvektoren und die durch den Mittelpunkt gehenden Centralvektoren. Die Vergleichung beider giebt Gelegen-

---

schnitt zu konstruieren, wenn gegeben sind ein Punkt, seine Polare und drei Tangenten oder ein Punkt, seine Polare und drei Punkte.

*) Vergl. § 2 Nr. 8; 11 Anmerk.; § 4 Nr. 9—12. § 5 Nr. 1b. Ferner Gusserow: Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises XIX, 418—419. Schlömilch: Notiz über Ellipsensehnen XXIII, 250. Beyel: Über die Ellipse mit dem Achsenverhältnis $1 : \sqrt{2}$. XXIII, 323—340.

heit zu einigen Übungsaufgaben, von denen hier ein paar auf die Ellipse bezügliche Erwähnung finden mögen.

Gehen durch einen Ellipsenpunkt ein Fokalvektor $FP = r$ und ein Centralvektor $CP = r'$, so ist $r'^2 = b^2 + (a - r)^2$.

Soll zu einem Fokalvektor $FP = r$ ein paralleler Centralvektor $CP_1 = r_1$ konstruiert werden, so ist es am einfachsten, die Punkte P und P_1 durch ihre excentrischen Anomalien $\sphericalangle ACM = \omega$ und $\sphericalangle ACM_1 = \omega_1$ zu bestimmen; man findet

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{a \sin \omega}{a \cos \omega - e},$$

wo e die lineare Excentricität CF bezeichnet. Die Konstruktion besteht daher einfach darin, dafs man $CM_1 \parallel FM$ zieht. Bedeutet h den Halbparameter der Ellipse, so ist ferner

$$r_1^2 = \frac{ar^2}{2r - h}.$$

Ähnliche Sätze gelten für die Hyperbel.

(49) Schlömilch IX, 21. —

2. Durch einen Ellipsen- oder Hyperbelpunkt P sei an die betreffende Kurve eine Tangente gelegt, welche die Hauptachsen in U und V schneidet; die zugehörige Normale begegne der Kurve zum zweiten Male in Q; ferner bedeute CT den Abstand der Tangente vom Mittelpunkte C, endlich CR den Centralvektor, welcher parallel PQ ist. Bezeichnet man nun die rechtwinkligen Koordinaten von P mit x und y, die von Q mit x_1, y_1 und setzt $CU = u$, $CV = v$, $CT = t$, $CR = r$, $PQ = s$, so hat man folgende einfache Formeln:

$$x_1 = x - 2\frac{r^2}{u}; \quad y_1 = y - 2\frac{r^2}{v}; \quad s = 2\frac{r^2}{t},$$

welche zu verschiedenen Konstruktionen des Punktes Q führen. Diese Formeln und Konstruktionen sind herzuleiten.

(50) Schlömilch IX, 22. —

3. An eine aus den Halbachsen a und b konstruierte Ellipse sind von einem Punkte P aus Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte Q und R heifsen mögen; der Schwerpunkt des Dreiecks PQR sei S. Es soll nun folgender Satz bewiesen werden: Wenn P eine koncentrische ähnliche und ähnlich liegende aus den Halbachsen a_1 und b_1 konstruierte Ellipse durchläuft (wobei also $a_1 : a = b_1 : b$ ist), so beschreibt auch S eine ähnliche und ähnlich liegende Ellipse mit den Halbachsen

$$a_2 = \frac{1}{3}\left(a_1 + \frac{2a^2}{a_1}\right), \quad b_2 = \frac{1}{3}\left(b_1 + \frac{2b^2}{b_1}\right).$$

Im speziellen Falle $a_1 = 2a$, $b_1 = 2b$ wird $a_2 = a$, $b_2 = b$; der Punkt S ist dann der Durchschnitt der ursprünglichen Ellipse mit dem Centralvektor von P.

Für die Hyperbel gilt ein ähnlicher Satz.

Lösung: (G.); (P. G.) und (R. K.).

(83) SCHLÖMILCH X, 350. XI, 106—107; 268—269.

4. AC sei die grofse, BC die kleine Halbachse einer Ellipse, D die Projektion von C auf AB, ferner die Abscisse $CE = AD$, die Ordinate $EF = BD$; ferner sei EF über E bis G verlängert, so dafs $EG = EF$ ist und die von E nach C hin auf der grofsen Achse abgeschnittene Strecke EH ebenfalls $= BD$; es sind dann

1) F und G Ellipsenpunkte,

2) FH ist die durch F gehende Normale,

3) FH wird von CG im zugehörigen Krümmungsmittelpunkte J geschnitten.*)

Beweis: 1) (G.). 2) (G.) und (R. K. 2). 3) (G.) und (G. T.).

G und F werden auch erhalten, wenn man die Brennpunkte der Hyperbeln bestimmt, welche dieselben Achsen wie die Ellipse haben und dieselben verbindet. Diese Verbindungslinien sind Tangenten der Ellipse, deren Berührungspunkte diese Punkte sind. (Fuhrmann.)

(303) SCHLÖMILCH XIV, 271. XV, 36.

5. Auf einer Ellipse mit den Brennpunkten F und G ist der Peripheriepunkt P willkürlich gewählt und daraus ein zweiter Punkt Q abgeleitet, dessen excentrische Anomalie gleichkommt der wahren Anomalie von P; das geometrische Mittel aus den Brennstrahlen FP und GQ hat dann einen konstanten Wert und der Durchschnitt der genannten Strahlen liegt auf einer Ellipse, welche der ursprünglichen Ellipse konfokal ist.

Beweis: (R. K.).

(132) SCHLÖMILCH XI, 434. XII, 263.

6. In einer aus den Halbachsen a und b ($< a$) konstruierten Ellipse sei ein Brennpunkt zum Anfang und die Hauptachse zur Achse eines Polarsystems genommen, wober r den zur wahren Anomalie ω gehörenden Radiusvektor bedeuten möge; es ist dann

---

*) Dieser Satz liefert folgende näherungsweise Konstruktion der Ellipse. Aus J beschreibe man mit dem Radius JF den zu F gehörenden Krümmungskreis, bestimme dann (praktisch am raschesten und genauesten durch Probieren) auf AC den Mittelpunkt K des Kreises, welcher durch A geht und den vorigen Krümmungskreis in M berührt, ebenso auf der Verlängerung von BC das Centrum L des durch B gehenden und den Krümmungskreis in N berührenden Kreises; die drei Kreisbögen AM, MFN, NB bilden nun zusammen näherungsweise einen Ellipsenquadranten. — Bei nicht allzu excentrischen Ellipsen giebt diese Konstruktion recht gute Figuren.

$r = \frac{b^2}{a + \sqrt{a^2 - b^2} \cos \omega}$. Werden nun mit $r_0, r_1, r_2, \cdots r_n$ die Vektoren bezeichnet, welche den Anomalien $\omega = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \cdots \frac{n\pi}{n}$ entsprechen, so gilt die Relation $\frac{1}{2} r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_{n-1} + \frac{1}{2} r_n = nb \cdot \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{(a+b)^n + (a-b)^n}$. Es fragt sich, ob diese Summenformel auf elementarem Wege bewiesen werden kann? (Vergleiche 26. Jahrg. d. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Schlömilch. Über die Zerlegung von $x^n - y^n$ und $x^n + y^n$).

(1104) Schlömilch XXIII, 193. —

7. Legt man durch einen beliebigen Punkt E einer Ellipse (Brennpunkte F_1 und F_2, grofse Achse AB, F_2 näher an A) und einen Scheitel A Tangenten, so halbiert PF_1 den Winkel EF_1A und PF_2 den Winkel EF_2A.

Beweis: (G. 3); (R.); (H. B. 2).

(412) Haluschka XV, 360. XVI, 22.

8. Sind Q, Q_1 die Schnittpunkte einer Ellipsentangente PT mit den Leitlinien der Kurve; F, F_1 resp. die benachbarten Brennpunkte, so wird der zum Punkte P gehörige Krümmungshalbmesser PR durch QF, Q_1F_1 harmonisch im Verhältnis $QQ_1 : Q_1P - QP$ geteilt. — Welche Eigenschaft der Parabel folgt aus diesem Satze?*)

Beweis: (G.); (R. K.).

(733) Emmerich XVIII, 602. XIX, 343.

9. Durch einen beliebigen Ellipsenpunkt P_1 ist eine Normale gezogen, welche der Ellipse in einem zweiten Punkte P_2 begegnet; durch P_2 legt man eine neue, die Ellipse in P_3 schneidende Normale, ebenso durch P_3 eine weitere Normale P_3P_4 u. s. f., so dafs eine zickzackförmige Linie entsteht. Alsdann nähern die Normalen sich immer mehr der kleinen Achse und fallen zuletzt mit ihr zusammen.

Beweis: (R. K. 3) zum Teil mit (T. R.).

(129) Schlömilch XI, 433. XII, 199 und 436.

10. Gegeben eine Ellipse, deren kleine Achse $BB' = 2b$ mittlere Proportionale zwischen der grofsen Achse $AA' = 2a$ und der Excentricität $FF' = 2e$ ist. Im $\triangle FF'P$ (P ein Punkt der Ellipse) ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M beschrieben. Zu

*) Bei der Parabel wird der Krümmungsradius des Punktes P durch die Gerade, die den Brennpunkt mit dem Punkte verbindet, in dem die Tangente des Punktes P die Leitlinie schneidet, halbiert.

beweisen, dafs die Normale PQ (Q auf AA') durch M stetig geteilt wird.

Beweis: (G.).

(*85*) Journ. élém. XII, 434.

11. Haben zwei Ellipsenpunkte A und C eine derartige Lage, dafs ihnen gleiche Durchmesser zugehören, so teilt die Normale AN des einen den Durchmesser CD des anderen in einem nur von der Gestalt der Ellipse abhängigen Verhältnis $DN : NC$.*)

Beweis: (G. T.); (G. 2).

(192) Weinmeister XII, 433. XIII, 280.

12. In dem Punkt M einer gegebenen Ellipse sei die Normale konstruiert, welche die kleine Achse in N trifft. Verbindet man N mit einem der Brennpunkte F und F' z. B. mit F, so ist $MN : NF = a : e$ ($2e$ Brennweite).

Beweis: (G. 2) (R. K.).

(*216*) Mathesis. XV, 363.

13. Von einem Punkt in der Ebene einer Ellipse ist es immer dann, aber auch nur dann möglich, vier reelle Normalen an dieselbe zu ziehen, wenn derselbe auf der Evolute oder innerhalb derselben liegt.

Beweis: (G.); (R.).**)

(981) Stoll XXI, 429. XXII, 196.

14. Wenn bei einer Ellipse $a^2 > 3b^2$ ist, so giebt es auf derselben immer vier Punkte von solcher Beschaffenheit, dafs man von je einem derselben zwei reelle Normalen an die Ellipse ziehen kann, die aufeinander senkrecht stehen. Wo liegen diese Punkte?

Beweis: (G.); (R. K.).

(1103) Stoll XXIII, 125. XXIII, 509; XXIV, 22 Berichtigung.

15. Es sei $AC = a$ die grofse, $BC = b$ die kleine Halbachse und F ein Brennpunkt der zu konstruierenden Ellipse; ferner seien über der Excentricität $CF = e$ als Durchmesser, aus F mit $FB = CA$ und aus C mit CA Kreise beschrieben; wird nun durch C eine beliebige Gerade gelegt, welche die drei Kreise

*) Projiciert man zwei Seiten eines einer Ellipse eingeschriebenen Rechtecks normal auf die Tangente einer Ecke, so stehen die Projektionen in einem von der Wahl des Rechtecks unabhängigen Verhältnis. Durchläuft die Ecke A die Ellipsenperipherie, so bewegt sich N auf einer ähnlichen und ähnlich gelegenen koncentrischen Ellipse. (Weinmeister.)

**) In der ersten Auflösung ist in den vier letzten Zeilen „Evolutenbogen" statt „Ellipsenbogen" zu lesen.

der Reihe nach in den Punkten L, M, N schneidet, so ist LM der centrale und LN der fokale Radiusvektor eines Ellipsenpunktes P, der sich hiernach als Durchschnitt zweier Kreisbogen ergiebt, von denen der eine aus C mit dem Radius LM, der andere aus F mit dem Radius LN beschrieben ist.

Beweis: (R. K.); (G. T. 2).

(501) Schlömilch XVI. 273. XVI, 590.

16. Um einen Punkt P auf der Verlängerung der grofsen Achse AA' einer Ellipse, deren kleine Achse BB' und deren Mittelpunkt C ist, beschreibt man einen Kreis, der den Kreis (C, CA) rechtwinklig schneidet. Dann bilden die Tangenten an diesen Kreis, welche senkrecht auf AA' stehen, mit den Ellipsentangenten in B und B' ein Rechteck, dessen Diagonalen die Ellipse berühren.

Beweis: (G.).

(*570*) Mathesis. XXIV, 28.

17. Alle Ellipsen, deren Brennpunkte die Endpunkte je einer Parabelsehne und deren grofse Achsen je dem doppelten Abstande der Sehnenmitte von der Direktrix gleich sind, schneiden sich im Brennpunkt der Parabel.

Beweis· (G.); (R. K.); (R.).

(1228) Vollhering XXIV, 459. XXV, 275.

18. In jedes Dreieck läfst sich eine Ellipse beschreiben, welche die Dreiecksseiten in deren Mittelpunkten berührt und welche den Schwerpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkte hat.

Beweis: (G.) und (P. G.).

(78) Schlömilch X, 197. X, 349; XI, 32.

19. Durch die Ecke C des gegebenen Dreiecks ABC ist eine willkürliche Gerade gezogen, welche der Gegenseite AB in L begegnet; durch den Mittelpunkt M der Strecke CL legt man die Gerade AM, welche die Gegenseite CB in P trifft; ebenso die Gerade BM, welche CA in Q schneidet; endlich zieht man die Gerade PQ. Wird nun die willkürlich durch C gelegte Gerade um C herumgedreht, so bewegt sich die Gerade PQ so, dafs sie fortwährend die im vorigen Lehrsatze erwähnte Ellipse berührt.

Beweis: (G.).

(79) Schlömilch X, 197. X, 349; XI, 33.

20. MN sei die grofse, PQ die kleine Achse der dem Dreieck ABC umschriebenen Ellipse, welche dessen Schwerpunkt S zum Centrum hat. Wird BC von MN in Z, von PQ in U geschnitten, so giebt es

a) einen Winkel x, so dafs $\frac{CU}{BU} = \frac{\sin(x + 60^0)}{\sin(x - 60^0)}$ und zugleich $\frac{CZ}{BZ} = \frac{\cos(x + 60^0)}{\cos(x - 60^0)}$ ist.

b) Sind O und O' die Schwerpunkte der zwei über BC errichteten gleichseitigen Dreiecke, so ist die in a) genannte Strecke ZU ein Durchmesser des Kreises SOO'. Ferner ist OZB der in a) genannte Winkel x.

c) Es ist $SO = \frac{MN - PQ}{4}$, $SO' = \frac{MN + PQ}{4}$ (O liegt mit A auf derselben Seite von BC und O' auf der entgegengesetzten Seite).

Beweis: (G. T. 2); (G.).

(820) Artzt XIX, 589. XX, 343.

21. Von einem Punkte P seien die Tangenten PA und PB an eine Ellipse gezogen; zu beweisen:

a) der Umkreis des Dreiecks PAB geht nur dann durch den Mittelpunkt M der Ellipse, wenn P auf einer der Diagonalen des Rechtecks liegt, welches durch die Tangenten in den Endpunkten der beiden Achsen gebildet wird.

b) Wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, liegt der Mittelpunkt dieses Kreises auf einer Hyperbel, deren Asymptoten die in M auf den Diagonalen errichteten Lote sind.

Beweis: a) (R. K.); (P. G.). b) (R. K.).

(1095) Stoll XXIII, 50. XXIII, 427.

22. Gegeben ist die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ mit der grofsen Achse AA_1, den Brennpunkten F und F_1, und ein Kreis $(F_1, 2a)$. Zu beweisen ist, dafs es unendlich viele Dreiecke giebt, welche um die Ellipse und in den Kreis beschrieben sind.

Beweis: (G.).

(*567*) Nyt Tidsskrift. XXIV, 27.

23. Wenn man durch den Schwerpunkt eines Dreiecks Parallelen zu den Seiten zieht, so bilden die Schnittpunkte derselben mit den Seiten ein Sechseck, um und in welches sich je eine Ellipse beschreiben läfst. Diese beiden Ellipsen sind ähnlich und ähnlich liegend, haben den Schwerpunkt zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt und das Ähnlichkeitsverhältnis ihrer Achsen ist $2 : \sqrt{3}$. Die eingeschriebene Ellipse berührt die Seiten des Sechsecks in ihren Mittelpunkten. Die beiden Achsen der umgeschriebenen Ellipse sind gegeben durch die Gleichungen

$$A^2 = \frac{8}{27} r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \left(\cot\vartheta + \sqrt{\cot\vartheta^2 - 3}\right)$$

und

$$B^2 = \frac{8}{27} r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \left(\cot\vartheta - \sqrt{\cot\vartheta^2 - 3}\right),$$

wo ϑ den Brocard'schen Winkel bezeichnet.

Beweis: (G.); (P. G.) und (R. K.).

(887) Stoll XX, 434. XXI, 190.

24. Sind an die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, deren Mittelpunkt C und grofse Achse AA' ist und deren Brennpunkte E und E' sind, von dem Punkte P (x_1, y_1) die Tangenten PT und PT' gezogen, so ist der Inhalt von Viereck $PTCT'$ gleich dem eines Dreiecks, dessen Seiten AA', PE und PE' sind.

Beweis: (R. K.).

(1094) Glaser XXIII, 49. XXIII, 427.

25. Konstruiert man über den Achsen einer Ellipse ein Rechteck und fällt von einem beliebigen Punkt M der Ellipse auf die Diagonalen die Senkrechten p und q, so ist $p^2 + q^2 = m^2$ eine konstante Gröfse, und zwar ist $\frac{2}{m^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

Beweis: (R. K.).

(*568*) Journ. élém. XXIV, 28.

26. O sei der Mittelpunkt, F und F' seien die Brennpunkte einer Ellipse. Ist M ein beliebiger Ellipsenpunkt, so verlängere man OM um sich selbst bis M' und ziehe die Tangenten $M'P$ und $M'Q$, wo P und Q die Berührungspunkte sind; dann ist $4\,M'P \cdot M'Q = 3\,M'F \cdot M'F'$.

Beweis: (G.), zum Teil (R.).

(*569*) Mathesis. XXIV, 28.

27. Zieht man an eine Ellipse, deren Mittelpunkt O ist, in den Endpunkten eines Durchmessers CC' Tangenten, welche eine Tangente im Punkte P in D und D' treffen, und zieht den konjugierten Durchmesser OE zu CC', so bilden die Dreiecke DOD', CEC' und CPC' eine geometrische Progression.

Beweis: (*G.*).

(*571*) Educ. Times. XXIV, 29.

28. Die Seiten eines Parallelogramms werden als Durchmesser von vier Ellipsen betrachtet, welche die Mittellinien des Vierecks berühren; hierdurch entsteht ein Vierblatt. Die Fläche F des letzteren ist, wenn die Seiten des Parallelogramms mit a und b, der Winkel beider mit ω bezeichnet wird,

$$F = \frac{1}{2}\,ab \sin\omega\,(\pi - 2).$$

Beweis: (G. 2).

(1265) Rulf XXV, 115. XXV, 582.

b. Aufgaben*).

29. Es glaubt jemand die Entdeckung gemacht zu haben, dafs der Umfang der Ellipse genau oder wenigstens sehr nahe

*) Vergl. § 5 Nr. 25b; ferner Ernst: Konstruktionen von Ellipsentangenten und Bestimmung ihrer Berührungspunkte mit Hülfe des Lineals, wenn die konjugierten Durchmesser der Kurve bekannt sind. XII, 179—189.

gleich sei der Peripherie des Kreises, dessen Radius das geometrische Mittel aus den Halbachsen der Ellipse ist. Diese Behauptung läfst sich durch Angabe einer Ellipse widerlegen, deren Umfang, nach jener Regel berechnet, kleiner ausfällt, als die Peripherie des eingeschriebenen Rhombus, dessen Ecken die vier Scheitel der Ellipse sind. Wie findet man beliebig viele solcher *ad absurdum* führenden Ellipsen?

Lösung: (R.).

(130) Schlömilch XI, 433. XII, 200.

30. Es behauptet jemand, der Flächeninhalt der Ellipse sei genau oder nahezu gleich der Fläche des Kreises, welcher das arithmetische Mittel aus den Halbachsen der Ellipse zum Radius hat. Zur Widerlegung kann eine Ellipse dienen, deren Fläche, nach jener Regel berechnet, gröfser ausfällt als die Fläche des umgeschriebenen Rechtecks, dessen Seiten die Achsen der Ellipse sind. Wie findet man derartige Ellipsen?

Lösung: (R.).

(131) Schlömilch XI, 433. XII, 200.

31. Auf der X-Achse sind die Strecken $CA = a$, $CA_1 = a_1$; auf der Y-Achse die Strecken $CB = b$, $CB_1 = b_1$ abgeschnitten, wobei $a < a_1$ und $b > b_1$ sein möge; nimmt man a und b und ebenso a_1 und b_1 als Halbachsen von Ellipsen, so schneiden sich die Quadranten AB und A_1B_1 in einem Punkte M, und es entstehen die Halbmondflächen AMA_1 und BMB_1. Unter welchen Umständen sind diese gleich und wie findet man einen Kreissektor, welcher dieselbe Fläche besitzt?

Lösung: (R. K.); (P. G.).

(643) Schlömilch XVII, 598. XVIII, 352.

32. In einer Ebene seien von einem Punkte O aus n Strahlen nach beliebigen Richtungen gezogen. Der erste bilde mit dem zweiten den Winkel ω_1, der zweite mit dem dritten ω_2 u. s. w. bis ω_n. Man nehme nun eine an Länge unveränderliche Strecke $AB = 2r$, deren Mitte mit X bezeichnet sei und lege sie auf den ersten Strahl, so dafs A mit O zusammenfällt. Hierauf bewege sich A längs des zweiten Strahls, während B den ersten bis O durchläuft; alsdann bewege sich B auf dem dritten Strahl, während sich A auf dem zweiten bis O zurückbewegt; dann durchlaufe A den vierten Strahl u. s. w. Unter diesen Umständen beschreibt X n elliptische Bogen, welche sich zu einer Rosette zusammensetzen. In welchem Verhältnis steht die Fläche dieser Rosette zur Fläche des Kreises, welcher durch ihre Spitze geht?

Lösung: (R. K.) mit (R.). Rosette: Kreis $= (n - 2) : 2$.

(923) Weinmeister XXI, 32. XXI, 426.

33. Aus der Quadratur der Ellipse soll die Quadratur der Parabel hergeleitet werden.

Lösung: (R.).

(946) Simon XXI, 195. XXI, 589.

34. In ein gleichschenkliges Trapez wird eine Ellipse eingeschrieben. Wie grofs ist die Fläche derselben, wenn man die beiden Parallelen des Trapezes mit a und b, und die Höhe mit h bezeichnet?

Lösung: (R. K.). Ellipse $= \frac{1}{4}\pi h \sqrt{ab}$.

(1281) Rulf XXV, 193. XXVI, 23.

35. Einem rechtwinkligen Trapez wird eine Ellipse so eingeschrieben, dafs die parallelen Seiten Scheiteltangenten sind. Wie grofs ist die Fläche der Ellipse, wenn die Parallelen mit a und b, und die Höhe mit h bezeichnet wird?

Lösung: (R.). Vergl. vorige Aufgabe und (P. G.). Ellipse $= \frac{\pi h a b}{2(a+b)}$.

(1282) Rulf XXV, 193. XXVI, 24.

36. Die Halbachsen einer Ellipse mögen $CA = a$ und $CB = b < a$ sein, und der Nebenscheitel werde zum Mittelpunkt eines mit dem Radius r beschriebenen Kreises genommen; man soll nun r so wählen, dafs der Kreis die Ellipse berührt. Aufserdem sind die Koordinaten der Berührungspunkte beider Kurven zu bestimmen.

Lösnng: (R. K.); $r = \frac{a^2}{e}$.

(722) Schlömilch XVIII, 505. XIX, 270.

37. Eine Ellipse berührt und umschliefst drei Kreise. Der mittlere Kreis, dessen Centrum in der Hauptachse der Ellipse, berührt sowohl den gröfsten Kreis, dessen Centrum im Mittelpunkt der Ellipse liegt, als auch den kleinsten Kreis, welcher mit dem aus dem Scheitelpunkt der Ellipse beschriebenen Krümmungskreis identisch ist, und zwar beide von aufsen. In welchem Verhältnis stehen die Achsen a und b der Ellipse und die Radien r_1, r_2, r_3 der drei Kreise?

Lösung: (R.). Vergl. Nr. 44. $\frac{a}{b} = 1 + \sqrt{5}$;

$$r_1 : r_2 : r_3 = 4 : (\sqrt{5} + 1) : (\sqrt{5} - 1).$$

(768) v. Jettmar XIX, 188. XIX, 587.

38. Aus den Halbachsen OA und OB sei eine Ellipse konstruiert, P sei ein Punkt derselben und PQ der zugehörige

Krümmungshalbmesser, welcher die grofse Halbachse OA in N schneidet. Nun soll der Punkt $P(x_1, y_1)$ so gewählt werden, dafs

a) $\triangle ONQ$ gleichschenklig wird mit der Spitze Q;

b) $\triangle ONQ$ rechtwinklig bei Q wird.

Lösung: (G.) und (R. K.). a) $x_1 = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; $y_1 = b\sqrt{\frac{1}{2}}$; b) die Punkte P bilden die Schnittpunkte der Ellipse mit dem Kreise $(O, \sqrt{a^2 - ab + b^2})$.

(1157) Schlömilch XXIII, 591. XXIV, 338.

39. In einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC sind parallel zu AB zwei Gerade gezogen, und dadurch zwei zu CAB ähnliche Dreiecke CMN und $CM'N'$ entstanden; aus den Abschnitten CM und CN', sowie aus CM' und CN hat man die Rechtecke $MCN'P$ und $M'CNQ$ gebildet, und es ist nun zu untersuchen, welche Relation zwischen CM und CM' stattfinden mufs, wenn P und Q Punkte der aus den Halbachsen CA und CB konstruierten Ellipse sein sollen. — Aufserdem ist die Lage der Sehne PQ zu bestimmen. — Da M willkürlich bleibt, lassen sich nach dem vorigen beliebig viele Paare von Ellipsenpunkten konstruieren.

Lösung: (R. K.). Es ist $PQ \parallel AB$.

(1325) Schlömilch XXV, 513. XXVI, 276.

40. Man kennt die Lage der Achsen einer Ellipse, aber nicht ihre Längen. Wenn nun die excentrischen Anomalieen zweier Punkte dieser Ellipse gegeben sind, wie grofs sind die Anomalieen derjenigen zwei Ellipsenpunkte, deren Normalen durch den Schnittpunkt der in den zwei ersten Punkten gezogenen Normalen gehen? Beispiel. Gegeben $\alpha_1 = 30^0$, $\alpha_2 = 60^0$; gesucht α_3 und α_4.

Lösung: (R.).

(980) Stoll XXI, 429. XXII, 195.

41. In einer Ellipse sollen diejenigen Krümmungskreise bestimmt werden, welche durch das Ellipsencentrum gehen.

Lösung: (R. K.) Die Krümmungsmittelpunkte liegen auf der grofsen Halbachse in der Mitte zwischen Centrum und Scheitel.

(304) Schlömilch XIV, 271. XV, 37.

42. Von dem Brennpunkt einer Ellipse ist ein Strahl gezogen, welcher die Ellipse in P_1, den Hauptkreis in P_2 trifft. Für welchen Strahl sind die in P_1 und P_2 gezogenen Tangenten beider Kurven parallel?

Lösung: (R. K.); (Polar-Koord.). P_2 mufs die Abscisse $x_2 = 0$ oder $x_2 = \frac{1}{2}e$ haben.

(1263) Steckelberg XXV, 115. XXV, 511.

43. 1) In eine gegebene Ellipse soll ein gleichseitiges Sehnensechseck konstruiert werden, wovon zwei Gegenseiten

a) parallel zur grofsen Achse,
b) parallel zur kleinen Achse liegen.

2) Um eine gegebene Ellipse soll ein gleichseitiges Tangentensechseck konstruiert werden, wovon zwei Gegenseiten

a) parallel zur grofsen Achse,
b) parallel zur kleinen Achse liegen.

Lösung: 1) (R. K.) und (G.). 2) (R. K.).
(652) Schlömilch XVIII, 36. XVIII, 439.

44. Eine Ellipse zu konstruieren, welche zwei Kreise mit gegebenen Radien und gegebener Centrale berührt und umschliefst, wenn der Mittelpunkt der Ellipse

a) in den Mittelpunkt des gröfseren Kreises,
b) in einen gegebenen Punkt der Centrale oder ihrer Verlängerung fallen soll.

Lösung: (R. K.).
(767) v. Jettmar XIX, 188. XIX, 586.

45. An eine gegebene Ellipse eine Tangente zu konstruieren, welche durch den unzugänglichen Durchschnittspunkt zweier gegebenen Geraden geht.

Lösung: (G.).
(924) Beyens XXI, 32. XXI, 427.

46. Zwei Ellipsen oder Hyperbeln mit gleichlangen Hauptachsen ($2a$) haben einen Brennpunkt F, einen Punkt P und eine Tangente T gemeinschaftlich; man konstruiere

a) die noch fehlenden Brennpunkte F_1 und F_2,
b) den zweiten gemeinschaftlichen Punkt P' und
c) die zweite gemeinschaftliche Tangente T'.

Lösung: (G.).
(955) Rulf XXI, 280. XXII, 25.

47. Zwei Ellipsen oder Hyperbeln haben gleich lange grofse Achsen ($2a$), einen gemeinschaftlichen Brennpunkt F und zwei gemeinschaftliche Punkte P und P'; man zeichne ihre gemeinschaftlichen Tangenten T und T'.

Lösung: (G.)
(956) Rulf XXI, 280. XXII, 25.

48. Man zeichne die Schnittpunkte zweier Ellipsen, wenn die Brennpunkte der einen immer die Scheitel der kleinen Achse der anderen sind.

Lösung: (R. K.); (P. G.).
(969) Rulf XXI, 355. XXII, 104.

49. Der Ellipsenmittelpunkt sei C, die grofse Halbachse $CA = a$, die kleine $CB = b$; ferner bezeichne D die vierte Ecke des aus CA und CB konstruierten Rechtecks, P irgend einen Ellipsenpunkt, ω dessen excentrische Anomalie (also $x = a \cos \omega$, $y = b \sin \omega$); durch P sei an die Ellipse die Tangente gelegt, welche die verlängerte CA in T, die verlängerte CB in U schneidet; endlich bezeichne V den Durchschnitt von CA mit der durch P gehenden Normale der Ellipse. Man verlangt nun:

a) der Winkel CPV zwischen Radiusvektor und Normale soll ein Minimum sein.

Lösung: (T. R.) und zwar $\omega = 45^0$.

b) Das zwischen die verlängerten Achsen fallende Tangentenstück TU soll ein Minimum werden, also

$$\left(\frac{a}{\cos \omega}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sin \omega}\right)^2 = \text{Min.}$$

Lösung: (R.) $\operatorname{tg} \omega = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

c) Es soll diejenige Normale bestimmt werden, welche am weitesten vom Ellipsenmittelpunkte entfernt ist.

Lösung: (G.) identisch mit b.

(103—105) Schlömilch XI, 34—35. XI, 34—35.

50. Durch einen innerhalb des rechten Winkels XOY gegebenen festen Punkt K lassen sich unendlich viel Ellipsen legen, deren Halbachsen in die Richtungen von OX und OY fallen; welche von diesen Ellipsen hat den kleinsten Flächeninhalt?*)

Lösung: (T. R.) und (R. 2). $a = p\sqrt{2}$, $b = q\sqrt{2}$, wo a und b die Halbachsen einer Ellipse, p und q die Koordinaten von K sind.

(191) Schlömilch XII, 433. XIII, 279.

51. Im Achsenschnitt ABC eines geraden Kegels sei der Winkel BAC oder $\alpha < 30^0$. Um eine Achse, die durch B geht und senkrecht auf dem Achsenschnitt steht, dreht sich eine Ebene, deren Schnittlinie BD mit BA den Winkel ϑ bildet. Bei welcher Gröfse des Winkels ϑ ist der Flächenraum der Schnittellipse ein Maximum und bei welcher ein Minimum? Wie verhält es sich, wenn $\alpha \geqq 30^0$ ist?

Lösung: Vergl. Schellbach: Samml. und Auflös. math. Aufgab. Herausgegeb. von Fischer und Lieber. (R.)

(805) Stoll XIX, 509. XX, 192 (794 statt 805).

---

*) Wird die Aufgabe dahin erweitert, dafs $\sphericalangle XOY$ einen beliebigen Wert γ hat und dafs OX und OY die Richtungen zweier konjugierter Halbdurchmesser sind, so ergeben sich dieselben Werte.

(Kiehl.)

52. Mit Deviation eines Ellipsenpunktes werde der Winkel bezeichnet, welchen die Ellipsentangente dieses Punktes mit der Tangente desjenigen Punktes des Hauptkreises bildet, welcher dieselbe Abscisse hat. Gesucht wird die gröfste Deviation.

Lösung: (R.).

(*572*) Mathesis. XXIV, 29.

53. Vom Mittelpunkt der Ellipse geht ein Strahl aus, welcher die Ellipse in P_1, den Hauptkreis in P_2 trifft. Die Tangenten in P_1 und P_2 bilden einen Winkel φ miteinander. Für welchen Strahl ist $\sphericalangle\, \varphi$ ein Maximum?

Lösung: (G. T. 2). Der gesuchte Strahl ist die Diagonale des Rechtecks, welches durch die Halbachsen der Ellipse bestimmt ist. Vergl. Nr. 42.

(1264) Steckelberg XXV, 115. XXV, 512.

54. Den Inhalt des gröfsten Dreiecks $\varDelta$ zu berechnen, welches durch die Achsen und durch eine Normale der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ gebildet wird.

Lösung: (R. K.). $\varDelta = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4ab}$.

(*537*) Mathesis. XXIV, 190.

---

§ 4. Die Hyperbel.

a. Lehrsätze.*)

1. Bewegt sich eine Hyperbel so, dafs die eine ihrer Asymptoten eine unveränderte Lage behält, so schneiden sich sämtliche Polaren eines festen Punktes in einem Punkte.

Beweis: (R. K. 2); (P. G.).

(213) Budde XIII, 125. XIV, 30.

2. Von einer Hyperbel sind gegeben der Mittelpunkt C, die beiden Asymptoten CL und CL' und ein Punkt D, durch welchen man Parallelen zu CL und CL' zieht, welche CL' in E und CL in F treffen, eine Gerade durch C treffe DE in M und DF in N; konstruiert man nun auf CN den Punkt P so, dafs $CM : CP = CP : CN$, so ist P ein Punkt der Hyperbel.

Beweis: (G. 2); (K. M.), auch mit Hülfe Hamilton'scher Quaternionen ausführbar.

(555) Schlömilch XVI, 593. XVII, 357 und 596.

3. Gegeben eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt O und auf ihr zwei Punkte $P_1\,(\alpha_1, \beta_1)$ und $P_2\,(\alpha_2, \beta_2)$. Durch P_1 und P_2 sind

---

*) Vergl. § 2 Nr. 11 Anmerk. § 3 Nr. 4 Anmerk. § 5 Nr. 1c.

Parallele zu den Asymptoten OO' und OO'' gezogen, welche sich in P_3 (α_3, β_3) und P_4 (α_4, β_4) schneiden. Dann ist zu beweisen, daſs $P_3 P_4$ durch O geht.

Beweis: (R. K.).

(*325*) Journ. spéc. XVIII, 202.

4. Zieht man in einem Viereck eine Parallele zu einer Seite und verbindet die Schnittpunkte derselben mit den beiden anliegenden Seiten mit den Endpunkten der gegenüberliegenden Seite, so sind die Verbindungslinien die Asymptotenrichtungen einer Hyperbel, welche durch die vier Ecken geht.

Beweis: (K. M.), besonderer Fall des Pascal'schen Satzes.

(1060) Rulf XXII, 436. XXIII, 189.

5. Die Seiten eines Dreiecks ABC werden von einer Geraden bez. in den Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten. Liegt diese Gerade so, daſs $\triangle AB_1C_1 = \frac{1}{2} ABC$ ist, so berührt sie eine gewisse Hyperbel; legt man sie so, daſs $\triangle BC_1A_1$ oder $CA_1B_1 = \frac{1}{2} ABC$ ist, so berührt sie jedesmal eine andere Hyperbel. Diese drei Hyperbeln berühren sich untereinander in den Mitten der Mittellinien des Dreiecks ABC.

Beweis: (G.).

(1327) Stoll XXV, 513. XXVI, 341.

6. Sind α_1 und a_2 die Schnittpunkte der ersten in dem vorigen Satze erwähnten Hyperbeln mit BC, β_1 und β_2 die der zweiten mit CA, γ_1 und γ_2 die der dritten mit AB, so sind

a) die halbmondförmigen Räume $\alpha_1 \mathfrak{b}\mathfrak{c}\alpha_2\alpha_1$, $\beta_1\mathfrak{c}\mathfrak{a}\beta_2\beta_1$, $\gamma_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}\gamma_2\gamma_1$, die von je einer Seite und einer Hyperbel begrenzt werden, flächengleich;

b) die sechs gemischtlinigen Dreiecke $A\mathfrak{a}\beta_2$, $A\mathfrak{a}\gamma_1$, $B\mathfrak{b}\gamma_2$, $B\mathfrak{b}\alpha_1$, $C\mathfrak{c}\alpha_2$, $C\mathfrak{c}\beta_1$, die von je zwei Seiten und einem Hyperbelbogen begrenzt werden, flächengleich;

c) wenn S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist, so sind die drei gemischtlinigen Dreiecke $S\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $S\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $S\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, die von je zwei Mittellinien und einer Hyperbel begrenzt werden, flächengleich.

Beweis: (K. M.).

(1328) Stoll XXV, 513. XXVI, 341.

7. $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ seien die Ecken eines vollständigen Vierseits. M_a, M_b, M_c seien die resp. Mitten zwischen A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Dann schneiden sich die drei Hyperbeln, welche durch $A_1A_2B_1B_2M_c$, $A_1A_2C_1C_2M_b$, $B_1B_2C_1C_2M_a$ gehen, in einem Punkte der unendlich fernen Geraden.

Beweis: (K. M.).

(724) Beyel XVIII, 505. XIX, 271.

8. Durch die rechtwinkligen Koordinaten $OA = a$, $AB = b$ ist ein Punkt B bestimmt und über OB als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben; wird nun diejenige gleichseitige Hyperbel konstruiert, welche durch B geht und die Koordinatenachsen zu Asymptoten hat, so schneiden sich Kreis und Hyperbel in einem Punkte D, dessen Koordinaten sind:

$$OC = \sqrt[3]{ab^2} \text{ und } CD = \sqrt[3]{a^2b}.$$

Beweis: (R. K.).

(651) Kukujay XVIII, 37. XVIII, 441.

9. Beschreibt man um dasselbe Centrum eine Schar von Ellipsen, deren Achsen eine konstante Quadratensumme haben, sowie eine Schar von Hyperbeln, deren Achsen dieselbe konstante Quadratendifferenz haben, so berühren die Polaren eines festen Punktes in Bezug auf diese Kurven ein und dieselbe Parabel.

Beweis: (R. K.).

(150) Budde XII, 111. XII, 111 und 431.

10. Aus denselben Halbachsen ist sowohl eine Ellipse als eine Hyperbel konstruiert, wobei die Hauptscheitel A und A_1 beider Kurven zusammenfallen mögen; zieht man durch A eine beliebige Gerade, welche die Ellipse in P, die Hyperbel in Q schneidet, und fällt auf die Hauptachse die Senkrechten PM und QN, so ist NP Tangente an der Ellipse, MQ Tangente an der Hyperbel, und der Durchschnitt von NP und MQ liegt auf der festen Geraden, welche in A_1 normal zur Hauptachse ist.

Beweis: (R. K.); (G.).

(160) Schlömilch XII, 202. XIII, 32.

11. Es sei MN die grofse, VW die kleine Achse einer Ellipse E und einer Hyperbel H, und zugleich sei MN die kleine, VW die grofse Achse einer zweiten Hyperbel H_1. Die Richtung MN werde horizontal gedacht, so dafs sie die Figur in eine obere und eine untere Hälfte teilt. Aus M und N ziehe man Tangenten bis zum Durchschnitt P resp. Q mit dem unteren Zweige der Hyperbel H_1, verbinde P und Q mit einem beliebigen Kurvenpunkte X in der oberen Hälfte der Figur und bezeichne die Durchschnitte dieser Verbindungslinien mit der Richtung MN durch p und q. Dann ist $pq^2 = 2\,Mp \cdot Nq$, wenn X in E oder H, $pq^2 = Mp^2 + Nq^2$, wenn X in H_1 liegt. (Einen speziellen Fall für die erste der beiden Gleichungen liefert der sogenannte Fermat'sche Satz.)

Beweis: (R. K.).

(424) Gerlach XV, 441. XVI, 122.

12. Die Punkte, in welchen eine Tangente einer Ellipse oder Hyperbel die Kurve berührt und die Nebenachse schneidet, liegen mit den beiden Brennpunkten auf einem Kreise.*)

Beweis: (G. 3); (R. K. 2); (R.).

(855) Meyer XX, 196. XX, 589.

13. Jeder Kreiskegel, dessen Achse gleich dem Radius der Basis ist, wird von allen auf der Basis senkrecht stehenden Ebenen in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten.**)

Beweis: (R. K.); (G.).

(134) Schlömilch XI, 434. XII, 264.

14. Gegeben sind zwei gleichseitige Hyperbeln, welche dieselben Asymptoten haben. Ein veränderliches Dreieck PQR bewegt sich so, dafs P stets auf der einen Hyperbel liegt, Q und R auf der andern liegen und dafs PQ und PR parallel mit den Asymptoten sind. a) Es soll bewiesen werden, dafs der Inhalt $\triangle$ des Dreiecks PQR allein durch die Halbachsen der gegebenen Hyperbeln ausgedrückt werden kann.

Beweis: (R. K.).

(*576* a) Nyt Tidsskrift. XXIV, 191.

15. Beschreibt man mit einem Durchmesser PQ einer gleichseitigen Hyperbel um P einen Kreis, so schneidet dieser die Hyperbel in A, B und C so, dafs $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Beweis: (G.).

(*324*) Educ. Times. XVIII, 201.

16. In jeder gleichseitigen Hyperbel erscheinen die Gegenseiten eines eingeschriebenen Parallelogramms $ABCD$ von jedem Punkte O der Kurve aus unter gleichen Winkeln, wenn O aufserhalb des Parallelogramms liegt; liegt O innerhalb, so ergänzen sie sich zu 180^0.

Beweis: (P. G.); (R. K.).

(189) Stammer XII, 432. XIII, 278.

17. Der Winkel zweier gleichseitigen koncentrischen Hyperbeln ist doppelt so grofs wie der Winkel, den ihre Asymptoten bilden.

Beweis: (G.).

(*218*) Nouv. Ann. XV, 364.

---

*) Dieser Satz ist ein spezieller Fall des Satzes: Sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bezüglich eines Kegelschnitts konjugiert, während die Hypotenuse in einer Achse liegt, so geht der Umkreis des Dreiecks durch die reellen oder imaginären Brennpunkte der andern Achse. Vergl. Reye, Geom. d. Lage.

**) Der Satz enthält die Lösung der Aufgabe, einen gegebenen Horizontalkreis auf irgend eine Vertikalebene perspektivisch so zu projizieren, dafs die Projektion eine gleichseitige Hyperbel wird.

(Schlömilch.)

18. Ein Durchmesser AB einer gleichseitigen Hyperbel wird von einem beliebigen Hyperbelpunkt aus unter einem Winkel gesehen, dessen Halbierungslinien parallel den Asymptoten sind.

Beweis: (R. K.).

(575) Nyt Tidsskrift. XXIV, 191.

19. Stehen zwei Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel auf einander senkrecht, so ist das Produkt aus den Abschnitten der einen gleich dem negativen Produkt aus den Abschnitten der anderen.

Beweis: (G.).

(452) Stammer XV, 614. XVI, 271.

20. Durchschneidet man die beiden Zweige einer gleichseitigen Hyperbel mit einer Schar paralleler Geraden und konstruiert über den entstandenen Hyperbelsehnen als Durchmessern Kreise, so gehen alle diese Kreise durch die Endpunkte desjenigen Durchmessers der Hyperbel, dessen konjugierter senkrecht zu den parallelen Geraden steht.

Beweis: (R. K. 2).

(896) Meyer XX, 511. XXI, 272.

21. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem XOY sei auf der X-Achse $OC = r$ der Radius des zu teilenden Kreises und A ein Punkt mit den Koordinaten $\frac{1}{2}r$ und $\frac{3}{4}r$. Der Kreis mit OA um O und die gleichseitige Hyperbel, welche A zu einem Hauptscheitel hat und deren Asymptoten OY und die Parallele im Abstande $OO' = \frac{1}{4}r$ zu OX sind, schneiden sich noch im Punkte B, dessen Koordinaten positiv sind; schneidet die verlängerte Ordinate von B den ursprünglichen Kreis noch in D, so ist Bogen $CD = \frac{1}{7} \cdot 2\pi r$.

Beweis: (R. K.).

(687) Schlömilch XVIII, 278. XIX, 29.

b. Aufgaben.*)

22. Ein Punkt F ist durch seine Koordinaten α, β gegeben, welche auf die beiden sich unter dem Winkel ϑ schneidenden Achsen OX und OY bezogen sind; man soll die Gleichung der Hyperbel finden, welche durch den Anfangspunkt O geht, den Punkt F zu einem ihrer Brennpunkte hat und deren Asymptoten den Achsen OX und OY parallel sind. Vier Hyperbeln entsprechen der Bedingung. Die Gleichung einer jeden von ihnen ist von der Form $xy - px - qy = 0$; es handelt sich darum,

*) Vgl. § 3 Nr. 47; 48. § 5 Nr. 25c.

die 4 Paare von Werten von p und q zu finden, ausgedrückt in Funktionen der gegebenen Werte α, β und ϑ.
(23_1) Nouv. Ann. X, 111—112. —

23. Eine Gerade schneide eine gegebene Hyperbel in den Punkten P, Q und die Asymptoten der Kurve in U, V; es soll die Bedingung ermittelt werden, unter welcher P, Q, U, V harmonisch liegen.
Lösung: (R.); (H. B.) und (P. G.).
(844) Schlömilch XX, 115. XX, 507.

24. Es sollen diejenigen Hyperbelpunkte bestimmt werden, deren Krümmungskreise die Asymptoten berühren.
Lösung: (R. K.).
(925) Schlömilch XXI, 32. XXI, 427.

25. Zwei Hyperbeln haben einen Brennpunkt F und eine Asymptote A gemeinschaftlich, außerdem gleich lange reelle Achsen $2a$; man zeichne ihre Schnittpunkte.
Lösung: (G.).
(934) Rulf XXI, 115. XXI, 517.

26. Eine Hyperbel zu konstruieren, wenn gegeben die Lage der reellen Achse, die Länge der halben imaginären Achse und
1) zwei Punkte der Hyperbel. Lösung: (R. K. 3); (G. 2) und (R.),
2) eine Tangente mit ihrem Berührungspunkt. Lösung: (G. 5) und (R. K. 2),
3) eine Asymptote. Lösung: (R. K.),
4) eine Scheiteltangente und ein Punkt der Hyperbel. Lösung: (G. 2); (R. K.) und (R.).
5) eine Scheiteltangente und die Bedingung, daß die Hyperbel gleichseitig sein soll. Lösung (G.).
(260—264) Rulf XIV, 33. XIV, 346—349.

27. Anzugeben, welche Schnitte eines beliebigen Kreiskegels gleichseitige Hyperbeln werden.
Lösung: (R. K. 2); (R. 2); (G. 2).
(182) v. Lühmann XII, 363. XIII, 200.

28. Eine gleichseitige Hyperbel zu konstruieren, wenn eine der beiden Asymptoten, eine Tangente und ein Punkt P der Hyperbel gegeben sind. (Bei der Lösung wird folgender leicht zu beweisender Satz benutzt: Fällt man von einem beliebigen Punkt einer gleichseitigen Hyperbel auf eine Tangente und auf die nach ihrem Berührungspunkt vom Mittelpunkt gezogene Gerade

Senkrechte, so sind die Fufspunkte derselben vom Mittelpunkt gleich weit entfernt.)

Lösung: (G.).

(*323*) Nouv. Ann. XVIII, 201.

29. Eine gleichseitige Hyperbel zu konstruieren, von welcher man den Mittelpunkt M, eine Tangente T und einen Punkt P kennt. (Mit Benutzung des in der vorigen Aufgabe angeführten Satzes.)

Lösung: (G.).

(766) Rulf XIX, 188. XIX, 586.

---

§ 5. Über beliebige Kegelschnitte.

a. Lehrsätze.

1. Durch einen Punkt P sind an eine Kurve zweiten Grades Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte Q und R heifsen mögen, aufserdem sei P_1 derjenige Kurvenpunkt, in welchem die Tangente an der Kurve parallel zu QR liegt; bezeichnet man nun die Koordinaten von P mit u, v, die Koordinaten von P_1 mit u_1, v_1, die Radienvectoren von P und P_1 mit r und r_1, endlich die Fläche des mondförmigen, zwischen der Berührungssehne QR und dem Kurvenbogen QP_1R enthaltenen Segments mit S, so hat man folgende Formeln und Sätze:

a) Für die Parabel, deren Gleichung $x^2 - cy = 0$ sein möge, ist $S = \frac{4}{3}\sqrt{c(v_1 - v)^3}$. Bewegt sich der Pol P auf einer coaxialen kongruenten Parabel, deren Scheitel um k tiefer liegt, so behält S den konstanten Wert $\frac{4}{3}\sqrt{ck^3}$.

b) Für die Ellipse, deren Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ sein möge, ergiebt sich, wenn S das kleinere der möglichen Segmente bedeutet, $S = \left\{\arccos\frac{r_1}{r} - \frac{r_1}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2}\right\} ab$. Diese Fläche bleibt ungeändert, wenn sich der Pol auf einer koncentrischen und ähnlichen Ellipse fortbewegt.

c) Bei der Hyperbel, deren Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ sein möge, mufs der Pol zwischen der Kurve und ihren Asymptoten enthalten sein; es ist dann

$$S = \left\{\frac{r_1}{r}\sqrt{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 - 1} - \log\left[\frac{r_1}{r} + \sqrt{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 - 1}\right]\right\} ab.$$

Auch diese Fläche ändert sich nicht, wenn der Pol auf einer koncentrischen und ähnlichen Hyperbel fortrückt.

(70_1) Schlömilch IX, 436—437. —

2. Haben zwei Kegelschnitte dieselbe Leitlinie, so liegen deren vier gemeinsame Punkte auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungslinie der zu der Leitlinie gehörenden Brennpunkte liegt. (Verallgemeinerung von § 2 Nr. 16.)

Beweis: (G.).

(602) SPORER XVII, 288. XVIII, 34.

3. Haben zwei Kegelschnitte denselben Brennpunkt, so liegen die vier Schnittpunkte zweimal zu zwei mit dem Schnittpunkt der beiden zu dem Brennpunkt gehörenden Leitlinien in gerader Linie.

Beweis: (G.).

(603) SPORER XVII, 288. XVIII, 34.

4. Es soll folgende Eigenschaft zweier Kegelschnitte bewiesen werden: Von einem Kegelschnitt sei F ein Brennpunkt, FG der Abstand des letzteren von der nächsten Direktrix und FH der Halbparameter; ein zweiter Kegelschnitt besitze denselben Brennpunkt, dagegen FG' und FH' statt der vorigen FG und FH; beide Kurven schneiden sich in zwei, symmetrisch zu GG' liegenden Punkten P und Q. Diese lassen sich leicht mittels einer Geraden und eines Kreises konstruieren. Ist nämlich J der Durchschnitt der Geraden GH und $G'H'$, und JK die Entfernung des Punktes J von GG', so gehen die Gerade JK und der aus F mit dem Radius JK beschriebene Kreis gleichfalls durch P und Q.

Beweis: (G.); (R. K.).

(1128) SCHLÖMILCH XXIII, 352. XXIV, 100.

5. Die zwei Geraden, welche in einem Punkte P eines Kegelschnitts den Winkel zwischen der Tangente PT und dem Durchmesser PM halbieren, schneiden aus dem Kegelschnitt zwei Punkte A und B, deren Verbindungslinie AB zu der Tangente PT parallel ist.*)

Beweis: (H. B.) und (K.).

(751) BEYEL XIX, 97. XIX, 502.

6. Bezeichnet P denjenigen Punkt eines Kegelschnitts, dessen Normale die Hauptachse unter dem Winkel von 45^0 und nachher

---

*) Zusätze: 1) Schneidet AB den Durchmesser PM in C, so wird AB durch C halbiert.

2) Durch den Fufspunkt der Senkrechten von P auf AB gehen die Hypotenusen aller der Kurve eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecke, welche P als gemeinsamen Scheitelpunkt des rechten Winkels haben. (MEYER.)

Verallgemeinerung: Wenn man den Winkel zwischen Durchmesser und Tangente harmonisch teilt, so ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte jener Teilungslinien mit dem Kegelschnitt parallel der Tangente. (FUHRMANN.)

die Kurve zum zweiten Mal in Q schneidet, so ist der Mittelpunkt der Sehne PQ zugleich der Krümmungsmittelpunkt für P.

Beweis: (R. K.).

(1034) Schlömilch XXII, 274. XXIII, 41.

7. Durch einen Kegelschnittspunkt O sind zwei aufeinander senkrechte Gerade gelegt, welche die Kurve in den Punkten P und Q schneiden. Dreht sich nun der rechte Winkel POQ um O, so dreht sich die Hypotenuse PQ um einen festen Punkt M, welcher auf der zu O gehörenden Normale des Kegelschnitts liegt. Bezeichnet ferner N den zweiten Durchschnitt der Normale OM mit der Kurve, so ist OM gleich dem harmonischen Mittel zwischen der Hälfte der Sehne ON und dem Krümmungshalbmesser, welcher dem Punkte O entspricht.

Beweis: (R. K.).

(1168) Schlömilch XXIV, 23. XXIV, 447.

8. Wird durch einen beliebigen Kegelschnittspunkt P die Normale gelegt, so begegnet diese der Kurve zum zweiten Mal in einem Punkte Q; die zu P und Q gehörenden Krümmungsradien mögen p und q heifsen; es gilt dann die einfache Relation $\frac{p}{q} = (\cos(p, q))^3$, worin (p, q) den Winkel zwischen beiden Krümmungshalbmessern bezeichnet.

Beweis: (R.).

(1174) Schlömilch XXIV, 104. XXIV, 452.

9. Einem beliebigen Kegelschnitte ist ein Dreieck einbeschrieben, dessen Seiten BC, CA, AB eine sonst noch vorhandene Gerade d in den Punkten A_1, B_1, C_1 treffen; zu den drei Punkten A_1, B, C ist der vierte harmonische Punkt A_0 konstruiert, ebenso B_0 zu B_1, C, A und C_0 zu C_1, A, B; von den Punkten A_0, B_0, C_0 sind Gerade nach dem Punkte D gezogen, welcher als Pol der Polare d entspricht, und es seien L, M, N die Durchschnitte von A_0D, B_0D, C_0D mit d. Wird nun ein beliebiger Punkt P des Kegelschnitts mit L, M, N verbunden, und sind U, V, W die Durchschnitte von LP und BC, MP und CA, NP und AB, so liegen die drei Punkte U, V, W in einer Geraden.

Falls die Polare d unendlich weit verschoben wird, verwandeln sich A_0, B_0, C_0 in die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB; D wird der Mittelpunkt des Kegelschnitts und es ist dann $PU \parallel A_0D$, $PV \parallel B_0D$, $PW \parallel C_0D$.

Noch spezieller wird der Satz, wenn man für den Kegelschnitt einen Kreis nimmt; es ergiebt sich dann die von Gaufs bemerkte Eigenschaft des Kreises, dafs die rechtwinkligen Projektionen eines seiner Punkte auf die Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks in einer Geraden liegen.

Nach dem Reciprocitätsgesetze entspricht dem allgemeinen Satze ein Korrelat, welches sich auf ein umgeschriebenes Dreieck bezieht, dessen Ecken mit irgend einem Punkte D geradlinig verbunden sind u. s. w. Läfst man nachher D unendlich weit wegrücken und den Kegelschnitt zu einem Kreise werden, so gelangt man zu dem Korrelate des Gaufs'schen Satzes, welches jedoch insofern weniger einfach als letzterer ist, als es aufser der vierten willkürlichen Kreistangente noch eine willkürliche Richtung enthält.

(85) Schlömilch X, 350. —

10. Ist ABC ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf einen Kegelschnitt, so giebt es unendlich viele Dreiecke $a\ b\ c$, welche dem Dreieck ABC umgeschrieben sind und deren Ecken A_1, B_1, C_1 auf dem Kegelschnitt liegen. Jedes dieser Dreiecke ist zum Dreieck ABC perspektivisch und je ein Punkt des Kegelschnittes ist Projektionscentrum.

Beweis: Vergl. Gallenkamp: Synth. Geom. 2. Abt. § 19, 3, A. und Steiner-Schröter: Theorie d. Kegelschn. § 23 p. 100 u. § 27 p. 123. (K. M.).

(699) Beyel XVIII, 357. XIX, 95.

11. Ein Kegelschnitt berühre die Seiten eines Dreiecks. Sind P, P' die Brennpunkte, so ergiebt sich die Lage des Berührungspunktes D_a auf der Seite BC vermittels der Proportion

$$BD_a : CD_a = b \cdot BP \cdot BP' : c \cdot CP \cdot CP'.$$

Beweis: (G.); (G. T. 2).

(885) Emmerich XX, 434. XXI, 188.

12. Diejenigen drei Punkte auf den Seiten eines Dreiecks, welche harmonisch konjugiert sind zu den Fufspunkten der durch einen beliebigen Punkt P gehenden Ecktransversalen, liegen auf einer geraden Linie, welche man die Harmonikale des Punktes P nennt.

a) Die Harmonikalen aller Punkte eines um das Dreieck beschriebenen Kegelschnitts schneiden sich in einem Punkte. Die Harmonikalen aller Punkte des Umkreises z. B. schneiden sich im Grebe'schen Punkte.

b) Die Harmonikalen aller Punkte einer geraden Linie umhüllen einen in das Dreieck beschriebenen Kegelschnitt; ist z. B. die gegebene Gerade unendlich fern, so berührt dieser Kegelschnitt die Seiten des Dreiecks in ihren Mittelpunkten.*)

Beweis: a) und b) (K. M.); P. G.).

(949) Stoll XXI, 279. XXII, 20.

*) Vergl. E § 9 Nr. 27a. Bewegt sich P auf einem Kegelschnitt, der nur durch zwei Eckpunkte des Dreiecks geht, so umhüllt die Harmonikale einen Kegelschnitt.

13. (Im Anschlufs an Nr. 12.) Die Harmonikalen aller Punkte der um ein Dreieck beschriebenen Ellipse kleinsten Flächeninhaltes schneiden sich im Schwerpunkt des Dreiecks.
Beweis: (K. M.); (H. B.)
(1055) v. JETTMAR XXII, 435. XXIII, 185.

14. Beschreibt man um das Höhenfufspunktdreieck von ABC irgend einen Kegelschnitt, so schneidet derselbe jede Seite von ABC und den nicht anliegenden Höhenabschnitt in Punkten, deren Verbindungslinien sich in einem Punkte P schneiden, und die Tangenten in diesen Punktenpaaren gehen mit je einer Seite des Höhenfufspunktdreiecks durch einen Punkt. Die drei so erhaltenen Punkte liegen auf einer Geraden.*)
Beweis: (K. M.); (H. B.); (P. G.).
(952) BÜCKING XXI, 280. XXII, 22.

15. (Im Anschlufs an den vorigen Satz.) In der Ebene eines Dreiecks ABC sei ein Punkt P gegeben, durch den die Ecktransversalen gezogen sind, welche die Seiten bezüglich in den Punkten A', B', C' treffen. Ein durch A', B', C' gelegter Kegelschnitt schneide die Seiten noch in den Punkten A'', B'', C'', die Transversalen in den Punkten α', β', γ' und die Geraden AA'', BB'', CC'' in den Punkten α'', β'', γ''. Dann lassen sich folgende Sätze beweisen:

a) AA'', BB'', CC'' schneiden sich in einem Punkte P'.
Beweis: (K. M.); (H. B.); (G.).

b) Die Geraden $\alpha'A''$, $\beta'B''$, $\gamma'C''$ schneiden sich in einem Punkte Q und $\alpha''A'$, $\beta''B'$, $\gamma''C'$ in einem Punkte Q'; Q und Q' liegen auf PP'. Das Schnittverhältnis soll angegeben werden.
Beweis: (K. M.); (P. G.).

c) Auf PP' liegen noch die Schnittpunkte folgender sechs Linienpaare: $B''C'$ und $B'C''$, $C''A'$ und $C'A''$, $A''B'$ und $A'B''$, $\beta''\gamma'$ und $\beta'\gamma''$, $\gamma''\alpha'$ und $\gamma'\alpha''$, $\alpha''\beta'$ und $\alpha'\beta''$.
Beweis: (K. M.); (P. G.).

d) Die Tangenten in A'' und α' schneiden sich in einem Punkte R_1' der Geraden $B'C'$; ähnliche Punkte sind R_2' und R_3'. Die Tangenten in A' und α'' schneiden sich in einem Punkte R_1'' der Geraden $B''C''$; ähnliche Punkte sind R_2'' und R_3''.
Beweis: (K. M.); (H. B.).

e) Die Punkte R_1', R_2', R_3' liegen auf einer Geraden, welche sowohl die Kollineationsachse der Dreiecke ABC und $\alpha'\beta'\gamma'$ als

*) Trifft der um das Höhenfufspunktdreieck $A_1B_1C_1$ beschriebene Kegelschnitt BC in A_2, CA in B_2, AB in C_2, so schneiden sich AA_2, BB_2, CC_2 in einem Punkte P_1, dessen Harmonikale die obige Gerade ist; dieselbe ist auch die Pascal'sche Linie des Sechsecks $A_2A_1\ B_2B_1\ C_2C_1$ und die Kollineationsachse der Dreiecke ABC und $A_3B_3C_3$ (der Kegelschnitt um $A_1B_1C_1$ schneide AA_1 in A_3, BB_1 in B_3, CC_1 in C_3).

auch die Harmonikale von P' ist. Die Punkte R_1'', R_2'', R_3'' liegen auf einer Geraden, welche sowohl die Kollineationsachse der Dreiecke ABC und $\alpha''\beta''\gamma''$ als auch die Harmonikale von P ist.

Beweis: (K. M.): (H. B.).

f) Die Harmonikale von P ist die Polare von Q' und die Harmonikale von P' die Polare von Q, so daſs die Harmonikalen sich im Pol von QQ' bez. PP' schneiden.

Beweis: (K. M.); (H. B.).

(1066—1071) Stoll XXII, 511. XXIII, 261—265.

16. Die Halbierungslinie der Diagonalen eines Vierecks ist der Ort für das Centrum eines ihm eingeschriebenen Kegelschnittes.*)

Beweis: Vergl. Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica lib. I Lemma 25 Coroll. 3* und Cremona: Projekt. Geometrie Nr. 288, sowie Schröter: Theorie d. Kegelschnitte. 1. Aufl. § 48.

(530) Artzt XVI, 429. XVII, 196.

17. Die drei Geraden, welche je zwei Gegenpunkte des zwei Kurven II. O. gemeinsamen Tangentenvierecks verbinden, bilden das beiden Kurven gemeinschaftliche Poldreieck.

Beweis: (G.).

(828) Meyer XX, 32. XX, 424.

18. Schneiden sich in einem Viereck die Diagonalen senkrecht, so sind die Seiten desselben Tangenten einer Kurve II. O. welche den Schnittpunkt der Diagonalen zu einem Brennpunkt hat.**)

Beweis: (G. 2), auch durch (P. G.) ausführbar.

(874) Meyer XX, 350. XXI, 110.

19. Die Verbindungslinien der drei Punktepaare, in welchen ein dem Diagonaldreieck eines vollständigen Vierecks umgeschriebener Kegelschnitt die drei Seitenpaare desselben zum anderen Male schneidet, gehen durch einen und denselben Punkt.***)

Beweis: (P. G.); (K. M.).

(888) Kober XX, 434. XXI, 191,

---

*) Mit Hülfe dieses Satzes läſst sich leicht der Mittelpunkt des einem Fünfeck eingeschriebenen Kegelschnitts finden.

**) In einem Kreisviereck mit aufeinander senkrecht stehenden Diagonalen ist der Schnittpunkt der Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten der Mittelpunkt, der Mittelpunkt des Umkreises und der Schnittpunkt der Diagonalen sind die Brennpunkte und der Radius des Kreises der acht Punkte (Fuſspunkte der vom Diagonalenschnittpunkt auf die Seiten gefällten Senkrechten und Durchschnittspunkte der letzteren mit den Gegenseiten) ist die halbe groſse Achse eines dem Kreisviereck eingeschriebenen centrischen Kegelschnitts. (Stoll.)

***) Wenn man durch die Diagonalenschnittpunkte eines vollständigen Vierecks einen Kreis legt und bestimmt die sechs auf den Seiten

20. Zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 berühren sich in einem Punkte A und schneiden sich in den Punkten B und C. Legt man nun durch ABC einen beliebigen Kegelschnitt K, welcher K_1 noch in M, K_2 in N trifft, verbindet man ferner einen beliebigen Punkt P von K mit M und N, so liegen die zweiten Schnittpunkte der PM mit $K_1(M_1)$ und der PN mit $K_2(N_1)$ mit dem Berührungspunkt A auf einer Geraden.

Beweis: (P. G.).

(707) Kokott XVIII, 446. XIX, 183.

21. Es seien K_1 und K_2 zwei beliebige Kegelschnitte und p und G ein beiden Kegelschnitten gemeinsames Paar Pol und Polare. Ist nun X eine beliebige Gerade und X_1 die Verbindungslinie der beiden Pole von X in Bezug auf K_1 und K_2, so schneiden X und X_1 die Gerade G in Punktpaaren $\alpha\alpha_1$ einer Involution, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten an K_1 und K_2 sind.*)

Beweis: (P. G.); auch durch (K. M.) ausführbar.

(750) Drasch XIX, 97. XIX, 502.

22. Vier Kegelschnitte mit den Mittelpunkten A, B, C, D, von denen jeder die Mittelpunkte der drei andern zu je einem Tripel konjugierter Punkte hat, sind ähnlich gelegen und die reciproken Werte der Quadrate der Hauptachsen haben die algebraische Summe Null.

Beweis: (H. B.).

(734) Kober XVIII, 602. XIX, 344.

23. Ein Büschel von Kegelschnitten, die durch dieselben vier Punkte a, b, c, d gehen, werde von einem festen Kegelschnitt geschnitten, der zwei dieser Punkte a und b mit jenen gemeinsam hat und jeden von ihnen in je zwei neuen Punkten f und g, f' und g', f'' und g'' u. s. w. schneidet; dann gehen die Verbindungslinien fg, $f'g'$, $f''g''$ u. s. w. durch einen und denselben Punkt. Der Satz ist nicht umkehrbar.

Beweis: (P. G.); auch durch (K. M.) ausführbar.

(868) Stoll XX, 275. XXI, 30.

---

liegenden durch je zwei Eckpunkte vom Kreis harmonisch getrennten Punkte, so liegen diese auf einer Geraden. Diese Gerade ist Durchmesser, wenn das Viereck ein Kreisviereck ist.

*) Sind AB, CD, O Achsen und Mittelpunkt eines Kegelschnitts K und a, b die Schnittpunkte von AB mit einem beliebigen koncentrischen Kreise, so findet man den auf CD liegenden Schnittpunkt d gemeinsamer Tangenten an K und den Kreis, indem man von b aus mit OB die Gerade CD in P schneidet und von A auf PF (F Brennpunkt auf AB) die Senkrechte fällt, welche CD in d schneidet. (Drasch.)

24. Hat ein Kegel zur Basis einen Kegelschnitt, dessen Hauptachse mit der Spitze eine zur Grundfläche senkrechte Ebene bildet, und schneidet man denselben mit einer zur letztgenannten gleichfalls senkrechten Ebene so, daſs diese und die Grundfläche mit der Verbindungslinie des einen Brennpunktes der letzteren mit der Kegelspitze gleiche Ergänzungswinkel bildet, so ist die Schnittkurve ein Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt auf jener Verbindungslinie gelegen ist, während die zugehörige Leitlinie die Schnittlinie der Schnittfläche mit der durch die Spitze und die Leitlinie des Grundkegelschnitts gelegten Ebene ist.

Beweis: (G.) und (P. G.).

(98) Weinmeister XI, 33. XI, 363.

25. Schneidet man einen schiefen Kreiskegel senkrecht zum Hauptachsenschnitt so, daſs die Schnittebene und die Grundfläche mit der Verbindungslinie des Mittelpunktes der letzteren mit der Kegelspitze gleiche Ergänzungswinkel bildet, so ist die Schnittkurve ein Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt auf jener Verbindungslinie gelegen ist, während die zugehörige Leitlinie die Schnittlinie der Schnittfläche der durch die Spitze zur Grundfläche parallel gelegten Ebene ist.

Beweis: Besonderer Fall des vorigen Satzes.

(97) Weinmeister XI, 33. XI, 364.

b. Aufgaben.

26. Von einem Kegelschnitt sind die Punkte P_1 und P_2 gegeben; man sucht den Berührungspunkt P_3 derjenigen Tangente, welche parallel zur Sehne P_1P_2 liegt.

a) Bei der Parabel $ky = x^2$ ist $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

b) Werden in der Ellipse die Koordinaten mittelst der Formeln $x = a\cos\omega$, $y = b\sin\omega$ durch die excentrische Anomalie ausgedrückt, so ist $\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$.

c) Bei der Hyperbel ist P_3 nur dann möglich, wenn P_1 und P_2 auf demselben Hyperbelzweige liegen; ersetzt man die Gleichung der Kurve durch die beiden Gleichungen $x = a\frac{1+t^2}{2t}$, $y = b\frac{1-t^2}{2t}$, so erhält man $t_3 = \sqrt{t_1 t_2}$.

Lösung: a) (G.); (R. K.); b) (R. K.); (P. G.). c) (R. K.).

(853) Schlömilch XX, 196. XX, 587.

27. Durch den Kegelschnittspunkt P ist die zugehörige Normale gelegt, welche der Kurve zum zweiten Mal in Q begegnet; es soll nun P so bestimmt werden, daſs der entsprechende

Krümmungsmittelpunkt auf den Halbierungspunkt der Sehne PQ fällt.

Lösung: (R. K.).

(954) SCHLÖMILCH XXI, 280. XXII, 24.

28. In Beziehung auf rechtwinklige Koordinaten sei die Gleichung eines Kegelschnittes $2x^2 + \alpha\beta y^2 - 2\beta xy - 2nx = 0$, wobei α und β als Cotangenten gewisser Winkel φ und ψ betrachtet werden können. Man soll ermitteln: die Lage des Koordinatensystems gegen die Kurve und die geometrischen Bedeutungen von φ, ψ, n und $\frac{n}{\alpha\beta}$.

Lösung: (G.) in Verbindung mit (R.).

(1189) SCHLÖMILCH XXIV, 190. XXIV, 606.

29. Gegeben ist ein imaginäres Viereck mit imaginären Diagonalen, dargestellt durch einen beliebigen Kegelschnitt K und eine in der Ebene desselben liegende elliptische Strahleninvolution mit dem Träger C; ferner eine reelle Gerade G, welche die Vierecksdiagonalen etwa in a und b schneiden möge. Man konstruiere die Verbindungslinie G_1 der Punkte a_1 und b_1, welche von a und b durch die imaginären Gegenecken des Vierecks harmonisch getrennt sind.

Lösung: (P. G.).

(735) DRASCH XVIII, 602. XIX, 345.

30. Sechs gegebene Ebenen sollen von einer siebenten in einem Tangentensechsseit eines Kegelschnittes geschnitten werden.

Beweis: Tetraeder-Koordinaten. (P. G.)

(207) WEINMEISTER XIII, 34. XIII, 362.

31. Einen Kegelschnitt zu konstruieren, wenn gegeben sind der Brennpunkt, eine Tangente, ein Durchmesser und die Richtung des zu letzterem konjugierten Durchmessers.

Lösung: (H. B.).

(126) CARDINAAL XI, 433. XII, 198.

32. Von einem Kegelschnitt sind ein Brennpunkt und die Lage der Hauptachse, sowie die Endpunkte einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne gegeben; man soll den anderen Brennpunkt und die Längen der Achsen bestimmen.

Lösung: (G. 3); (R.); (K. M.).

(492) FUHRMANN XVI, 205. XVI, 500.

33. In ein Segment irgend eines Kegelschnittes das gröfste Trapez einzuschreiben. Die Sehne, welche das Segment begrenzt, soll eine der Grundlinien des Trapezes werden.

(37_1) Nouv. Ann. X, 115. —

34. In einen Kegelschnitt, der einen Mittelpunkt hat, das gröfste Viereck einzuschreiben, welches zu einer seiner Seiten einen gegebenen Durchmesser hat, und zur entgegengesetzten Seite eine Sehne parallel einer gegebenen Geraden.

(38_1) Nouv. Ann. X, 115. —

II. Kurven höherer Ordnung.*)

1. Gegeben $\triangle A\alpha B \sim B\beta C \sim C\gamma D \cdots$, wobei für die homologen Seiten die Proportion gilt: $AB : BC = BC : CD = CD : DE \cdots\cdots$ Legt man nun die Dreiecke so aneinander, dafs sich $B\beta$ mit einem Teile von $B\alpha$ deckt, $C\gamma$ mit einem Teile von $C\beta$ u. s. w., so liegen die Punkte A, B, C, D, $\cdots$ auf einer Spirale, deren asymptotischer Punkt mittelst Zirkel und Lineal konstruiert werden soll. Auch die Punkte α, β, γ $\cdots$ liegen auf einer Spirale.

Lösung: (Pol.-Koord.); (R. K.).

(180) Weinmeister XII, 363 u. 433. XIII, 199.

2. Von einer zu zeichnenden archimedischen Spirale kennt man den Pol O, eine Tangente T und die Länge a der Subnormale.

Lösung: (G. R.).

(787) Rulf XIX, 347. XX, 186.

3. Für ein echt gebrochenes μ sei $y = Ax^{\mu}$ die Gleichung einer parabolischen Kurve, deren Ordinaten gleichzeitig mit den Abscissen ins Unendliche wachsen; wird nun die Kurve parallel zu sich selbst längs der X-Achse um eine Strecke h verschoben, so sind die ursprüngliche und die neue Kurve Asymptoten zueinander.

Beweis: (R.).

(1083) Schlömilch XXII, 595. XXIII, 348.

4. Man verbinde einen Punkt P des Kreises K mit den anderen Punkten von K durch Sehnen und zeichne über diesen als Durchmessern Kreise.

a) Die Kreise umhüllen eine Kardioide.

b) PQ sei Durchmesser in K, PR eine beliebige Sehne und T der zu dem Kreise über PR gehörende Berührungspunkt der Kurve, so ist stets $\sphericalangle QPR = TPR$;

*) Vergl. Weinmeister: Die Herzlinie. XV, 245—273.

c) die Kurve ist zugleich Fufspunktkurve von K für den Pol P.

Beweis: (R. K. u. Pol.-Koord.); (G.).

(1262) Bücking XXV, 115. XXV, 510.

5. Wie konstruiert man auf einfache Weise Punkte der Kurve $\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} = \frac{1}{\gamma^2}$?

Lösung: (R 3.).

(1326) Bökle XXV, 513. XXVI, 277.

H.

Flächen zweiter und höherer Ordnung.

---

1. An eine Fläche zweiten Grades sind von einem Punkte P aus sämtliche Tangenten gezogen, deren Berührungspunkte bekanntlich in einer Ebene (der Polarebene) liegen und eine Kurve zweiten Grades bilden. Dabei werde vorausgesetzt einerseits, dafs die Berührungskurve eine Ellipse, andererseits, dafs sich über ihr die Fläche zu einer Kappe zusammenwölbe, auf welcher dann ein Punkt P_1 (gewissermafsen der Kappenscheitel) existiert, in welchem die Berührungsebene an der Fläche parallel zur Polarebene liegt. Bezeichnet man die Koordinaten von P mit u, v, w, den zugehörigen Radiusvektor mit r, ebenso die Koordinaten und den Radiusvektor von P_1 mit u_1, v_1, w_1, r_1, endlich mit V das Volumen der Kappe, so hat man folgende Formeln und Sätze.

a) Für das elliptische Paraboloid, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - z = 0$$

sein möge, ist $V = \frac{1}{2} \pi (w_1 - w)^2 \sqrt{ab}$. Bewegt sich der Pol P auf einem coaxialen kongruenten Paraboloide, dessen Scheitel um k tiefer liegt, so behält V den konstanten Wert $\frac{1}{2} \pi k^2 \sqrt{ab}$.

b) Für das hyperbolische Paraboloid ist keine Kappe der bezeichneten Art möglich.

c) Die Gleichung des Ellipsoids sei $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ und V das Volumen der kleineren der entstehenden zwei Kappen; es ist dann $V = \frac{1}{3} \pi \left(2 - 3 \frac{r_1}{r} + \left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right) abc$. Dieses Volumen bleibt ungeändert, wenn der Pol auf einem koncentrischen und ähnlichen Ellipsoide fortrückt. Sind z. B. $2a$, $2b$, $2c$ die Achsen des letzteren, so beträgt V immer $\frac{5}{32}$ des ursprünglichen Ellipsoids.

d) Bei dem einfachen Hyperboloid existieren keine Kappen der beschriebenen Art.

e) Bei dem geteilten Hyperboloid, dessen Gleichung

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

sein möge, entstehen Kappen nur dann, wenn der Pol zwischen der Fläche und ihrem Asymptotenkegel liegt. Die Formel für V bleibt hier dieselbe wie bei dem Ellipsoide, nur ist der Wert von r_1 ein anderer. Bewegt sich der Pol auf einem koncentrischen und ähnlichen Hyperboloide, so behält V seinen Wert ungeändert bei; so ist z. B., wenn die Halbachsen des letzteren Hyperboloids $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ sind, V immer gleich dem Volumen eines aus den Halbachsen a, b, c konstruierten Ellipsoides.

(70_2) Schlömilch IX, 437—438. —

2. Ein fester Punkt und zwei feste Ebenen sind gegeben; die Abstände eines beliebigen Punktes von den genannten Objekten mögen der Reihe nach r, p, q heifsen; es soll nun untersucht werden, welche Fläche der willkürliche Punkt beschreibt, wenn er sich so bewegt, dafs immer die Gleichung

$$r^2 = \alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma p q$$

erfüllt bleibt, worin α, β, γ gegebene positive oder negative Zahlen bedeuten.

Die Aufgabe enthält sehr viele specielle Fälle in sich, je nachdem die Ebenen parallel sind oder nicht, und je nach den verschiedenen Werten von α, β, γ. Bemerkenswert sind z. B. die Specialisierungen $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$ und $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$.

Lösung: (R. K.). Die Gleichung des Ortes ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha \cdot \frac{(y + ax + b)^2}{1 + a^2} + \beta \cdot \frac{(y + a_1 x + b_1)^2}{1 + a_1^2} + \gamma \cdot \frac{(y + ax + b)(y + a_1 x + b_1)}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a_1^2)}}.$$

(61) Schlömilch IX, 285. X, 418.

3. Gegeben Ebene E und auf der einen Seite derselben die Punkte A und B. Eine veränderliche Kugel gehe durch A und B und berühre E in X.

1. Welches ist der Ort für X?
2. Welches ist der Ort für den Mittelpunkt M?
3. Wie kann man das gefundene Resultat verwerten, um die Schnittfigur eines Rotationsparaboloides mit einer Ebene zu untersuchen?

Lösung: (G.). 1) Kreis. 2) und 3) Ellipse.

(222) Weinmeister XIII, 205. XIV, 90.

4. Gegeben ein fester Kegel II. O. K und ein fester Punkt P. Eine Ebene E, welche K in der Kurve (EK) schneidet, bewegt sich so, daſs der Kegel, welcher (EK) zur Basis und P zur Spitze hat, ein Rotationskegel ist. Welche Fläche wird von E eingehüllt?

Lösung: (G.).

(214) Weinmeister XIII, 125. XIV, 31.

5. Schneiden sich zwei Rotationsparaboloide mit parallelen Achsen, so gehört die Schnittkurve derselben einer dritten Rotationsfläche II. O. an, deren Brennpunkte in den Brennpunkten der Paraboloide gelegen sind.

Beweis: (G.).

(215) Weinmeister XIII, 125. XIV, 31.

6. Eine Tangentialebene an einen Wulst schneidet ihn in einer Kurve mit einem Doppelpunkt. Die Tangenten im Doppelpunkt konstruiert man mit Hülfe eines Oskulations-Hyperboloides; giebt es keine einfachere Konstruktion?

(282) Böklen XIV, 100. Nicht gelöst.

7. Durch die Durchschnittskurve zweier Flächen zweiten Grades lassen sich vier Kegel zweiten Grades legen, also durch die Durchschnittskurve zweier Kegel oder zweier Cylinder noch zwei Kegel; die Aufgabe, die Koordinaten der Spitzen der letzteren zu finden, führt also auf eine Gleichung zweiten Grades, wie lautet sie?

(283) Böklen XIV, 100. Nicht gelöst.

8. Zwei Scharen koaxialer Kreiskegel haben dieselbe Spitze und man ordnet jedem Kegel der einen Schar einen der zweiten Schar so zu, daſs die Radien der zu den Achsen senkrechten Schnittkreise in gleicher Entfernung von der Spitze ein konstantes Verhältnis haben. Wo liegen dann die Schnittlinien der Tangentialebene, die man an jeden der zwei Kegel eines zugeordneten Paares von der Achse des anderen aus legen kann? — Im Fall, wo beide Scharen in Cylinder ausarten, erhalten wir einen Kreiscylinder, dessen Achse mit denjenigen der beiden Scharen parallel läuft.

Lösung: (K. M.).

(1330) BöklE XXV, 514. XXVI, 344.

9. Durch sieben Punkte, von welchen sechs die Ecken eines Prismas sind, eine Cylinderfläche zweiter Ordnung so zu legen, daſs keine der prismatischen Längskanten in die Fläche hineinfällt.

Lösung: (G.); (P. G.).

(310) Weinmeister XIV, 357. XV, 118.

10. Ein parabolischer Cylinder ist durch eine Ebene senkrecht zu den Kanten geschnitten und an die Schnittparabel ist eine unter dem spitzen Winkel τ gegen ihre Achse geneigte Tangente gelegt. Man soll durch diese Tangente eine andere Ebene so legen, daſs die neu entstandene Parabel

a) der ersten kongruent ist;

b) einen möglichst groſsen Parameter hat.

Lösung: (G. R.).

(1014) WEINMEISTER XXII, 105. XXII, 503.

J.

Aufgaben aus der Physik.

I. Mechanik.

§ 1. Gleichgewicht von Kräften.

1. Drei gegebene Gewichte P, P', P'' werden von drei biegsamen und gewichtlosen Fäden getragen; diese Fäden gehen bezüglich durch drei unendlich kleine feste Ringe A, B, C, welche beliebig im Raume liegen und vereinigen sich in einem gemeinsamen Knoten O. Gefragt wird nach der Lage des Knotens im Gleichgewichtszustande.

(16_2) Nouv. Ann. X, 355. —

2. Gegeben ist ein Kreis O in einer vertikalen Ebene, und auf der durch den Mittelpunkt O gehenden vertikalen Linie oberhalb dieses Punktes, und aufserhalb des Kreises nimmt man einen Punkt C an, den man als eine unendlich kleine Rolle ansieht. Über die Rolle ist ein Faden ACB gelegt; an dem einen Ende desselben hängt ein Gewicht Q, am anderen Ende B ist ein Ring befestigt, der ein Gewicht P trägt und auf der Peripherie von O ohne Reibung verschiebbar ist. Es sollen die Gleichgewichtslagen des Systems bestimmt und für eine jede derselben angegeben werden, ob das Gleichgewicht stabil oder labil ist. (Das Gewicht des Fadens und des Ringes wird vernachlässigt, desgleichen die Dimensionen der Rolle und des Ringes.)

(17_2) Nouv. Ann. X, 355. —

3. Zwei Gewichte P und P' sind gezwungen, sich auf zwei schiefen Ebenen zu bewegen, deren Durchschnitt horizontal ist; diese beiden Gewichte ziehen sich proportional ihren Massen und einer bekannten Potenz ihrer gegenseitigen Entfernung an; ihre Gleichgewichtslage zu finden. Dieselbe Aufgabe zu behandeln, indem man auf die Reibung Rücksicht nimmt, welche für die beiden schiefen Ebenen als gleich vorausgesetzt wird. (Die Dimensionen der beiden Gewichte soll man vernachlässigen.)

(29_1) Nouv. Ann. X, 113. —

4. Im Innern eines Dreiecks ABC einen Punkt X so zu bestimmen, dafs, wenn $XA = p$, $XB = q$, $XC = r$ Gröfse und Richtung von Kräften darstellen, dieselben im Gleichgewicht sind.
(489) v. Lühmann XVI, 205. XVI, 498.

5. Im Innern eines Dreiecks ABC den Punkt X so zu bestimmen, dafs, wenn den Seiten proportionale Kräfte in den Richtungen XA, XB, XC wirken, dieselben im Gleichgewicht sind.
(490) v. Lühmann XVI, 205. XVI, 499.

6. Im Innern eines Dreiecks ABC einen Punkt X so zu bestimmen, dafs, wenn auf die Seiten BC, CA, AB resp. die Senkrechten XD, XE, XF gefällt werden und dieselben die Gröfse und Richtung von Kräften darstellen, dieselben im Gleichgewicht sind.
(491) v. Lühmann XVI, 205. XVI, 499.

7. Nimmt man in der Ebene eines Dreiecks ABC den beliebigen Punkt P an, so geht die Resultante der drei Kräfte, welche der Gröfse und Richtung nach durch PA, PB, PC dargestellt werden, durch einen festen Punkt des Dreiecks.
(*483*) Journ. élém. XXII, 354 und 437.

8. Die in den Mittelpnnkten A, B', C' der Seiten des Dreiecks ABC senkrecht und proportional den entsprechenden Seiten angebrachten Kräfte halten sich das Gleichgewicht.
(*484*) Journ. élém. XXII, 354.

9. Die Abstände der Ecken eines regelmäfsigen Vielecks von einem beliebigen Durchmesser des Umkreises stellen gleichlaufende, im Gleichgewicht befindliche Kräfte dar.
(962) Kücker XXI, 354. XXII, 100.

10. Vier in einer Ebene liegende Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 sind im Gleichgewicht; ihre Richtungen bilden, wenn man je eine Kraft fortläfst, vier Dreiecke, deren Inhalte Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 mit den Radien der Umkreise r_1, r_2, r_3, r_4 seien. Dann ist

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = \frac{\Delta_1}{r_1} : \frac{\Delta_2}{r_2} : \frac{\Delta_3}{r_3} : \frac{\Delta_4}{r_4}.$$

(*485*) Educ. Times. XXII, 355.

11. Greifen in den Ecken A, B, C, D eines Vierecks die gleichen und gleichgerichteten Kräfte P und im Diagonalenschnittpunkt eine in entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft $-P$ an, so geht die Resultante durch den Schwerpunkt des Vierecks.
(1010) Glaser XXII, 26. XXII, 433 und 594.

12. Eine kreisförmige Platte ist in ihrem Mittelpunkte unterstützt. Wie müssen in drei Punkten ihrer Peripherie drei Ge-

wichte w_1, w_2, w_3 angebracht werden, damit die Platte in der horizontalen Lage bleibt?

(*283*) Educ. Times. XVII, 36.

13. Eine Platinkugel (spec. Gewicht $s = 21,5$) und eine Aluminiumkugel (spec. Gew. $s_1 = 2,56$) hängen an feinen Drähten an den beiden Enden einer 58 cm langen geraden Stange, deren Gewicht aufser Betracht gelassen werden kann. In welchem Punkt mufs die Stange unterstützt werden, um in wagerechter Stellung im Gleichgewicht zu sein, wenn beide Kugeln vollständig in Wasser untergetaucht sind?

(*490*) Nyt Tidsskrift. XXII, 357.

14. Ein starrer homogener Balken AB von dem Gewicht w ruht mit dem Punkt A auf einer rauhen horizontalen Ebene AI und stützt sich mit B gegen eine rauhe vertikale Wand IB. Der Reibungswinkel sei in beiden Fällen ε. Von I aus ist ein Seil an dem Balken befestigt, so dafs der Balken nicht gleiten kann. Die Grenzlage und die Spannung des Seiles sind zu bestimmen.

(*282*) Educ. Times. XVII, 35.

15. Wenn ein Stab AB von der Länge $a\sqrt{2}$ und dem Gewicht w in einer vertikalen Ebene innerhalb einer rauhen Kugel (O, a) im Gleichgewicht bleiben soll, indem sich das eine Ende B des Stabes an dem tiefsten Punkt der Kugel befindet, so mufs der Reibungskoefficient $\mu = \sqrt{2} - 1$ sein.

(*486*) Educ. Times. XXII, 355.

16. Ein Umdrehungsparaboloid vom Parameter p wird zwischen zwei wagerechte parallele Bolzen, deren Abstand $2a$ beträgt, gestellt; dasselbe wird nun von einer mit den Bolzen parallelen durch den Scheitel gehenden Ebene halbiert. Wie grofs darf seine Höhe höchstens werden, wenn nun auch noch jede Hälfte des Paraboloids sich im Gleichgewicht befinden soll?

(999) Kücker XXI, 591. XXII, 348.

---

§ 2. Schwerpunkt.*)

1. Unter welchen Winkeln müssen drei Strecken a, b, c, die im Punkte P zusammenstofsen, gegeneinander geneigt sein, wenn der Schwerpunkt des Systems in den Punkt P fällt?

(626) Emmerich XVII, 525. XVIII, 267.

*) Vergl. Nisetko: Bestimmung des Schwerpunkts eines Trapezes XXIII, 251. Zwerger: Den Schwerpunkt einer homogenen Kugelzone auf elementarem Wege zu bestimmen XXII, 336—338.

2. Definiert man rein geometrisch den Schwerpunkt des Dreiecks als den Durchschnitt seiner Mittellinien und nachher den Schwerpunkt des ebenen Vierecks $ABCD$ als den Durchschnitt der beiden Geraden, von denen die eine die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und CDA, die andere die Schwerpunkte der Dreiecke BCD und DAB verbindet, so gilt folgender Satz: In dem Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich in E schneiden, ist auf AC die Strecke $AF = CE$ und auf BD die Strecke $BG = DE$ genommen; die Dreiecke ACG, BDF und EFG haben dann einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt, welcher zugleich der Schwerpunkt des Vierecks $ABCD$ ist.

(518) Schlömilch XVI, 356. XVII, 30.

3. Um die Mitte eines Quadrats dreht sich eine gerade Linie. Welchen Weg beschreibt der Schwerpunkt S der einen Hälfte der Figur bei einer vollen Umdrehung der Geraden?

Lösung: (R. K.) (S durchläuft vier kongruente Parabelbogen).

(524) Emmerich XVI, 428. XVII, 108.

4. Nimmt man auf den Diagonalen AC und BD eines Vierecks die Punkte F und G, welche zu dem Diagonalenschnittpunkt E in Bezug auf die Mittelpunkte H und L der Diagonalen symmetrisch liegen, so kann man das Dreieck EFG aus dem Viereck schneiden, ohne die Lage des Schwerpunktes zu ändern.

(727) Most XVIII, 601. XIX, 340.

5. Gegeben sind die auf ein rechtwinkliges System bezogenen Koordinaten der Ecken eines ebenen Vielecks $x_1, y_1; x_2, y_2; \cdots x_n, y_n$. Zu bestimmen die Koordinaten

a) des Flächenschwerpunktes;

b) des den Schwingungen des Vielecks um beide Achsen gemeinsamen Schwingungspunktes.

(688) Weinmeister XVIII, 278. XIX, 30.

6. Gegeben ist eine Reihe von Kreisen, welche in ein und derselben Ebene liegen, ihre Mittelpunkte in gerader Linie haben und sich äufserlich so berühren, dafs sich jeder mit dem vorangehenden und folgenden berührt, und deren Radien eine abnehmende geometrische Reihe bilden. Gesucht wird der Schwerpunkt des ins Unendliche verlängerten Systems.

(30_1) Nouv. Ann. X, 113. —

7. Kann der Schwerpunkt einer dünnen kreisförmigen Platte, welche aus drei Sektoren von verschiedenem spezifischen Gewicht besteht, in den Mittelpunkt fallen?

(798) Emmerich XIX, 430. XX, 265 (804 statt 798).

8. Ein rechtwinkliger Kasten, dessen horizontale Grundfläche ein Rechteck ist mit den Seiten a und b, ist durch eine vertikale zur Kante a normale, unendlich dünne Wand in zwei Teile geteilt, deren Längen a_1 und a_2 sind, wo also $a_1 + a_2 = a$ ist. Der kleinere Teil ist mit Wasser gefüllt. Welche Kurve beschreibt der Schwerpunkt dieser Wassermasse, wenn diese allmählich aus dem kleineren Teil in den gröſseren gepumpt wird?

(1230) Kosch XXIV, 459. XXV, 276.

9. Wenn aber der in Nr. 8 erwähnte Teil a_1 mit Wasser bis zur Höhe h_1 gefüllt ist und gefüllt bleibt, in den zweiten Teil jedoch allmählich von einem dritten Ort Wasser flieſst; welchen Ort beschreibt dann der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Wassermasse in den beiden Teilen des Kastens?

(1231) Kosch XXIV, 460. XXV, 276.

10. Nimmt man auf den Diagonalen AA', BB', CC' eines beliebigen dreiachsigen Oktaeders die Punkte α, β, γ, welche zu dem Achsenschnitt D in Bezug auf die Mittelpunkte M_a, M_b, M_c der Diagonalen symmetrisch liegen, so kann das Tetraeder $D\alpha\beta\gamma$ heraus genommen werden, ohne die Lage des Schwerpunktes zu ändern.

(728) Most XVIII, 601. XIX, 340.

11. a) Die in den Seitenflächen eines abgeschrägten dreiseitigen Prismas liegenden Mittelparallelen haben denselben Schwerpunkt wie der Körper.

b) In jedem abgeschrägten dreiseitigen Prisma liegt der Körper-Schwerpunkt mit dem der Seitenkanten und dem der Ecken in einer Geraden und zwar teilt er die Verbindungslinie beider im Verhältnis 3 : 1.

c) Um den Schwerpunkt S eines abgeschrägten vierseitigen Prismas zu erhalten, bestimme man zunächst das Viereck, dessen Ecken die Seitenkanten halbieren. In demselben sei F der Schwerpunkt der Fläche, E der der Ecken und K der der Seitenkanten. Auſserdem sei f die durch F und e die durch E gehende, von den Grundflächen begrenzte Parallele zu den Seitenkanten. Teilt man nun KF in I im Verhältnis $3 : 1$, so liegt S auf der Verlängerung der Linie EI über I hinaus, so daſs $SE : IE = 4e : 3f$.

(710 a—c) Weinmeister XVIII, 446. XIX, 185.

12. Eine homogene Halbkugel koncentrisch so auszubohren, daſs der Schwerpunkt der Schale in die Bohrfläche fällt.

(679) Emmerich XVIII, 277. XIX, 24.

13. Um den Schwerpunkt S eines homogenen abgeschrägten elliptischen Cylinders zu bestimmen, empfiehlt sich (namentlich

für darstellende Geometrie) folgendes Verfahren: Man konstruiere zunächst die Gerade L, in welcher sich die beiden abgrenzenden Ebenen schneiden und suche hierauf in der einen abgrenzenden Ebene den Pol von L in Beziehung auf die Ellipse. Dann verbinde man denselben mit dem Ellipsenmittelpunkt und verlängere die Verbindungslinie über letzteren hinaus um den vierten Teil. Legt man schliefslich durch den Endpunkt der Verlängerung eine Gerade den Cylinderkanten parallel, bis sie die andere Grenzebene trifft, und halbiert diese Linie, so erhält man S.

(1115) Weinmeister XXIII, 195. XXIII, 589.

---

§ 3. Standfestigkeit.

1. Wird ein gerades homogenes Prisma, dessen senkrechter Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck ist, mit einer seiner kleineren Seitenflächen auf eine Horizontalebene gelegt, so ist die Stabilität des Prismas gegenüber einer Drehung um die schärfere Kante doppelt so grofs als für eine Drehung um die Kante, an welcher der rechte Winkel liegt.

(519) Emmerich XVI, 357. XVII, 31.

2. Mit einer Halbkugel vom Radius r ist ein aus demselben Stoffe verfertigter gerader Kegel von gleichem Radius in der Weise fest verbunden, dafs die Grundflächen sich decken. Welche Gröfse darf die Höhe des Kegels nicht erreichen, wenn der zusammengesetzte Körper, mit der sphärischen Fläche auf eine Horizontalebene gestellt, sich in stabiler Ruhe befinden soll?

(465) Emmerich XVI, 26. XVI, 350.

3. Mit einer messingenen Halbkugel vom Radius r und vom specifischen Gewicht 8,395 ist ein gerader, mit konischer Spitze versehener eichener Turm vom specifischen Gewicht 0,715 in der Weise fest verbunden, dafs die ebenen Flächen beider Körper sich genau decken. Die Höhe des Cylinders ist h_i, die des Kegels h_e. Der ganze zusammengesetzte Körper ruht frei beweglich auf einer horizontalen Ebene.

a) Wie grofs ist $h_i + h_e$, wenn $h_i : h_e = 3 : 2$ ist und der ganze Körper weder auf seiner cylindrischen, noch auf seiner konischen Fläche im Gleichgewicht zu ruhen vermag?

b) Wie grofs sind $h_i : h_e$ und $h_i + h_e$, wenn der Körper auf jeder seiner Flächen ruhen kann, ohne jedoch auf einer derselben im stabilen Gleichgewicht zu sein?

(558) Breuer XVI, 594. XVII, 360.

4. In eine auf dem Fufsboden stehende Röhre vom inneren Durchmesser $2r$ werden a) $2n$; b) $2n + 1$ gleiche Kugeln, jede

vom Gewicht G und dem Durchmesser $2a > r$ gelegt. Wie grofs mufs mindestens das Gewicht der Röhre sein, damit dieselbe nicht umfalle?

(991) KÜCKER XXI, 521. XXII, 272.

---

§ 4. Gleichförmige Bewegung.*)

1. An einer Eisenbahn AE ist der Ort A gegeben und seitwärts derselben der Ort B durch die von B auf AE gefällte Senkrechte $BB' = a$ und durch $AB' = b$. An welchem Punkt M der Eisenbahn mufs man dieselbe verlassen,

1) um so schnell als möglich von A nach B zu gelangen, wenn die Geschwindigkeit des Eisenbahnzuges v und die eines Wagens auf der Landstrafse v' ist?

2) um Waren so billig wie möglich von A nach B zu befördern, wenn die Beförderung der Ware auf der Eisenbahn p Mark und auf der Landstrafse p' Mark für je 1 km kostet?

(*453*) Mathesis. XXI, 521.

2. (Im Anschlufs an die vorige Aufgabe.) Ein Zug fährt auf einer Kurve, welche $\frac{1}{n}$ des Kreisumfanges ist, von A nach B. Auf dem Radius BO, dessen Endpunkt B ist, liegt Punkt P so, dafs $BP = a$ ist. In welchem Punkte M der Kurve mufs man die Bahn verlassen,

a) um möglichst schnell von A nach P zu kommen, wenn die Zuggeschwindigkeit $= v$, die Wagengeschwindigkeit v_1 ist;

b) um Waren möglichst billig von A nach P zu schaffen, wenn die Bahnfracht p Mark, die Wagenfracht p_1 Mark für je 1 km beträgt?

(1232) STECKELBERG XXIV, 460. XXV, 277.

3. Auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels $ACB = \gamma$ befinden sich zwei durch $AC = a$ und $BC = b$ gegebene Punkte A und B; dieselben bewegen sich mit den Geschwindigkeiten c und c_1 nach C zu. Nach wieviel Sekunden befinden sie sich in zwei Punkten A' und B', so dafs $A'B'$ ein Minimum ist und wie grofs ist dieses Minimum?

(1194) SIEVERS XXIV, 270. XXV, 42.

---

*) Vergl. F § 7 Nr. 1; 2.

§ 5. Gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung*) auf geradliniger und krummliniger Bahn.

1. Von der Öffnung einer 152 m tiefen Grube wird ein Körper mit 29 m Anfangsgeschwindigkeit senkrecht in die Höhe geworfen. Wieviel Sekunden später mufs man einen anderen Körper von derselben Stelle aus fallen lassen, damit beide Körper gleichzeitig den Boden der Grube erreichen.

(*487*) Nyt Tidsskrift. XXII, 355.

---

2. Von zwei Punkten A und B aus (A auf einer Anhöhe, B im Thale und unter dem Horizont des Ortes A gelegen) werden gleichzeitig zwei Kugeln mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit in der durch A und B gelegten Vertikalebene unter den Elevationswinkeln α^0, β^0 abgeschossen. Unter welcher Bedingung treffen sich die beiden Kugeln? (Vom Luftwiderstande möge abgesehen werden).

(592) Emmerich XVII, 201. XVII, 594.

3. Von einem Punkte M, dessen Entfernung von der Horizontalebene h ist, wird eine Kugel mit der Geschwindigkeit v so abwärts geworfen, dafs die Wurfrichtung mit der Horizontalen den Winkel α bildet. Mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Elevationswinkel mufs eine zweite Kugel von einem in der Horizontalebene liegenden Punkte O geworfen werden, damit beide im Scheitelpunkt der Parabelbahn der zweiten Kugel zusammentreffen, wenn M unter dem Höhenwinkel φ von O gesehen wird?

(593) Szimányi XVII, 201. XVII, 595.

4. Von einem in der Horizontalebene liegenden Punkte O wird ein Körper mit der Geschwindigkeit v unter dem Elevationswinkel α aufwärts geworfen. Mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Elevationswinkel mufs von einem ebenfalls in der Horizontalebene liegenden Punkte M, dessen Entfernung von O gleich a ist, ein zweiter Körper geworfen werden, damit er den ersten im Scheitelpunkt der von ihm beschriebenen Parabelbahn treffe?

(594) Szimányi XVII, 201. XVII, 595.

---

5. Eine Kugel mit dem Radius a rollt von einem Dache herab, das die Neigung α gegen die Horizontale hat und dessen Dachrinne die Entfernung b vom Erdboden hat. In der Entfernung c vor dem Fundament des Hauses befindet sich in der Höhe d

---

*) Vergl. F § 7 Nr. 4.

vom Erdboden ein horizontaler Querbalken. Welche Länge mufs die Kugel (ohne Rücksicht auf Reibuug und Luftwiderstand) auf dem Dache durchlaufen, wenn sie den Balken treffen soll?

(*284*) Educ. Times. XVII, 36.

6. Die Oberfläche eines Turmdaches sei die konkave Seite der Fläche, welche durch Rotation eines Ellipsenquadranten um die in einem seiner Endpunkte gezogene Tangente entsteht. Die Höhe des Turmes betrage $(a + b)\,m$, die des Daches bm. Mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Entfernung vom Turme langt eine Kugel, welche ohne Anfangsgeschwindigkeit von der Spitze des Daches herabläuft, am Boden an? (Von den Bewegungshindernissen möge abgesehen werden.)

(478) Emmerich XVI, 124. XVI, 424.

7. Ein vollkommen elastischer Massenpunkt M trifft, nachdem er eine Strecke h infolge des freien Falls zurückgelegt hat, eine gegen den Horizont unter einem Winkel α geneigte Ebene im Punkte A. In welchem Punkt wird die Ebene zum zweiten- und drittenmal getroffen?

(*488*) Educ. Times. XXII, 356.

8. Zwei schiefe Ebenen AC und BC von gleicher Länge l und gleicher Neigung α gegen den Horizont stofsen mit ihren Kopfenden C zusammen. Mit welcher Geschwindigkeit v mufs, abgesehen vom Reibungswiderstande, eine Kugel vom Fufse A der einen Ebene senkrecht zur Grenzkante aufwärts gestofsen werden, damit sie erst am Fufse B der anderen wieder niederfällt?

(527) Emmerich XVI, 429. XVII, 110.

9. Zwei schiefe Ebenen AC und BC von gleicher Neigung α stofsen mit ihren Kopfenden zusammen. In dem Momente nun, in welchem eine Kugel von C aus ihre Fallbewegung nach A hin beginnt, wird in dem um l von C entfernten Punkte B einer zweiten Kugel die Geschwindigkeit v in der Richtung BC erteilt. Unter welcher Bedingung wird diese zweite Kugel im Momente ihres Niederfallens auf die Ebene AC die erste Kugel treffen?

(712) Emmerich XVIII, 447. XIX, 187.

10. An das Fufsende einer schiefen Ebene, deren Neigung α gegen den Horizont gegeben ist, stöfst mit ihrem Kopfende eine andere stärker geneigte, aber ebenso hohe schiefe Ebene. Welchen Winkel mufs die letztere mit dem Horizont bilden, wenn eine Kugel, welche die erste Ebene ohne Anfangsgeschwindigkeit durchlaufen hat, gerade am Fufsende der zweiten niederfällt? (Von den Bewegungshindernissen möge abgesehen werden.) Beisp. $\alpha = 45^0$.

(913) Emmerich XXI, 30. XXI, 352.

11. Eine vollkommen elastische Kugel wird von dem Punkte A einer unter dem Winkel α gegen die Horizontalebene geneigten Ebene unter dem Elevationswinkel β mit der Anfangsgeschwindigkeit a hinaufgeworfen. Welche einfache Beziehung mufs zwischen α und β stattfinden, damit die Kugel beim $n$ten Mal a) senkrecht zur Ebene herabfalle, b) vertikal aufsteige, also nachher in beiden Fällen denselben Weg zurückgehe? Wie grofs ist für beide Fälle die Geschwindigkeit beim $n$ten Auffallen? (Spezialfall $\alpha = 45^0$.)

(1144) Much XXIII, 431. XXIV, 262.

12. Bestimmung des von einem Geschofs gefährdeten Raumes, wenn c die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses ist.

(1141) Michnik XXIII, 431. XXIV, 187.

13. (Im Anschlufs an die vorige Aufgabe.) Ein Dach hat die Form eines geraden Kreiskegels mit vertikaler Achse. Welcher Raum ist von etwa vom Dach herabfallenden Körpern gefährdet?

(1193) Bökle XXIV, 270. XXV, 41.

14. Ein cylindrisches Gefäfs, stets gefüllt gedacht, enthält an verschiedenen Stellen Öffnungen. Innerhalb welches Raumes bleiben die Bahnen der ausfliefsenden Wasserteilchen?

(1192) Bökle XXIV, 270. XXV, 41.

---

15. Auf zwei schiefen Ebenen P und Q, von denen die erstere mit der Horizontalebene einen Winkel von 60^0, die zweite einen Winkel von 30^0 bildet, und in einer zum Durchschnitt der Ebenen P und Q senkrechten Ebene bringt man zwei gleiche kleine Gewichte an, welche durch einen Faden verbunden sind, der sich über eine kleine Rolle windet, deren Achse mit dem Durchschnitt der Ebenen P und Q zusammenfällt und die solche Ausdehnungen besitzen, dafs die beiden Teile des Fadens bezüglich den beiden schiefen Ebenen parallel sind. Gefragt wird:

1) in welchem Sinne geschieht die Bewegung?

2) welches sind die von den Gewichten nach drei Sekunden durchlaufenen Räume?

3) welches sind die von denselben Gewichten nach drei Sekunden erlangten Geschwindigkeiten?

(28_1) Nouv. Ann. X, 113. —

16. Zwei schiefe Ebenen AC und BC von gleicher Länge l und gleicher Neigung α ($< 45^0$) gegen den Horizont stofsen mit ihren Fufsenden zusammen. Mit welcher Geschwindigkeit v mufs, abgesehen vom Reibungswiderstande, eine unelastische Kugel von A in einer Richtung senkrecht zur Grenzkante abwärts gestofsen

werden, damit sie sich nach dem Übergange auf CB auf dieser Ebene gerade bis B bewegt?

(525) EMMERICH XVI, 429. XVII, 109.

17. Zwei schiefe Ebenen AC und BC, welche mit ihren Fufsenden in C zusammenstofsen, sind unter den Winkeln α resp. β gegen den Horizont geneigt; die Ebene AC habe die Länge l.

a) Mit welcher Geschwindigkeit mufs, abgesehen vom Reibungswiderstande, eine Kugel von A aus in Bewegung gesetzt werden und

b) welchen Weg durchläuft sie auf der zweiten Ebene, wenn sie beim Zurückrollen wieder gerade bis A gelangt?

c) Wie lange dauert diese Bewegung?

(526) SZIMÁNYI XVI, 429. XVII, 109.

18. Zwei schiefe Ebenen von gleicher Länge, deren erste unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt ist, stofsen mit ihren Fufsenden aneinander. Welchen Winkel mufs die zweite Ebene mit dem Horizont bilden, wenn eine unelastische Kugel, welche die erste Ebene ohne Anfangsgeschwindigkeit durchlaufen hat, sich gerade bis zum Ende der zweiten hinaufbewegt? (Vom Reibungswiderstande möge abgesehen werden.) Beisp. $\alpha = 45^0$.

(914) EMMERICH XXI, 30. XXI, 419.

19. Zwei schiefe Ebenen AC und BC von gleicher Neigung α ($< 45^0$) gegen den Horizont und gleicher Länge l stofsen mit ihren Fufsenden zusammen. Wann werden zwei unelastische Kugeln, welche gleichzeitig von den oberen Enden A und B in einer zur Grenzkante senkrechten Ebene mit den Geschwindigkeiten v und w ($v < w$) abwärts gestofsen werden, zusammentreffen?

(711) EMMERICH XVIII, 447. XIX, 186.

20. Von den Spitzen zweier schiefen Ebenen L_1 und L_2 rollen zu gleicher Zeit zwei Kugeln ohne Anfangsgeschwindigkeit. Nach t_1 Sekunden kommt die eine Kugel am Fufse von L_1 und nach t_2 Sekunden die andere am Fufse von L_2 an. Wie grofs sind (abgesehen von den Bewegungshindernissen) die Längen L_1 und L_2 der beiden Ebenen, wenn die Höhe von L_2 um h, und die Horizontalprojektion von L_2 um d gröfser ist als von L_1?

(680) SZIMÁNYI XVIII, 277. XIX, 24.

21. Auf dem vertikalen Durchmesser AB eines Kreises ist ein Punkt P gegeben, um welchen sich eine Sehne MN dreht. Unter welchem Winkel müssen sich MN und AB schneiden, damit ein materieller Punkt von M nach N längs MPN herabrollend die Strecken MP und PN in gleichen Zeiträumen durchläuft?

(797) WACHTER XIX, 430. XX, 265 (803 statt 797).

22. Unter welchem Winkel mufs eine starre Gerade von der Länge l gegen den Horizont geneigt sein, damit ein materieller Punkt, welcher auf ihr ohne Anfangsgeschwindigkeit herabgeglitten ist, mit gröfstmöglicher Geschwindigkeit auf der Horizontalebene weitergehe?

(574) Weidenmüller XVII, 34. XVII, 445.

23. In einer Vertikalebene rollt von A nach B eine Kugel teils auf einer schiefen Ebene AX, teils auf einer Horizontalebene XB. Wie mufs die Ebene AX gegen XB geneigt sein, damit der Weg AXB in möglichst kurzer Zeit zurückgelegt wird?

(813) Wachter XIX, 510. XX, 272.

---

§ 6. Schwungkraft.

1. Läfst man ein cylindrisches Gefäfs um seine Achse rotieren, so entsteht in der Flüssigkeit, die sich in dem Gefäfs befindet, eine Vertiefung, welche die Form eines Rotationsparaboloides hat.

(1214) Bökle XXIV, 457. XXV, 185.

2. Eine cylindrische, oben offene Centrifuge vom Radius r und der Höhe h ist ganz mit Flüssigkeit gefüllt. Bei welcher Tourenzahl wird

a) die Hälfte,
b) der $n$te Teil der Flüssigkeit herausgeschleudert sein?

(1271) Handel XXV, 191. XXV, 586.

3. Eine Centrifuge vom Radius r und der Höhe h ist bis zur Höhe a mit Flüssigkeit gefüllt. Bei welcher Tourenzahl erreicht die Flüssigkeit den oberen Rand der Centrifuge?

(1272) Handel XXV, 191. XXV, 586.

---

§ 7. Verschiedene Bewegungen nach besonderen Gesetzen. Pendelbewegung.

1. A sei der vertikal über dem Mittelpunkt M einer Kugel liegende Punkt; von einem in unmittelbarer Nähe von A befindlichen Punkte rollt ein Atom (Teilchen der Materie, das in Bezug auf seine Gröfse als Punkt angesehen werden kann) ohne Anfangsgeschwindigkeit herab. An welchem Punkt Z der festen Fläche werden beide Kugeln aufhören einander zu berühren?

(760) Wachter XIX, 187. XIX, 583.

2. Welche mittlere lineare Geschwindigkeit (v) besitzt ein bestimmter Punkt in der Peripherie eines kreisrunden, gleichmäfsig schnell in gerader Richtung auf einer Ebene fortrollenden Rades von da ab, wo dieser Punkt die Ebene berührt bis dahin, wo das Rad die erste Viertel-, die zweite Viertel- und die volle Umdrehung gemacht hat, wenn die Radhöhe $= h$ und die Zeit einer Umdrehung $= t$ ist?

(648) Fleischhauer XVIII, 36. XVIII, 436.

3. Aus zwei parallelen um h von einander entfernten materiellen Ebenen sind zwei gleiche Kreise ausgeschnitten, deren Durchmesser $\gtreqless h\sqrt{2}$, und zwar so, dafs die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte auf den Ebenen senkrecht steht. Nach welcher der beiden Ebenen wird eine materielle Kugel hingetrieben, deren Mittelpunkt in jener Verbindungslinie liegt, wenn zwischen den Ebenen und der Kugel nur die Newton'sche Anziehungskraft thätig ist?

(246) Gilles XIII, 284. XIV, 190.

4. Über eine leicht bewegliche Rolle von der Masse Null sei ein Faden gelegt und auf der einen Seite um einen Cylinder vom Gewicht p_1 und. vom Radius r geschlungen, der nun durch die Schwerkraft und die Fadenspannung zur Rotation gezwungen wird, während an dem anderen Ende des Fadens das Gewicht p_2 befestigt ist. Wie erfolgt die Bewegung von p_1 und p_2? In welchem Verhältnis stehen p_1 und p_2, wenn

a) p_1 still steht und p_2 sinkt?
b) p_2 still steht und p_1 sinkt?
c) p_1 steigt?
d) p_1 und p_2 sinken?

(958) Holzmüller XXI, 353. XXII, 25.

5. Auf horizontaler Bahn werde ein Gewicht vom Cylinder p und vom Radius r durch eine an der Masse angreifende Horizontalkraft p_1 fortgezogen. Gesucht wird der Minimalwert des Koefficienten der gleitenden Reibung für den Fall, dafs nur Rollung nicht Gleitung stattfindet. Wie geschieht in diesem Fall die Bewegung und wie dann, wenn neben der Rollung auch Gleitung stattfindet?

(957) Holzmüller XXI, 353. XXII, 25.

---

6. Konzentriert man in den Endpunkten einer gewichtslosen Stange AB beliebige Massen m und m', stellt dann zwischen AB und einem beliebigen Punkte C eine feste, aber ebenfalls gewichtslose Verbindung her und läfst dann das Ganze um den Aufhängepunkt C pendeln, so liegt der Schwingungsmittelpunkt auf dem

Umkreise von ABC. Vorausgesetzt wird dabei, dafs die Schwingungsachse senkrecht auf der Ebene des Dreiecks ABC steht.

(1011) GLASER XXII, 26. XXII, 434.

7. Um welchen Punkt mufs ein physisches Pendel schwingen, damit seine Schwingungsdauer ein Minimum wird?

(1124) MICHNIK XXIII, 331. XXIV, 97.

---

§ 8. Trägheitsmoment.

1. a) Das Trägheitsmoment eines Dreiecks ABC mit der Grundlinie a und der Höhe h in Bezug auf eine durch A zu BC gezogene Parallele zu berechnen.

b) Das Trägheitsmoment in der vorigen Aufgabe in Bezug auf die Basis a zu berechnen.

(*481—482*) Mathesis. XXII, 353—354.

2. Es ist zu beweisen, dafs das Trägheitsmoment eines Dreiecks bezogen auf die zur Ebene des Dreiecks normale Schwerpunktsachse $T = \frac{1}{9} \Delta^2 \cot \omega$ ist, worin Δ den Inhalt und ω den Brocard'schen Winkel des Dreiecks bedeutet.

(1172) KOSCH XXIV, 103. XXIV, 451.

3. a) Ein Dreieck durch eine Parallele zu einer Seite so zu schneiden, dafs die Flächenteile in Beziehung auf die schneidende Gerade gleiche Trägheitshalbmesser haben.

b) In der Ebene eines Rechtecks mit den Seiten $2a$, $2b$ $(a \geqq b)$ einen Punkt von der Eigenschaft zu suchen, dafs das Trägheitsmoment des Rechtecks für alle durch ihn gehenden und der Ebene angehörenden Geraden dasselbe sei.

(757 a, b) WEINMEISTER XIX, 98. XIX, 507.

4. Das Trägheitsmoment eines regelmäfsigen Vielecks für eine durch den Mittelpunkt gehende und der Ebene angehörende Gerade ist von deren Richtung unabhängig.

(719) WEINMEISTER XVIII, 504. XIX, 268.

5. a) Dreht sich eine Trägheitsachse in der Ebene eines Quadrats um eine Ecke desselben, so hat das Paar der Nachbarecken in Beziehung auf sie ein unveränderliches Moment.

b) Das auf der Nebenachse einer Ellipse (oder Hyperbel) gelegene Punktpaar P_1, P_2, welches vom Mittelpunkt O ebensoweit absteht wie die Brennpunkte F_1 und F_2, hat für alle Tangenten dasselbe Trägheitsmoment.

c) Liegen zwei Punkte P_1, P_2 auf der ev. verlängerten Achse einer Parabel in gleichem Abstande a vom Brennpunkt F, so ist

die Differenz der Trägheitsmomente der Punkte P_1 und P_2 eine konstante Gröfse.

(729 a — c) WEINMEISTER XVIII, 601. XIX, 341.

6. Verteilt man die überall gleich dicht vorausgesetzte Masse einer dreiseitigen Pyramide in der Weise, dafs man nach jeder Ecke den zwanzigsten Teil derselben und den Rest nach dem Schwerpunkt bringt, so haben diese Massenpunkte für eine beliebige Achse dasselbe Trägheitsmoment wie der Körper. Vergl. Kraft: Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik II, S. 157.

Frage: Welcher Bruch ist für $\frac{1}{20}$ einzuführen, wenn man statt der Pyramide ein Dreieck wählt?

(718) WEINMEISTER XVIII, 504. XIX, 267.

7. a) Das polare Trägheitsmoment einer dreiseitigen Pyramide aus ihrem körperlichen Inhalt J, den Abständen r_1, r_2, r_3, r_4 ihrer Ecken vom Pol und den Winkeln derselben zu berechnen.

b) Schwingt ein regelmäfsiges Tetraeder, Oktaeder oder Ikosaeder um eine seiner Kanten, so teilt der Schwingungspunkt das Lot vom Mittelpunkt auf die Gegenkante im Verhältnis 2 : 3.

(743 a, b) WEINMEISTER XIX, 33. XIX, 425.

8. Ein homogener gerader Cylinder von der Dichtigkeit d, dem Radius r und der Höhe h ist an beiden Enden einer erzeugenden Geraden befestigt und kann um diese Gerade kleine Schwingungen ausführen, deren Ausschlagswinkel α und deren Anfangsgeschwindigkeit Null ist.

a) Das Trägheitsmoment des Cylinders in Bezug auf die Aufhängungsachse ist zu bestimmen.

b) Der Radius r ist so zu bestimmen, dafs der Cylinder in der Sekunde zwei Schwingungen macht.

c) Welches ist unter dieser Bedingung die lebendige Kraft, welche der Cylinder beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage besitzt?

d) Die Aufhängungsachse ist zu ermitteln, welche parallel der vorigen dieselbe Schwingungsdauer ergiebt.

(*285*) Journ. élém. XVII, 37.

9. a) Eine Gerade bewegt sich in vorgeschriebener Richtung so, dafs zwei gegebene Massen in Beziehung auf sie stets gleiches Trägheitsmoment haben. Welche Fläche wird von ihr erzeugt?

b) In einer Ebene liegen zwei homogene Kreisflächen. Eine Gerade bewegt sich in dieser Ebene so, dafs die Kreise in Beziehung auf sie stets gleiches Trägheitsmoment haben. Welche Kurve hüllt sie ein? (Einen Kegelschnitt.)

(700 a, b) WEINMEISTER XVIII, 357. XIX, 96.

§ 9. Arbeit. Lebendige Kraft.

1. Aus der Mündung einer Kanone, deren Lauf (Ausbohrung) einen Durchmesser von 8 cm hat, wird mit 390 m : *s* Geschwindigkeit ein cylindrisches Geschofs abgefeuert mit 6,5 kg : *s* Triebkraft, nachdem es im Lauf einen Weg von 11 dm zurückgelegt hat. Wie grofs ist der Überdruck des Pulvergases ausgedrückt in Atmosphären unter der Voraussetzung, dafs sich derselbe während der ganzen Zeit nicht ändert? Der Druck einer Atmosphäre auf eine Quecksilbersäule ist 76 cm, das specifische Gewicht des Quecksilbers 13,6 und die Schwere 9,8.

(*489*) Nyt Tidsskrift. XXII, 356.

---

§ 10. Flüssige und gasförmige Körper.

1. Eine Platinkugel wiegt in der Luft 84 gr; in Quecksilber wiegt sie nur 22,6 gr. Welches ist die Dichtigkeit des Platins, wenn die des Quecksilbers 13,6 ist?

Krumme III, 454. III, 454.

2. p_1 gr eines Körpers, dessen spezifisches Gewicht s_1 ist, und p_2 gr eines anderen Körpers vom spezifischen Gewicht s_2 werden gemischt. Gesucht wird das spezifische Gewicht der Mischung.

Krumme III, 454. III, 455.

3. Olivenöl hat bei 12^0 C. ein spezifisches Gewicht von 0,919 und dehnt sich bei einer Erwärmung um 1^0 C. um $\frac{1}{1200}$ seines Volumens aus. Welches ist das spezifische Gewicht des Olivenöls bei 25^0 C.?

Krumme III, 455. III, 455.

4. Ist es möglich, dafs ein gerades dreiseitiges Prisma (spezifisches Gewicht < 1) mit lauter gleichen Kanten*) in Wasser ebenso tief eintaucht, wenn es auf einer Seitenfläche, als wenn es auf einer Grundfläche schwimmt?

(544) Emmerich XVI, 502. XVII, 283.

5. Auf einer Horizontalebene stehe ein Gefäfs in Gestalt eines Hohlwürfels, welches 8 *l* fafst und bis zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist. Wird dieses Gefäfs um eine seiner Grundflächenkanten gedreht, so ändert sich der Gesamtdruck Q auf die von der Flüssig-

---

*) Ein solcher Körper wird auch fünfflächiger archimedischer Körper genannt.

keit berührten Flächenteile stetig. Man ermittle die Abhängigkeit des Druckes Q von dem Drehungswinkel α.

(545) Emmerich XVI, 503. XVII, 284.

6. Bestimmt man den Prozentgehalt einer Mischung zweier Flüssigkeiten nach Volumen- und Gewichtsprozenten, so ist die Differenz für verschiedene Mischungsverhältnisse verschieden. Wann ist sie ein Maximum?

(1143) Michnik XXIII, 431. XXIV, 261.

7. Hat man Wasser in einem cylindrischen Gefäfse mit elliptischer Grundfläche und führt in einem Endpunkte der Hauptachse und in der Richtung derselben einen kurzen Schlag auf das Gefäfs aus, dann werden durch die entstandene Wellenbewegung die Brennpunkte markiert. Diese Erscheinung ist zu erklären.

(1324) Braun XXV, 513. Nicht gelöst.

8. Eine cylindrische Glasröhre, welche 1,27 m lang und mit zwei Hähnen versehen ist, steht senkrecht. Der untere Hahn wird geschlossen, in die Röhre eine Wassersäule von 0,89 m Höhe und über dieselbe eine Lage Öl von 0,20 m Höhe gebracht. Die Dichtigkeit des Öls ist 0,75. Der übrige Teil der Röhre ist mit Luft angefüllt unter dem atmosphärischen Druck 0,75 m. Nun wird der obere Hahn geschlossen und der untere teilweise geöffnet, so dafs das Wasser tropfenweise ausfliefsen kann, bis Gleichgewicht eintritt. Um wie viel mufs die Oberfläche des Öls sinken?

(*19*$_2$) Nouv. Ann. X, 355. —

9. Ein hohler Cylinder, dessen Querschnitt 180 qcm beträgt und der an einem Ende offen ist, während das andere Ende durch einen ebenen Boden geschlossen wird, ist durch einen cylindrischen Kolben von 23,5 kg Gewicht, der luftdicht schliefst, aber ohne bemerkenswerte Reibung beweglich ist, abgesperrt. Ist das offene Ende oben, so beträgt der abgesperrte Luftraum 2,7 Liter bei einem Barometerstande von 74 cm. Um wieviel wird sich der Kolben bewegen, wenn der Cylinder senkrecht nach unten gewendet wird? Vorausgesetzt wird, dafs der Cylinder so grofs ist, dafs der Kolben nicht herausfällt. Spec. Gew. des Quecksilbers 13,6.

(*492*) Nyt Tidsskrift. XXII, 357.

10. Eine gekrümmte Röhre $ABCD$, deren beide Arme vertikal und von demselben Durchmesser sind, enthält eine bestimmte Menge Quecksilber, und oberhalb dieses Quecksilbers in dem Schenkel AB, welcher geschlossen ist, befindet sich trockene Luft unter dem atmosphärischen Druck von 0,76 m. Der Teil AB, welcher diese Luft enthält, hat eine Länge von 0,26 m. Man giefst in den anderen Schenkel DC eine Wassersäule, deren Gewicht 342,72 gr beträgt. Welches ist dann der Niveau-Unterschied

der beiden Quecksilberflächen? Der Querschnitt der Röhre beträgt 59 cm und die Dichtigkeit des Quecksilbers 13,6.

(31_1) Nouv. Ann. X, 113. —

11. Ein Manometer mit komprimierter Luft, dessen beide Schenkel vertikal und von verschiedenen Durchmessern sind, steht in Verbindung mit einem Recipienten der Luftpumpe. Dieses Manometer enthält Luft unter dem Druck von 0,760 m, und der Teil des geschlossenen Schenkels, welcher durch diese Luft ausgefüllt ist, hat eine Länge von 0,30 m. Das Verhältnis der Durchschnitte der Schenkel CD und AB ist 1 : 2. Man verdünnt die im Recipienten enthaltene Luft. Welchen Niveauunterschied mufs man zwischen den beiden Quecksilbersäulen hervorbringen, damit sich der Druck in diesem Recipienten von 0,760 m auf 0,156 m vermindert?

(32_1) Nouv. Ann. X, 113. —

12. Ein offenes cylindrisches Gefäfs, das inwendig 42 cm Tiefe hat, wird bei einem Barometerstande von 74 cm mit der Öffnung nach unten soweit in Glycerin getaucht, dafs die innere Oberfläche des Gefäfses in gleiche Höhe mit der äufseren Flüssigkeit kommt. Wie hoch steigt die Flüssigkeit im Gefäfs? Spec. Gewicht des Quecksilbers = 13,6, das des Glycerins = 1,26.

(*491*) Nyt Tidsskrift. XXII, 357.

II. Akustik und Optik.*)

1. Eine Orgelpfeife wird einmal durch Wasserstoffgas und dann durch Luft zum Tönen gebracht. Eine Saite von gewisser Länge giebt, wenn sie mit einer Belastung von 9 kg gespannt ist, denselben Ton wie die Orgelpfeife im ersten Fall. Wird die Länge der Saite verdoppelt und die Belastung auf 2,5 kg vermindert, so entsteht derselbe Ton wie bei der Orgelpfeife im zweiten Fall. Wie grofs ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Tones im Wasserstoffgas, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft 340 m ist?

(*493*) Nyt Tidsskrift. XXII, 512.

---

2. Ein kleiner Schirm wird auf derselben Seite von zwei Lichtquellen beleuchtet, einem Licht und einer Lampe, die sich beide mitten vor dem Schirm befinden, das Licht in 5 dm, die Lampe in 12 dm Abstand von demselben. Man will den Abstand

*) Vergl. F § 7 Nr. 3.

des Lichtes auf 12 dm erhöhen, wünscht aber doch, daſs die Beleuchtung des Schirms unverändert bleiben soll. Wie muſs in diesem Fall der Abstand der Lampe geändert werden, wenn ihre Lichtstärke 9 mal so groſs wie die des Lichtes ist?

(*497*) Nyt Tidsskrift. XXII, 514.

3. Ein vom Punkte P ausgehender Lichtstrahl trifft eine Ebene in O und wird dort teils nach Q reflektiert, teils nach R gebrochen. (α Einfallswinkel, α' Brechungswinkel, n Brechungsexponent). Wenn nun die Winkel POQ, POR, QOR in arithmetischer Progression stehen, so ist zu beweisen, daſs $\cot\alpha = \frac{n-2}{n\sqrt{3}}$ ist.

(*280*) Educ. Times. XVII, 35.

4. Auf dem Boden eines leeren Gefäſses liegt eine Münze MN vom Durchmesser a.

a) Ein Beobachter stellt sich so, daſs der seitliche Rand des Gefäſses die Münze gerade verdeckt; die Sehlinie nach dem Gefäſsrande schlieſst alsdann mit der Vertikalen einen Winkel α ein. Wie hoch muſs wenigstens das Gefäſs mit einer Flüssigkeit, deren Brechungsindex n ist, angefüllt werden, damit die Münze dem Beobachter bei unveränderter Stellung seines Auges vollständig erscheint?

b) Dem Beobachter, dessen Auge sich vertikal über dem Mittelpunkt der Münze befindet, erscheint die letztere unter dem Gesichtswinkel 2φ, wenn das Gefäſs leer ist. Unter welchem Gesichtswinkel 2ψ erscheint ihm die Münze, wenn das Gefäſs bis zur Höhe h mit einer Flüssigkeit (Brechungsindex n) gefüllt ist?

(584) v. Jettmar XVII, 112. XVII, 523.

5. Ein Strahl einfarbigen Lichtes durchdringt in schräger Richtung eine Glasplatte von der Dicke d und dem Brechungsexponenten n und erfährt hierbei die Parallelverschiebung v. Unter welchem Winkel fällt der Strahl auf die Platte?

(1308) Emmerich XXV, 352. XXVI, 181.

6. Ein Strahl homogenen Lichtes soll unter Anwendung kongruenter Glasprismen (Brechungsexponent $= \frac{3}{2}$) veranlaſst werden, ein reguläres n-Eck zu durchlaufen.

a) Zu beweisen, daſs dieses Arrangement nur möglich ist, wenn $n \overline{\overline{>}} 8$;

b) für $n = 8$ den brechenden Winkel der Prismen zu berechnen. (Es wird vorausgesetzt, daſs der Lichtstrahl in jedem Prisma das Minimum der Ablenkung erfährt.)

(701 a, b) Emmerich XVIII, 357. XIX, 96.

7. Zwei Lichtstrahlen derselben Quelle, aber verschiedener Farbe fallen unter verschiedenen Winkeln (rot unter $\sphericalangle OAD$, violett unter $\sphericalangle OA'D'$) auf ein Prisma. Der brechende Winkel des Prismas soll so bestimmt werden, daſs die Strahlen beim Austritt wieder parallel sind, wenn die Brechungsquotienten für rot $\frac{BO}{AO} = \frac{BC}{AC}$ und violett $\frac{B'O}{A'O} = \frac{B'C}{A'C}$ sind. Das heiſst geometrisch: Es sollen von B und B' aus zwei Sekanten an den Kreis C gezogen werden, welche unter einander denselben Winkel wie DB und $D'B$ bilden ($\sphericalangle T = I$) und deren (erste wie zweite) Schnittpunkte E und E' (auch E_1 und E_1') mit A und A' verbunden Parallele ergeben.

(135) Kessler XII, 35. XII, 35 u. 265.

8. Ein Galileisches und ein astronomisches Fernrohr haben dieselben Objektive und ihre Okulare gleiche Brennweiten; auch ist das deutliche Gesichtsfeld in beiden von gleicher Ausdehnung. Dann ist der Durchmesser des Diaphragmas in dem astronomischen Fernrohr gleich der halben Differenz der Breiten der Okulare.

(*281*) Educ. Times. XVII, 35.

9. Eine Linse von 0,4 m Brennweite ist 2 m von einer weiſsen Tafel entfernt, auf welcher sie das Bild eines Objektes entwirft. Zwischen dieses Objekt und die Linse, welche fest ist, bringt man eine zweite mit der Brennweite 0,1 m an, und verschiebt sie und das Objekt so lange, bis das von den beiden Linsen entworfene Bild sich auf der Tafel befindet. Die bewegliche Linse hat dann den Abstand x von der festen Linse und den Abstand y vom Objekt.

1) Man soll die Gleichung zwischen x und y finden und sie diskutieren.

2) Man soll die Formel für die Vergröſserung aufstellen und diskutieren.

3) Man soll den Weg der Lichtstrahlen für $x = 0{,}2$ m finden.

(*27*$_2$) Nouv. Ann. XI, 110. —

III. Wärmelehre.

1. Eine Glaskugel wird gewogen, während sie vollständig in eine Flüssigkeit (spec. Gew. s) getaucht ist und erleidet dadurch einen Gewichtsverlust von $g = 38{,}53$ gr, wenn die Temperatur 0^0 beträgt. Ist die Temperatur der Flüssigkeit dagegen $t = 21{,}4^0$, so beträgt der Gewichtsverlust $g_1 = 37{,}70$ gr. Wie groſs ist der

Ausdehnungskoefficient x der Flüssigkeit, wenn der des Glases $a = 0{,}000026$ ist?

(*494*) Nyt Tidsskrift. XXII, 513.

2. Drei Flüssigkeiten A, B, C, die nicht chemisch aufeinander wirken, haben der Reihe nach die Temperaturen 100^0, 50^0, 0^0. Wenn gleiche Gewichtsmengen von A und B gemischt werden, wird die Mischungstemperatur $52{,}4^0$; werden gleiche Gewichtsmengen von B und C gemischt, so wird die Mischungstemperatur $28{,}9^0$. Welche Temperatur würde man erhalten, wenn gleiche Gewichtsmengen von A und C gemischt verden?

(*495*) Nyt Tidsskrift. XXII, 513.

3. In ein Gefäfs, das 3 kg Schnee von -4^0 enthält, giefst man 6,5 kg Wasser von 24^0 und rührt die Mischung um. Wie verhält sich der Aggregatzustand und die Temperatur? Die specifische Wärme des Eises ist 0,5, seine Schmelzungswärme 79 Wärmeeinheiten.

(*496*) Nyt Tidsskrift. XXII, 513.

IV. Elektricitätslehre.

1. Ein galvanischer Strom, der auf einer in seine Bahn eingesetzten Tangentenbussole einen Ausschlag von 24^0 giebt, entwickelt in einem gewissen Teil des Leitungsdrahtes in einer gegebenen Zeit eine Wärmemenge von 3,2 Einheiten. Wieviel Wärme wird in diesem Teil der Leitung in gleicher Zeit entwickelt, wenn die Stromstärke so vermehrt wird, dafs der Ausschlag auf der Bussole 41^0 beträgt?

(*498*) Nyt Tidsskrift. XXII, 514.

2. Zwei ungleiche Dynamomaschinen entsenden in ihren getrennten Leitungen elektrische Ströme, welche beide dieselbe Stärke haben. Wenn man die äufseren Leitungen schliefst, die eine mit 8 m Leitungsdraht, die andere mit 13 m Draht derselben Art, so wird die Verminderung der Stromstärke, die dadurch verursacht wird, für beide Ströme dieselbe. Wie grofs ist das Verhältnis zwischen den elektromotorischen Kräften beider Maschinen?

(*499*) Nyt Tidsskrift. XXII, 514.

Verzeichnis der Mitarbeiter des Aufgaben-Repertoriums.

No.	Name.	Wohnort.	Gestellte Aufgaben.
1	Ackermann	Kassel	377. 473. 611.
2	Adami	Bayreuth	411. 423. 493. 586
3	Affolter	Solothurn.	13.
4	Aigellinger	Rottweil*)	
5	Amberg	Luzern	
6	Anschütz	Aschaffenburg	168. 169.
7	Artzt	Recklinghausen	334—336. 340. 341. 373. 399—407. 422. 495—497. 530. 531. 635. 636. 677. 780. 781. 812. 820. 830. 840. 849. 864. 900. 1003.
8	Aussem	Aachen	
9	Badorff	Baden-Baden	43.
10	Bauer	Karlsruhe.	23. 24. 30. 31. 33—35. 137—142.
11	Baur	Stuttgart	
12	Behrens	Magdeburg, Sudenburg	
13	Bein	Budapest	
14	Belović	Esseg	16.
15	Bendix	Posen	
16	Berghoff	Düsseldorf	
17	Bermann	Liegnitz	190. 443. 596. 632.
18	Beseke	Wolfenbüttel	1049.
19	Besser	Gera, Dresden	
20	Beyel	Zürich	699. 724. 751.
21	Beyens	Cadiz	686. 704. 774. 882. 895. 912. 924. 932.
22	Bilz	Schwabach	
23	Binder	Schönthal, Ulm	1—10. 14. 15. 20. 28. 32. 38. 39. 41. 42.
24	Bitterli	Zürich	
25	Blasel	Neisse	860.
26	Bleicher	München	877.
27	Blind	Köln	
28	Bökle	Frankenthal	1192. 1193. 1214. 1236. 1283. 1284. 1320. 1321. 1326. 1330.
29	Böklen	Reutlingen i. Würt.	224. 282. 283. 357—362. 1350. 1351.

*) Diejenigen, bei denen keine Nummer steht, sind nur Aufgabenlöser, nicht Aufgabensteller.

No.	Name.	Wohnort.	Gestellte Aufgaben.
30	Bohm	Bremen	
31	Bonhöfer	Tübingen, Heilbronn	
32	Bosse	Dahme i./Mark	1185. 1191.
33	Braun	Kenzingen	1324.
34	Bretschneider	Eisenstadt (Ungarn)	
35	Breuer	Opladen	414. 459—464. 502. 503. 558. 966.
36	Brocard	Algier, Montpellier, Bar-le-Duc	119. 120. 133. 195—202. 231. 233—235. 316—318. 329. 355. 356. 383. 384. 395—398. 521—523.
37	Brockmann	Cleve	659. 1182.
38	Bücking	Colmar; Metz	683. 721. 942. 952. 1020 bis 1025. 1035—1037. 1252. 1262. 1277. 1279. 1290. 1333—1337.
39	Budde	Duisburg	149. 161. 209. 213.
40	Bützberger	Zürich	
41	Capelle	Oberhausen	162.
42	Cardinaal	Tilburg i. Holland	126. 127. 178. 179.
43	Caspar	Bonn	
44	Consentius	Karlsruhe	93—95. 100—102. 108—111.
45	Cornely	Würzburg	
46	Dänell	Schönfliess i. N.	1343.
47	Dewulf	Montpellier	299—301.
48	Diesterweg Geom. Aufgab.	Berlin	26.
49	Dietsch	Traunstein	342—344. 389. 425. 561—563.
50	Dörr	Karlsruhe	1274. 1275. 1339. 1340.
51	Dorn	München	1028. 1046.
52	Drasch	Steyr	735. 740.
53	Drees	Oldenburg	
54	Drexler	Niesky	
55	Eberling	Budapest	
56	Eckhardt	Homburg v. d. H.	
57	Ehrlenholtz	Hannover	500.
58	Eichler	Wien	
59	Emmerich	Mülheim-Ruhr	434. 447—449. 465. 477. 478. 498. 519. 524. 525. 527. 534 bis 536. 544. 545. 569. 578. 579. 591. 592. 613. 614. 616. 622. 626. 631. 638. 645. 657. 658. 667. 670. 676. 679. 684. 698. 701. 711—713. 733. 740. 758. 759. 773. 783. 790. 796. 798. 806. 807. 810. 824. 825. 831—833. 838. 841. 842. 850. 852. 858. 862. 863. 865. 870. 872. 875. 876. 884—886. 893. 899. 913. 914. 916. 917. 930. 931. 938. 951. 953. 963. 977.

No.	Name.	Wohnort.	Gestellte Aufgaben.
	Emmerich	Mülheim-Ruhr	1000. 1004. 1005. 1018. 1027. 1074. 1084. 1085. 1090. 1091. 1101. 1105. 1108—1110. 1120. 1142. 1151—1153. 1159. 1162. 1169. 1177. 1241. 1246. 1255. 1256. 1266. 1267. 1278. 1288. 1291. 1303. 1304. 1308. 1310. 1345.
60	Emsmann	Stettin	52. 70. 71. 153—155. 236 bis 239. 272. 391. 429. 533.
61	End	Würzburg	633.
62	Epstein	Frankfurt a. M.	947.
63	Ernst	Öls	
64	Feder	Eupen	
65	Fischer	Berlin	1126.
66	v. Fischer-Benzon	Kiel	392—394. 644.
67	Finsterbusch	Werdau i. S.	1198.
68	Fleischhauer	Gotha	125. 174—176. 211. 212. 286. 287. 297. 345. 385. 428. 484. 595. 648. 690. 694. 816.
69	Frank	Graz	
70	Franz	Kassel	1342.
71	Franzen	Kiel	
72	Friedrich	Bautzen	
73	Fröhlich	Gr.-Lichterfelde	
74	Fuhrmann	Königsberg i. Pr.	17—19. 157—159. 225. 226. 241. 242. 247—255. 279 bis 281. 290—294. 309. 312. 322—326. 328. 329. 352. 353. 366. 367. 378—380. 408. 409. 421. 439. 454. 455. 467. 482. 492. 505. 515—517. 553. 554. 570 bis 573. 612. 647. 655. 678. 682. 696. 720. 756. 770. 788. 802. 821. 856. 890. 928. 994. 995. 1019. 1030. 1038. 1047. 1098. 1186. 1209.
75	v. Gabain	Wahlstatt	
76	Gallenkamp	Berlin	
77	Garthe	Eschwege	
78	Gauger	Stralsund	
79	Geiger	Aschaffenburg	1029.
80	Gerlach	Parchim	424.
81	Gilles	Essen	246.
82	Glaser	Homburg v. d. H.	136. 194. 217—221. 298. 754. 779. 835. 836. 839. 907. 918. 919. 926. 927. 950. 968. 989. 1010. 1011. 1062. 1079. 1094. 1123. 1130. 1154. 1206. 1238. 1280.

No.	Name.	Wohnort.	Gestellte Aufgaben.
83	Godt	Lübeck	
84	Götz	Rottweil	
85	Grabig	Sorau	
86	Grassmann	Königsberg i. N.	
87	Grube	Schleswig	715.
88	Günther	Ansbach	
89	Gutzmer	Berlin	
90	Haag	Rottweil	450. 451. 474. 483. 539 bis 541. 566. 599. 630. 714.
91	Haas	Wien	1276. 1285—1287.
92	Haberland	Neustrelitz	
93	Häbler	Grimma	
94	Hahn	Worms; Darmstadt	822. 846. 880. 891. 892; 970. 983.
95	Haluschka	Trautenau	412. 546. 557. 623.
96	Handel	Reichenbach i. Schl.	1271. 1272. 1344. 1349.
97	Harmuth	Berlin	296. 363. 364.
98	v. Haselberg	Stralsund	795.
99	Heel	Speyer	
100	Hellmann	Erfurt	
101	Helm	Liegnitz	
102	Hermanni	Mülheim-Ruhr	
103	Herstowski	Glückstadt	
104	Hetzer	Hagen	203. 205.
105	v. d. Heyden	Essen	
106	Hillebrecht	Essen	1118.
107	Hoch	Lübeck	163. 164.
108	Hodum	Stassfurt	
109	Höchstätter	Ulm	
110	Höfler	Wien	725.
111	Höttermann	Potsdam	1164. 1173.
112	Hoffmann	Leipzig	82.
113	Holländer	Mülheim-Ruhr	
114	Holzmüller	Hagen	165. 600. 957. 958.
115	Hornickel	Stendal	
116	Hossfeld	Hofgeismar	
117	Hülsen	Gr.-Lichterfelde	288. 289. 471. 532. 1311. 1312.
118	Ide	Kassel	
119	Ivanov	Sofia	943.
120	Jaracki	Posen	
121	v. Jettmar	Wien	559. 560. 584. 640. 744. 767. 768. 929. 960. 998. 1017. 1041. 1055—1058. 1131. 1132. 1135. 1136. 1176. 1200—1203. 1220—1222.
122	Joerres	Ahrweiler	
123	Journ. élém.	—	91. 92. 193. 240.
124	Junker	Crefeld	1305—1307. 1319. 1322.
125	Just	Breslau	
126	Kantorowicz	Posen	

No.	Name.	Wohnort.	Gestellte Aufgaben.
127	Käsbohrer	Nürnberg	
128	Kersten	Prenzlau	
129	Kessler	Bochum	135.
130	Kiebel	Czernowitz	959.
131	Kiehl	Bromberg	96. 121—124. 181. 183. 185. 186. 268—271. 625. 755. 763. 778. 782.
132	Kleinmichel	Kempen i. Pos.	
133	Klewe	Schrimm	
134	Klug	Würzburg	
135	Kniat	Rössel (O.-Pr.)	
136	Knobloch	Wien	
137	Knops	Essen	
138	Kober	Halle	837. 888. 902. 967.
139	Kober	Oels i. Schl.; Schollwitz	556; 609. 610. 641. 656. 666. 734. 737. 753. 777. 786. 935.
140	Koebke	Stettin	1042. 1081. 1082. 1087.
141	Köhler	Stettin	
142	Kokott	Ratibor; Breslau	707; 1033.
143	Korneck	Kempen i. Pos.	
144	Kosch	Breslau	1150. 1158. 1170. 1172. 1230. 1231.
145	Krause	Magdeburg	894.
146	Krause	Oldenburg	
147	Krüger	Brieg; Pless	1039; 1063. 1078. 1240. 1245. 1292. 1302.
148	Kücker	Stettin	883. 901. 908. 915. 962. 975. 991. 999. 1099. 1100. 1111. 1112. 1122. 1133. 1145. 1167. 1178—1180. 1223. 1224.
149	Kukujay	Mikolcz	653.
150	Lazarus	Waren i. Meckl.	
151	Leder	Wien	
152	Lehmann	Glauchau	
153	Lemoyne	Genua	
154	Lengauer	München	
155	Leser	Budapest	
156	Leuzinger	Temir-Chan-Schura	948. 965. 987.
157	Leyendecker	Weilburg a. d. Lahn	417.
158	Lieber	Stettin	21. 22. 40. 53.
159	Liebetruth	Zerbst	823.
160	Liebrecht	Berlin	
161	Lindenthal	Triest; Wien	
162	Liska	Budweis	
163	Lorenz	Waren i. Meckl.	
164	Löte	Nagy-Enyed (Ungarn)	
165	Löwenberg	Goldingen i. Kurl.	
166	Lucke	Köthen	
167	v. Lühmann	Königsberg i./N.	21. 22. 41. 182. 489—491. 615. 811.
168	Lüttig	Duisburg	

No.	Name.	Wohnort.	Gestellte Aufgaben.
169	Mantel	Delft-Holland	
170	Massfeller	Oberlahnstein; Montabaur	
171	Massinger	Karlsruhe	
172	Mathematicus	Chemnitz	1044.
173	Mathesis	—	1248. 1338.
174	Mating-Sammler	Werdau i. Sachsen	1129.
175	Meinel	Fürth	761.
176	Menzel	Gütersloh	
177	Meyer	Dresden	
178	Meyer	Halle a./S.	608.
179	Meyer	Herford	
180	Meyer	Saarbrücken	855. 874. 896. 1009. 1015. 1096. 1102. 1113.
181	Meyer	Weinheim	828.
182	Michnik	Breslau	1124. 1141. 1143.
183	v. Miorini	Bielitz	726. 809.
184	Most	Koblenz	727. 728.
185	Much	Kreuznach	1144.
186	Müller	Attendorn	
187	Mürklen	Schwäb. Gmünd	
188	Müsebeck	Brieg; Waren; Herford	440. 444. 445.
189	Nawrath	Neisse	
190	Neuberg	Lüttich	230. 232. 233. 354.
191	Niseteo	Zara	702. 857. 1013. 1032. 1140. 1259. 1289. 1315. 1316.
192	N. N.	?	829.
193	Nouv. Ann.	—	11. 12. 25.
194	Nowikoff	Petersburg	
195	Otte	Potsdam	
196	Pampuch	Oppeln	370. 371.
197	Pappit	Wunsiedel	859. 1268. 1293—1299.
198	Pech	Neisse	
199	Penseler	Kiel	
200	Perényi	Vagújheli/Ung.	
201	Petersen	Kopenhagen	265.
202	Pfannstiel	Schivelbein	
203	Pflaum	Riga	
204	Pick	Wien	29.
205	Piepgras	Mülheim-Ruhr	494. 651.
206	Pitz	Giessen	
207	Plassmann	Warendorf	
208	R. . . .	F	
209	Raschig	Schneeberg	619.
210	Reidt	Hamm	63—68.
211	Reisky	Gleiwitz	
212	Renner	Ödenburg	
213	Ritgen	Schlettstadt	1040. 1093. 1097. 1126.
214	Ritsert	Laubach	1050. 1051. 1061. 1072.
215	Röllner	Znaim	172.
216	Rössel	Homburg v. d. H.	

No.	Name.	Wohnort.	Gestellte Aufgaben.
217	Rohr	Krakau	974.
218	Rosenbaum	Prag	
219	Roth	Buxtehude	
220	Ruckgaber	Rottweil	
221	Rucsinszky	Udvarheli	
222	Rulf	Pilsen	260—264. 742. 752. 766. 776. 787. 801. 808. 826. 854. 867. 873. 889. 897. 909. 920. 921. 934. 945. 955. 956. 964. 969. 976. 978. 982. 988. 1001. 1008. 1016. 1031. 1060. 1073. 1080. 1092. 1114. 1146. 1147. 1155. 1156. 1165. 1166. 1175. 1235. 1247. 1265. 1281. 1282. 1348.
223	Rummler	Freiburg i. Schl.	
224	Sadtler	Linz	
225	Salomon	Berlin	937. 979.
226	Sauer	Leipzig	
227	Sauter	Reutlingen	
228	v. Schäwen	Saarbrücken; Posen; Breslau	56—59. 72—76. 99. 146. 177. 243. 346. 347. 419. 420; 488. 567. 587. 668; 817. 922. 1002. 1253.
229	Scheffers	Leipzig	
230	Schellbach Samml. math. Aufg.	Berlin	27.
231	Scheremetewsky	Moskau	
232	Schlabach	Düsseldorf	
233	Schlegel	Waren i. Meckl.; Hagen	
234	Schlömilch	Dresden	44—51. 54. 55. 69. 70. 77—81. 103—105. 112 bis 115. 128—132. 134. 143 bis 145. 152. 156. 160. 170. 171. 184. 191. 208. 210. 256—258. 284. 285. 295. 303—308. 313. 319. 320. 330. 331. 372. 374. 386—388. 410. 415. 416. 431—433. 441. 442. 456 bis 458. 479—481. 485—487. 501. 504. 506. 518. 529. 542. 543. 551. 555. 568. 582. 585. 601. 624. 634. 639. 643. 652. 660. 664. 672. 687. 695. 703. 722. 731. 745. 748. 749. 769. 771. 794. 819. 827. 844. 848. 853. 866. 869. 871. 881. 903. 905. 906. 925. 936. 939. 940. 954. 961. 973. 985. 992. 993. 1034. 1064. 1065. 1075. 1083. 1086. 1088. 1089. 1104. 1106. 1107. 1116. 1117. 1125. 1128. 1134. 1157. 1168. 1174. 1181.

No.	Name.	Wohnort.	Gestellte Aufgaben.
	Schlömilch	Dresden	1189. 1205. 1212. 1226. 1239. 1243. 1251. 1269. 1270. 1317. 1325. 1341.
235	Schlosser	Eichstätt	
236	Schmidt	Gotha	475. 476.
237	Schmidt	Spremberg	
238	Schmitz	Neuburg a. d. Donau	151. 173. 390
239	Schubert	Bautzen	
240	Schulte-Tigges	Barmen	
241	Schulze	Hamburg	
242	Schumacher	Göppingen	1077.
243	Schumacher	Metz	
244	Schumacher	Neustadt a. H.	847.
245	Schumacher	Traunstein	507. 528. 548. 620. 732. 772. 785.
246	Schurig	Gohlis/Leipzig	792.
247	Schuster	Pola	
248	Seyffert	Forst i./L.	
249	Sievers	Frankenberg i. S.	348—351. 368. 369. 375. 376. 418. 426. 427. 430. 499. 689. 791. 910. 990. 1045. 1119. 1127. 1190. 1194. 1229. 1242. 1257. 1273. 1329. 1331.
250	Simon	Berlin	552. 674. 691. 793. 933. 946.
251	Sonnenburg	Gladbach	
252	Spangenberg	Stendal	
253	Sporer	Weingarten	520. 537. 538. 580. 581. 590. 602. 603. 629. 637. 646. 654. 663. 675. 685. 697. 705. 706. 723. 762.
254	Stade	Halle	508—510.
255	Stair	Rottweil	
256	Stammer	Düsseldorf	36. 37. 187—189. 452.
257	Steckelberg	Witten	1137. 1138. 1207. 1208. 1215. 1216. 1227. 1232. 1237. 1244. 1250. 1254. 1258. 1263. 1264.
258	Stegemann	Prenzlau	453. 736. 845. 861.
259	Stein	Genthin	
260	Steinbart	Duisburg	
261	Steinert	Karlsruhe	1170. 1199. 1211. 1213. 1260. 1323.
262	Steinke	Gütersloh	814.
263	Stoll	Bensheim	166. 167. 227—229. 273 bis 275. 302. 332—339. 358. 382. 413. 435—438. 468—470. 512—514. 564. 577. 588. 589. 604—607. 665. 681. 789. 799. 800. 805. 818. 834. 843. 851. 868. 887. 898. 902. 911. 940. 949. 980. 981. 996. 997. 1006. 1007. 1012. 1026. 1059. 1066 bis 1071. 1095. 1103. 1148. 1149. 1183. 1184. 1195. 1196. 1204. 1210. 1217—1219.

No.	Name.	Wohnort.	Gestellte Aufgaben.
	Stoll	Bensheim	1225. 1233. 1234. 1300. 1301. 1313. 1314. 1318. 1327. 1328. 1346. 1347.
264	Strübing	Gr.-Lichterfelde	986.
265	Switalski	Rastenburg	
266	Szimányi	Trenchin/Ungarn	511. 526. 565. 583. 593. 594. 597. 598. 618. 627. 628. 662. 669. 680. 692. 693. 746.
267	Tafelmacher	Osnabrück; Santiago	944. 1261. 1309.
268	Tarry	Algier	266. 267. 314. 315. 327.
269	Tauberth	Dresden	
270	Teege	Kiel	1160. 1161. 1163.
271	Thieme	Posen	671. 708. 709. 803. 804. 878. 879. 971. 972. 1052—1054. 1139. 1187. 1188.
272	Töpler	Grossenhain	
273	Treumann	Birkenruh/Wenden Livland.	
274	Tucker	London	381.
275	Türk	Posen	
276	Unferdinger	Wien	106. 107. 116—118.
277	Ungenannt	?	90.
278	Vahlen	Berlin	
279	Valta	München	549. 550. 575. 576. 747.
280	Vollhering	Bautzen	904. 1228. 1249.
281	Vonderlinn	München	
282	Wachtel	Vagujhely	
283	Wachter	Schaarbeck/Brüssel	739. 760. 784. 797. 813.
284	Weber	Frankfurt a. M.	446. 466. 547. 642. 716. 741.
285	Wehr	Laibach	
286	Weidenmüller	Marburg	321. 472. 574. 730. 738.
287	Weinmeister	Leipzig	97. 98. 147—149. 180. 192. 206. 207. 214—216. 222. 223. 244. 245. 310. 311. 1197.
288	Weinmeister	Tharand	621. 649. 650. 661. 673. 688. 700. 710. 718. 719. 729. 743. 757. 764. 765. 775. 1014. 1043. 1115.
289	Weis	Weilburg	
290	Wertheim	Frankfurt a. M.	
291	Wertsch	Spremberg	
292	Wesely	Pilsen	
293	Wilski	Liegnitz	
294	Wittrien	Königsberg i. Pr.	
295	Woelfer	Zeitz	617.
296	Wrzal	Wien	
297	Wüllner	Neunkirchen/Saarbrücken	
298	Zander	Osnabrück	
299	v. Zettmar	Marburg/Steiermark	
300	Zimmermann	Eisenach	717.
301	Züge	Lingen	815. 984. 1076.

Verzeichnis der Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften.

Verzeichnis der in den einzelnen Bänden der Zeitschrift gestellten und gelösten Aufgaben*).

Band der Zeitschrift.	Aufgaben von den Mitarbeitern		Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften.
	gestellt.	gelöst.	
I, II, III, IV	enthalten keine Aufgaben.		
V	1—16	1—10.	
VI	17—38	9; 11—25.	
VII	39—41	keine.	
VIII	42—48	26—28.	
IX	$49—70_{I, II}$	44—48; 53; 54; 56—59; 62.	Berichte über das Aufg.-Repert. d. Nouv. Ann. de Math.
X	70—95	51; 60—62; 69; 71—76; 78—80.	*1_1—39_1* u. *1_2—21_2* ohne Lösung.
XI	96—134	63; 70; 75—79; 81; 83; 84; 86—88; 96—99; 106; 107.	*22_2—31_2* ohne Lösung; *31_2—39_2* und *40—46* mit Lösung.
XII	135—194	88; 93—95; 100—102; 108 bis 115; 119—152.	*47—48.*
XIII**)	195—259	153—161; 166—183; 185—209.	*89—138.*
XIV	260—341	40; 41; 200—202; 211—216; 222—274; 276—281; 284—295.	*139—186.*
XV	342—455	296—398; (430 u. 440 bei der Aufgabe).	*187—231.*
XVI	456—564	408—428; 431—439; 441—505; (508—510 bei der Aufgabe).	*232—277.*
XVII	565—647	506; 507; 511—595.	*278—308.*
XVIII	648—735	596—678; bei 672 und 676 nur auf anderweitige Lösung hingewiesen.	*309—343.*
XIX	736—826	679—724; 726—770; Bemerkungen zu 624; 625 u. 671.	*344—377.*
XX	827—912	769; 771—847; 849—858.	*378—419.*
XXI	912—1003	859—947.	*420—458.*
XXII	1004—1086	948—956; 959—1033; Bemerkung zu *484*.	*459—509.*
XXIII	1086—1164	1034—1115 u. Nachtrag zu 1010.	*510—555.*
XXIV	1165—1244	1116—1191 und Nachträge zu 1077 und 1116.	*556—629.*
XXV	1245—1351***)	1192—1275 u. Nachtrag zu 1077.	*630—694.*

*) Dieses Verzeichnis haben wir gegeben zur Unterstützung der Leser und Mitarbeiter für den Fall, dass sie wissen wollen, in welchem Bande eine gewisse der No. nach bezeichnete Aufgabe steht, so dass sie nicht lange zu suchen brauchen. Wir kennen die Hilfe dieses Verzeichnisses aus eigener Erfahrung.

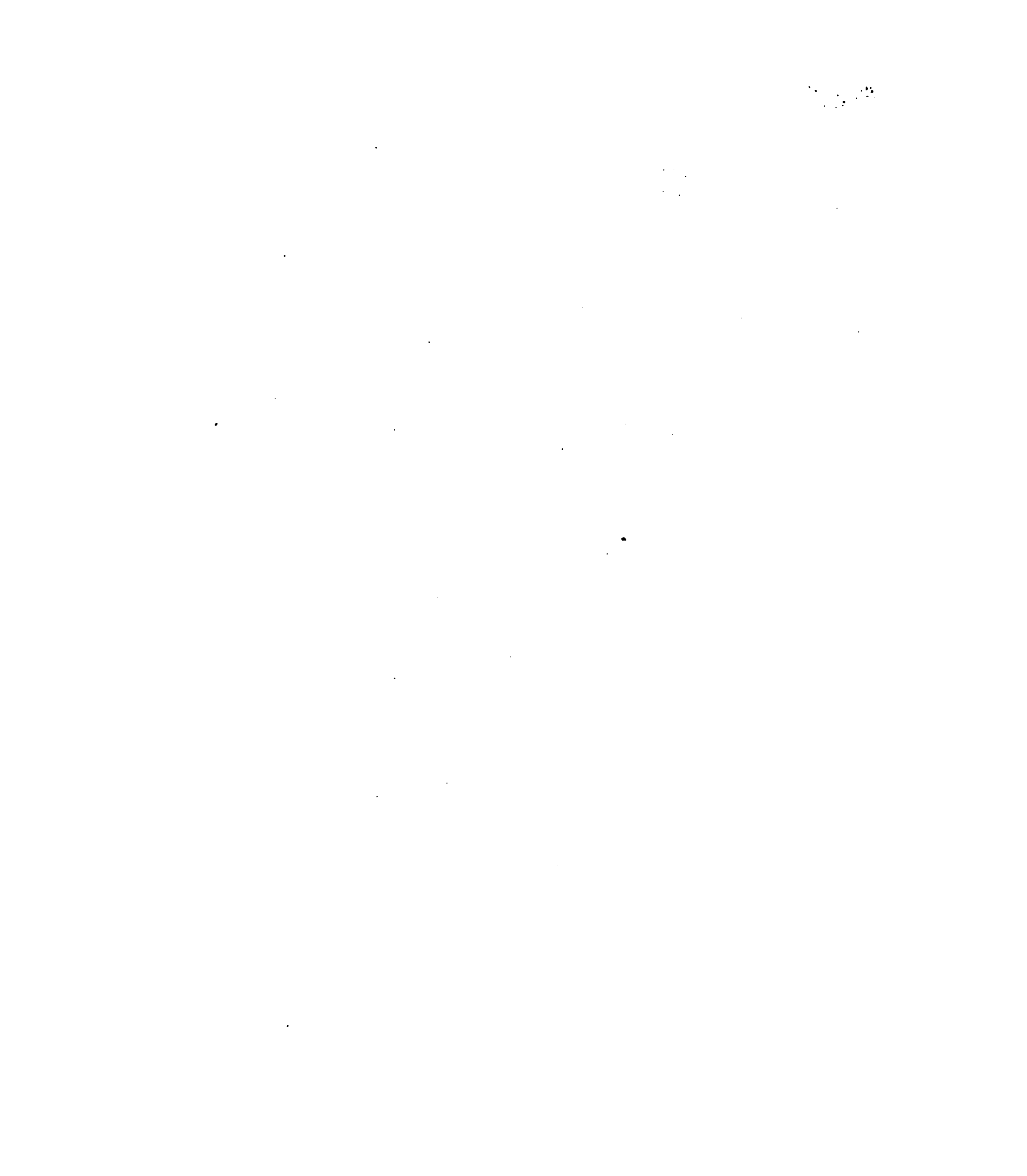
**) Von diesem Bande an sind in dem Inhaltsverzeichnis der Zeitschrift „Genauere Nachweise über das Aufgaben-Repertorium“ gegeben.

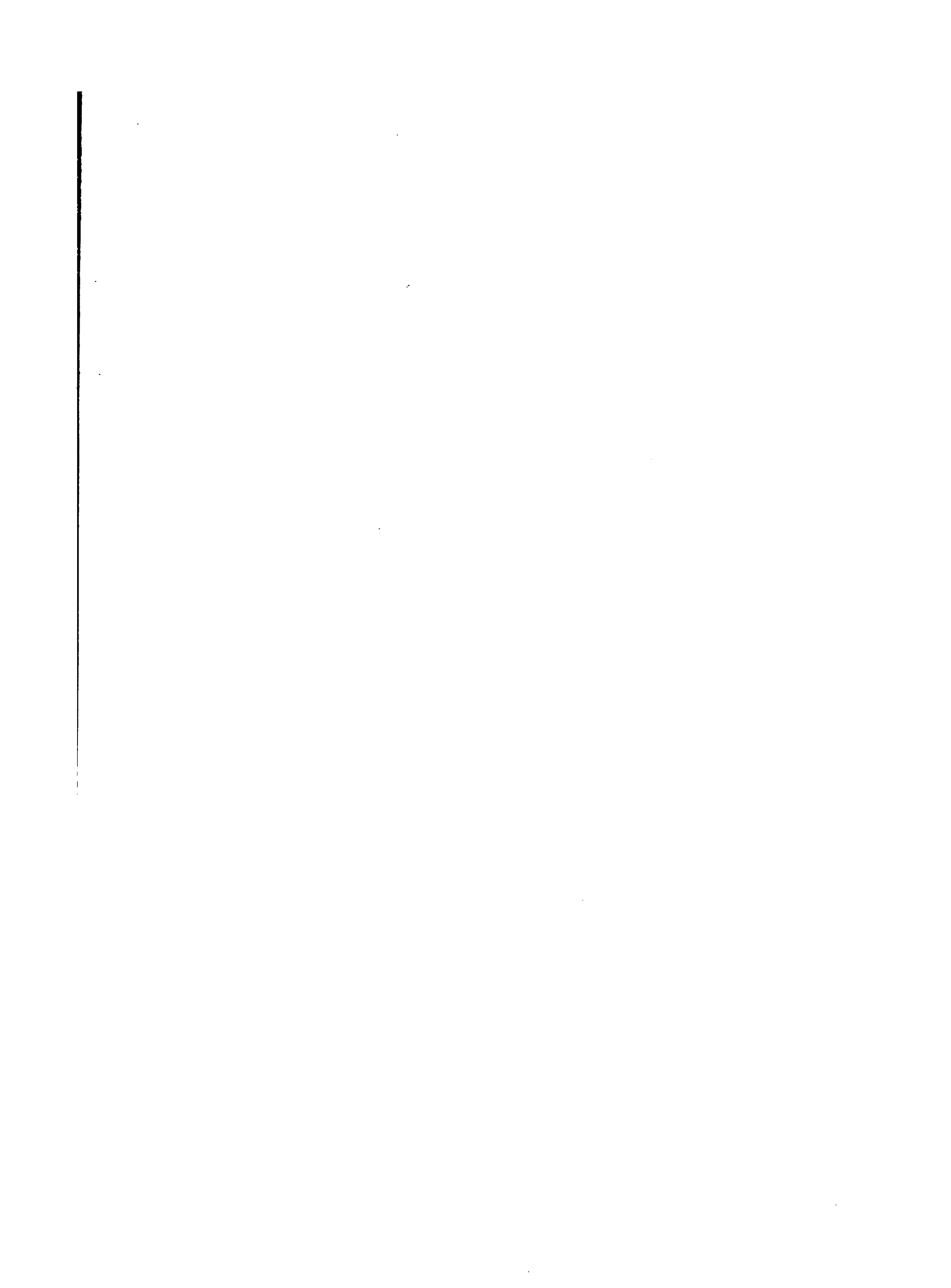
***) Die Lösung der Aufgaben 1276—1323, 1325—1343, 1345—1350 befinden sich in XXVI.

Verzeichnis der Aufgaben, die in der Zeitschrift ungelöst geblieben sind*).

No. der Aufgabe.	Band und Seite der Aufgabe in der Zeitschrift.	Seite der Aufgabe in der Sammlung.	Bemerkungen
82	X, 198	195 No. 1	
90	X, 352	—	Der ungenannte Verf. d. Aufgabe wurde auf sie durch die Anfrage eines Maschinenbauers geführt.
116	XI, 274	19 No. 46	
282	XIV, 100	365 No. 6	
283	XIV, 100	365 No. 7	
848	XX, 116	28 No. 21	
1324	XXV, 513	383 No. 7	
1351	XXV, 590	305 No. 60	

*) Dieses Verzeichnis haben wir gegeben zur Anregung, damit diese Aufgaben nachträglich noch gelöst werden. — Aufgaben, deren Lösung leicht oder anderweitig veröffentlicht ist, sind in diesem Verzeichnis nicht berücksichtigt.







FEB 28 1950

